第一章 数学建模概论

随着电子计算机的出现和科学技术的迅猛发展，数学的应用已不再局限于传统的物理领域，而正以空前的广度和深度逐步渗透到人类活动的各个领域。生物、医学、军事、社会、经济、管理……各学科、各行业都涌现出大量的实际课题，亟待人们去研究、去解决。

利用数学知识研究和解决实际问题，遇到的第一项工作就是要建立恰当的数学模型（简称数学建模），数学建模正在越来越广泛地受到人们的重视。从这一意义上讲，数学建模被看成是科学研究和技术开发的基础。没有一个较好的数学模型就不可能得到较好的研究结果，所以，从这一意义上讲，建立一个较好的数学模型乃是解决实际问题的关键步骤之一。

§1.1 数学模型与数学建模

模型是客观实体有关属性的模拟。陈列在橱窗中展览的飞机模型是参照飞机实体的形状，严格按照一定的比例简缩而制成的，它的外形一定要像真正的飞机，至于它是否真的能飞则是无关紧要的；然而参加航模比赛的飞机模型则全然不同了，如果飞行性能不佳或飞不起来，外形再像飞机，也不能算是一个好的模 型。

模型并非一定要是实体的一种仿照，也可以是对实体的某些基本属性的抽象。例如，一张电路图并不需要用实物来模拟，它可以用抽象的符号、文字和数字来反映出该电路的结构特征。

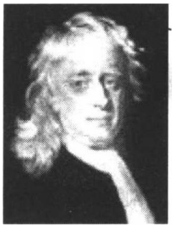
数学模型（Mathematical Model)作为模型的一类,也是一种模拟,是以数学符号、数学表达式、程序、图形等为工具对现实问题或实际课题的本质属性的抽象而又简洁的刻画，它或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略等。

数学模型一般并非现实问题的直接翻版，它们的建立常常既需要人们对现实问题有比较深入细微的观察和分析，又需要人们能灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用各种知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程被称为数学建模(Mathematical Modeling）。为了更清楚地说明什么是数学建模，让我们来看一个具体实例。

例 1.1 万有引力定律的发现。

第一章　数学建模概论

牛顿(1642—1727) 是英国著名的物理学家、数学家和天文学家,是 17 世纪最伟大的科学巨匠。然而，对于一些在自然科学上一知半解的人来说，牛顿的赫赫声名与其说来自于他的科学发现，毋宁说是来自于那个妇孺皆知的苹果落地的传说。那是 1666 年夏末的一个傍晚，在英格兰林肯郡乌尔斯索普，一个腋下夹着一本书的年轻人走进了他母亲家的花园里，坐在一棵树下，开始埋头读他的书。正在他翻动书页时，他头顶上的树枝被风吹得晃动了起来。突然，“啪”的一声，一只历史上最著名的苹果落了下来，恰好打在了这位青年的头上。这位青年不是别人，正是时年 23 岁的牛顿。据说，牛顿当时正在苦苦思索着一个问题：是什么力量使月球保持在环绕地球运行的轨道上，又是什么力量使行星保持在其环绕太阳运行的轨道上？掉下的苹果打断了他的思索，“为什么这只苹果会坠落到地上呢？”牛顿转而考虑起这个使他感到困惑不解的问题。有人说正是从这一问题的思考中，他找到了答案，并提出了万有引力定律。



这一故事讲得有声有色，我们暂且不去管这一故事的真伪。树上掉下的苹果也许的确给过牛顿某种启示，但万有引力定律的诞生却绝非如此简单，事实上，它是几代人努力的结果。

15 世纪中叶，哥白尼（1473—1543） 冲破宗教势力的束缚，向长期统治人们头脑的地心说发起挑战，提出了震惊世界的日心说。按照哥白尼的理论，地球在一个以太阳为圆心的圆形轨道上作匀速圆周运动，绕太阳一周的时间叫一年。哥白尼的理论是科学史上的一次重大革命，不仅改变了那个时代人类对宇宙的认识，而且根本动摇了欧洲中世纪宗教神学的理论基础。恩格斯称“从此自然科学便开始从神学中解放出来”;科学的发展从此便大踏步前进”。

由于受到历史和科学水平的限制，哥白尼的学说也免不了包含着一些不尽如人意的缺陷。此后，丹麦著名的实验天文学家第谷（1546—1601） 花了二十多年的时间观察当时已被发现的五大行星的运动情况，获得了十分丰富而又精确的第一手资料，他一生的奋斗目标就是提高观测的精确性，终身坚持准确细致的实地观测，并在去世前，把这些毕生精心观测的资料（包括 700 多颗恒星运行资料）都赠给了他晚年最大的发现——他的学生和助手开普勒（1571—1630） ,并且告诫开普勒：一定要尊重事实、尊重观察数据。

第谷遗留下来的资料浩如烟海，需要长期、耐心、细致地去研究。开普勒在对这些资料经过了长达九年的分析计算

后发现，第谷的观察结果与哥白尼的理论并不完全一致。例如，他在分析火星的公转时发现，火星的运行周期与运用哥白尼理论计算出来的结果大约要相差 1/8 度（一个周期为 360 度），开普勒十分了解第谷的习性，深信第谷的观察结果是精确无误的，不可能有这样大的误差，于是他认为产生这一误差的唯一原因就是火星有可能不是作当时人们普遍认为的匀速圆周运动。他以观察数据为依据，改用各种不同的几何曲线来表示火星的运动轨迹，发现火星应当是沿椭圆轨道绕太阳运行的，太阳在此椭圆的一个焦点上，而且其他行星的运行也是如此。接着他又发现，虽然行星运行的速度是不均匀的，在近日点时较快，在远日点时较慢，但是，从任何一点开始，在单位时间内，向径扫过的面积却是不变的。开普勒在计算出当时已知的五大行星的运行周期 T 和轨道长半轴 a 后，又发现了行星运行的某些规律(见表 1－1)。

表 1－1　五大行星运行周期及轨道长半轴（注：以地球为参照单位）

行　星	周期 T	长半轴 a	T^2	a^3
水　星	0.241	0.387	0.058 1	0.058 0
金　星	0.615	0.723	0.378	0.378
火　星	1.881	1.524	3.54	3.54
木　星	11.86	5.203	140.7	140.9
土　星	29.46	9.539	867.9	868.0

当时，对数表已经出现了，开普勒在把上述数据的对数查出来以后，又得一新表，如表 1－2。

	水　星	金　星	火　星	木　星	土　星
$\lg a$	－0.41	－0.14	0.18	0.72	0.98
$\lg T$	－0.62	－0.21	0.27	1.07	1.47

由表 1－2 可以看出，$\lg a : \lg T = 2 : 3$，故 $a^3 = T^2$。据此，开普勒提出了至今仍十分著名的三大假设（即开普勒三定律），这就是：

(1) 行星轨道是一个椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上。

(2) 行星与太阳的连线（矢径）在相同时间内扫过的面积相等。

(3) 行星运行周期的平方正比于椭圆长半轴的三次方，比例系数不随行星而改变(即为绝对常数)。

牛顿认为，行星运动之所以会具有上述特征，必定是某一力学规律的反映，

他决心找出这一规律。根据开普勒提出的（1）和（2），行星运行的速度显然是不断变化的，这种变化的速度在当时还无法计算，所需要的数学工具远远超越了当时传统数学的范围。为了研究这种变化的速度，牛顿不得不自己创造一套崭新的数学方法，并最终建立了微积分，这一过程也花费了他整整九年的时间。下面我们来看看，如何根据开普勒三定律和牛顿第二定律，利用微积分方法推导出牛顿第三定律即万有引力定律。

如图 1-1 所示，以太阳（设椭圆的左焦点）为极点，椭圆的长轴方向为极轴建立极坐标系，则椭圆方程可表示为

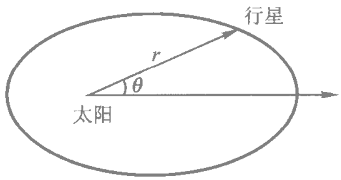


图 1-1

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

其中 $p=a(1-e^2)$，$b^2=a^2(1-e^2)$，a,b 分别为椭圆的长半轴和短半轴的长度，e 为椭圆的离心率。应用微积分知识，不难求得，在极坐标下，矢径在 $\mathrm{d}t$ 时间内扫过的面积的微元为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\,\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

由开普勒的假设（2），矢径在相同时间内扫过的面积相等，故面积的变化率为常数，因此在任意时刻 t，$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\equiv$ 某常数。所以

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta})=0$$

即

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0 \tag{1.1}$$

假设行星的运行周期为 T，则椭圆的面积恰为矢径在一个周期内扫过的面积，即

$$\pi ab=\int_0^T\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}T\text{，故 } r^2\dot{\theta}=\frac{2\pi ab}{T}=\text{常数} \tag{1.2}$$

我们用 $\boldsymbol{r}$ 来表示太阳指向行星的矢径，记其长度为 r，与 x 轴的夹角为 θ，在 (r,θ) 点处建立移动的直角坐标系，如图 1-2 所示，其中 $\boldsymbol{u}_r$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同向，$\boldsymbol{u}_\theta$ 垂直于 $\boldsymbol{u}_r$，$\boldsymbol{u}_r$ 和 $\boldsymbol{u}_\theta$ 均为单位矢量。

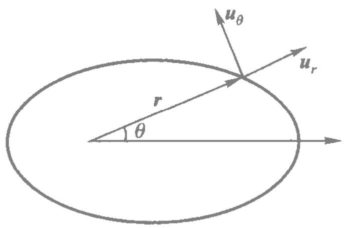


图 1-2

显然移动坐标系与固定坐标系之间有如下的坐标变换公式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_r = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{u}_\theta = (-\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 i 与 j 分别为长轴方向和短轴方向上的单位向量。此外有

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u} \tag{1.4}$$

对(1.3)式中的 u_r 和 $\boldsymbol{u}_\theta$ 求导并和（1.3)式比较得

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{u}}_r = (-\sin\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{j} = \dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = (-\cos\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{i} + (-\sin\theta)\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{j} = -\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_r \end{cases} \tag{1.5}$$

对(1.4)式求导并结合（1.5)式得

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\cdot\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta$$

继续求导得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\cdot\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_\theta + r\cdot\dot{\theta}\cdot(-\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{u}_r$$

结合(1.5) 式和(1.1)式我们可得

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{1.6}$$

以下，我们设法来求 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$,为了计算方便，我们采用椭圆的参数方程。

对椭圆方程 $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ 求导并注意到 $r^2\dot{\theta} = 2A$ 可得

$$\dot{r} = \frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\dot{\theta} = \left(\frac{p}{1+e\cos\theta}\right)^2\dot{\theta}\,\frac{e}{p}\sin\theta = \frac{2Ae}{p}\sin\theta$$

$$\ddot{r} = \frac{2Ae}{p}\dot{\theta}\cos\theta = 2A\dot{\theta}\,\frac{1+e\cos\theta}{p} - \frac{2A\dot{\theta}}{p} = \frac{2A\dot{\theta}}{pr}(p-r)$$

将 $\dot{\theta} = \dfrac{2A}{r^2}$代入上式可得

$$\ddot{r} = \frac{(2A)^2(p-r)}{pr^3}$$

由于 $A = \dfrac{\pi ab}{T}$,故

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{4(\pi ab)^2(p-r)}{pT^2r^3} - r\,\frac{4(\pi ab)^2}{r^4T^2} = -\frac{4\pi^2a^2b^2}{pT^2r^2}$$

由开普勒假设(3)，$T^2 = Ka^3$，此外，由椭圆方程可知 $pa = b^2$,故

$$\frac{a^2b^2}{pT^2} = \frac{1}{K} \quad （K\ \text{为绝对常数）}$$

再由牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\,\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{4\pi^2}{K}m\,\frac{1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

记 $G=\frac{4\pi^2}{KM}$，G 为绝对常数（其中 M 为太阳质量），于是

$$F=-G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

此即我们要推导的万有引力定律：万有引力的方向指向太阳（即作用力为吸引力），大小与距离的平方成反比，与太阳、行星质量的乘积成正比，而且比例系数为绝对常数。

§1.2 数学建模的一般步骤

从上节的例子中可以看出，万有引力的导出并不像有些人想像的那么简单。即使不把哥白尼的工作计算在内，也包含了几代人的辛勤努力。没有第谷的观察数据就不会有开普勒的三大定律，而没有开普勒的三大定律，牛顿也无从着手，不可能得出万有引力定律。分析万有引力定律的导出过程，可以看出建立数学模型的过程大致可以分为以下几个步骤：

(1) 了解问题的实际背景，明确建模目的，收集掌握必要的数据资料。这一步骤可以看成是为建立数学模型而做的前期准备工作。如果对实际问题没有较为深入的了解，就无从下手建模。而对实际问题的了解，有时还需要建模者对实际问题作一番深入细致的调查研究，就像第谷观察行星的运动那样，去搜集掌握第一手资料。

(2) 在明确建模目的、掌握必要资料的基础上，通过对资料的分析计算，找出起主要作用的因素，经必要的精炼、简化，提出若干符合客观实际的假设。开普勒通过长达九年的分析计算，才将第谷的观测数据浓缩总结为三大假设（即开普勒三大定律），这三大假设是牛顿发现万有引力定律的重要基础。本步骤实为建模的关键所在，因为其后的所有工作和结果都是建立在这些假设的基础之上的，也就是说，科学研究揭示的并非绝对真理，它揭示的只是：假如这些提出的假设是正确的，那么，我们可以推导出一些什么样的结果。

(3) 在所作假设的基础上，利用适当的数学工具去刻画各变量之间的关系，建立相应的数学结构，即建立数学模型。采用什么数学结构、数学工具要看实际问题的特征，并无固定的模式。可以这样讲，几乎数学的所有分支在建模中都有可能被用到，而对同一个实际问题也可用不同的数学方法建立起不同的数学模型。一般地讲，在能够达到预期目的的前提下，所用的数学工具越简单越好。

(4) 模型求解。为了得到结果，不言而喻，建模者还应当对模型进行求解，根据模型类型的不同特点，求解可能包括解方程、图解、逻辑推理、定理证明等不同的方面，在难以得出解析解时，还应当借助计算机来求出数值解。

（5）模型的分析与检验。正如前面所讲，用建立数学模型的方法来研究实际课题，得到的只是假如给出的假设正确，就会有什么样的结果。那么，假设正确与否或者是否基本可靠呢，建模者还应当反过来用求解得到的结果来检验它。建立数学模型的目的是为了认识世界、改造世界，建模的结果应当能解释已知现象，预测未来的结果，提供处理研究对象的最优决策或控制方案。实践是检验真理的唯一标准，只有经得起实践检验的结果才能被人们广泛地接受。牛顿的万有引力定律不仅成功地解释了大量自然现象，精确地预报了哈雷彗星的回归，并预言了海王星、冥王星等当时尚未被发现的其他行星的存在，才奠定了其作为经典力学基本定理之一的稳固地位。由此可见，模型求解并非建模的终结，模型的检验也应当是建模的重要步骤之一。只有在证明了建模结果是经得起实践检验的以后，建模者才能认为大功基本告成，完成了自己预定的研究任务。

如果检验结果与事实不符，只要不是在求解中存在推导或计算上的错误，那就应当检查、分析在假设中是否有不合理或不够精确之处，发现后应修改假设，重新进行建模，直到结果满意为止。综合起来讲，数学建模的过程大致可以概括为图 1－3 所示的流程。

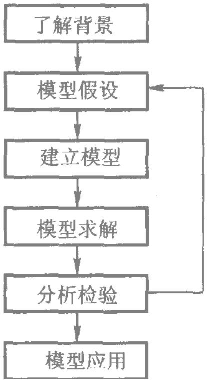


图 1－3

§ 1.3 数学模型的分类

应当首先指出的是，模型的分类在建模中并不存在什么实质性的意义，只是出于教学上的方便，我们才单独列出了这一节。

基于不同角度或不同目的，数学模型可以有多种不同的分类法。

根据人们对实际问题了解的深入程度不同，其数学模型可以归结为白箱模型、灰箱模型或黑箱模型。我们把建立数学模型研究实际问题比喻成一只箱子，通过输入数据（信息），建立数学模型来获取我们原先并不清楚的结果（见图 1－4 所示）。如果问题的机理比较清楚，内在的关系较为简单，这样的模型就被称为白箱模型。如果问题的机理极为繁杂，人们对它的了解极其肤浅，几乎无法加以精确的定量分析，这样的模型就被称为黑箱模型。而介于两者之间的模型，则被称为灰箱模型。当然，这种分类方法是较为模糊的，是相对而言的，况且，随着科学技术的不断进步，今天的黑箱模型明天也许会成为灰箱模型，而今天的灰箱模型不久也可能成为白箱模型，因

图 1－4

此，对这样的分类我们不必过于认真。

根据模型中变量的特征分类，模型又可分为连续型模型、离散型模型或确定性模型、随机型模型等。

根据建模中所用到的数学方法分类，又可分为初等模型、微分方程模型、差分方程模型、优化模型等。本书希望通过实例剖析来反映各种数学方法在建模中的应用，故本书各章主要采用的是这种分类法，以便较好地体现出各类数学方法的应用技巧。

此外，对一些人们较为重视或对人类活动影响较大的实际问题的数学模型，常常也可以按研究课题的实际范畴来分类，例如人口模型、生态模型、交通流模型、经济模型、社会模型、军事模型等。

§1.4 数学建模与能力的培养

在高等院校开设数学建模课的主要目的并非简单地传授数学知识，而是为了提高学生的综合素质，增强他们应用数学知识解决实际问题的本领。因此，在学习数学建模时，学生应当特别注意自身能力的培养与锻炼。要想知道梨子的滋味是酸的还是甜的，你必须亲口去尝一下；要想知道如何建模，除了学习基本技能与基本技巧之外，更重要的是应当参与进来，在建模实践中获得真知。

数学建模实践的每一步中都蕴含着对能力的锻炼。在调查研究阶段，需要用到观察能力、分析能力和数据处理能力等。在提出假设时，又需要用到想像力和归纳简化能力。实际问题是十分复杂的，既存在着必然的因果关系也存在着某些偶然的因果关系，这就需要我们能从错综复杂的现象中找出主要因素，略去次要因素，确定变量的取舍并找出变量间的内在联系。

假设条件通常是围绕着两个目的提出的，一类假设的提出是为了简化问题、突出主要因素，而另一类则是为了应用某些数学知识或其他学科的知识。但不管哪一类假设，都必须尽可能符合实际，即既要求做到不失真或少失真又要能便于使用数学方法处理，两者还应尽可能兼顾。

此外，我们的研究应当是前人工作的继续，在真正开始自己的研究之前，还应当尽可能先了解一下前人或别人的工作，使自己的工作真正成为别人研究工作的继续而不是别人工作的重复，这就需要你具有很强的查阅文献资料的能力。你可以把某些已知的研究结果用作你的假设，即“站在前人的肩膀上”，去探索新的奥秘。牛顿导出万有引力定律所用的假设主要有四条，即开普勒三大定律和牛顿第二定律，他所做的工作表明，如果这些假设是对的，如果推导过程也是正确的，那么万有引力定律也是对的。事实上，我们也可以由万有引力定律反过来推导出开普勒的三大假设。因而，万有引力定律被验证是正确的，也同样引证了

开普勒三大定律和牛顿第二定律的正确性。总之，在提出假设时，你应当尽量引用已有的知识，以避免做重复性的工作。

建模求解阶段是考验你数学功底和应变能力的阶段，你的数学基础越好，应用就越自如。但学无止境，任何人都不是全才，想学好了再做，其结果必然是什么也不做。因此，我们还应当学会在尽可能短的时间内查到并学会我想要应用的知识的本领。在我们指导学生参加国内外数学建模竞赛时，常常遇到这样的情况，参赛的理工科学生感到模拟实际问题的特征似乎需要建立一个偏微分方程模型或控制论模型等，他们并没有学过这些课程，竞赛时间又仅有三四天（允许查资料和使用一切工具），为了获得较好的结果，他们只用了两三个小时就基本搞懂了他们所要使用的相关知识并用进了他们的研究工作中，最终夺得了优异的成绩。这些同学在建模实践中学会了快速汲取想用的数学知识的本领（即“现学现用”的本领），这种能力在实际工作中也是不可缺少的。应变能力包括灵活性和创造性。牛顿在推导万有引力定律时发现原有的数学工具根本无法用来研究变化的运动，为了研究工作的需要，他花了九年的时间创建了微积分。当然，人的能力各有大小，不可能每个人都成为牛顿，不可能要求人人都去做如此重大的创举。但既然你在从事研究工作，多多少少总会遇到一些别人没有做过的事，碰到别人没有碰到过的困难，因而，也需要你多多少少要有点创新的能力。这种能力不是生来就有的，建模实践就为你提供了一个培养创新能力的机会。俗话说得好：初生牛犊不怕虎。青年学生最敢于闯，只要他们善于学习、勇于实践，创新能力会得到很快的提高。如 1999 年和 2003 年，浙江大学学生在经过半年多的学习和培训后参加国际竞赛，即在国际竞赛中两次夺得了最高奖——美国运筹与管理学会（INFORMS）奖。2002 年，作为浙江大学独立二级学院的浙江大学城市学院首次组织学生参加全国大学生数学建模竞赛，参赛学生同样只参加了半年左右的数学建模学习和实践，就在竞赛中交出了出色的研究论文，获得了全国一等奖，并在 2004 年国际竞赛中获得 3 项国际竞赛二等奖，在 2005 年的国际竞赛中夺得了 3 项国际竞赛一等奖和 1 项国际竞赛二等奖。当然，要出色地完成建模任务还需要用到许多其他的能力，譬如设计算法、编写程序、熟练使用计算机等能力，撰写研究报告或研究论文的能力，熟练应用外语的能力等等，所以，学习数学建模和参加建模实践，实际上是一个综合能力、综合素质的培养和提高的过程。参赛获奖并不是我们的目的，提高自己的素质和能力才是我们的宗旨，从这一意义上讲，只要你真正努力了，你就必定是一个成功的参与者。“昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路”，“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”，“众里寻她千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”，这也正是数学建模的真实写照。

下面，让我们举一些简单的实例来说明数学建模中涉及的某些能力的培养和提高。读者在看每一实例的解答以前，应当先自行给出解答，看看你的解答是

否更好。如果你觉得你的解答比书中的解答更好，想一想好在何处。

一、想像力的应用

想像力是我们人类特有的一种思维能力，是人们在原有知识的基础上，将新感知的形象与记忆中的形象相互比较、重新组合、加工处理，创造出新形象的能力。爱因斯坦曾说过：“想像力比知识更重要，因为知识是有限的，而想像力概括着世界上的一切，推动着进步，并且是知识进化的源泉。”

例 1.2　某人平时下班总在固定时间到达某处，然后由他的妻子开车接他回家。有一天，他比平时提早了 30 分钟到达该处，于是此人就沿着妻子来接他的方向步行回去并在途中遇到了妻子。这一天，他比平时提前了 10 分钟回到家，问此人总共步行了多长时间？

解　这是一个测试想像能力的简单题目，根本不必作太多的计算。

粗粗一看，似乎会感到条件不够，无法回答。但你只要换一种想法，问题就会迎刃而解了。假如他的妻子遇到他以后载着他仍旧开往会合地点，那么这一天他就不会提前回家了。提前的 10 分钟时间从何而来？显然是由于节省了从相遇点到会合点，又从会合点返回相遇点这一段路的缘故。往返需要 10 分钟，则由相遇点到会合点需要 5 分钟。而此人提前了 30 分钟到达会合点，故相遇时他已步行了 25 分钟。

当然，在解答中也隐含了许多假设：此人的妻子像平时一样，准备按时到达会合地点；汽车在路上行驶时作匀速运动；相遇时开门上车时间很短，可以忽略不计等。

例 1.3　学校组织乒乓球比赛，共有 100 名学生报名参加，比赛规则为淘汰制，最后产生出一名冠军。问：要最终能产生冠军，总共需要举行多少场比赛？

解　第一轮要进行 50 场比赛,剩下 50 位同学；

第二轮要进行 25 场比赛,剩下 25 位同学；

第三轮要进行 12 场比赛,1 位同学轮空,剩下 13 名同学；

第四轮要进行 6 场比赛,1 位同学轮空,剩下 7 位同学；

第五轮要进行 3 场比赛,1 位同学轮空,剩下 4 位同学；

第六轮要进行 2 场比赛,剩下 2 位同学；

第七轮要进行 1 场决赛，产生一位冠军。

共举行的比赛场数为 $50+25+12+6+3+2+1=99$ 场。

这是常规的计算方法，事实上，我们也可以换一种方法来思考这一问题。由于淘汰赛的特殊性，进行一场淘汰赛必然淘汰一人，反过来，淘汰一人也必须举行一场淘汰赛，这就是我们数学中的一一对应关系。现在我们要从 100 位同学中产生一位冠军,众所周知,要淘汰 99 位同学才能产生最后的冠军，因此比赛总

场次应为 99。

例 1.4　将形状质量都相同的均匀砖块一一向右往外叠放，欲尽可能地延伸到远方，问最远可以延伸多大距离。

解　设砖块的长度为 1，重量为 mg，其重心在中点 $\frac{1}{2}$ 砖长处，现用归纳法推导。

若用两块砖，则最远的方法显然是将上面砖块的重心置于下面砖块的右边缘上，即可向右推出 $\frac{1}{2}$ 块砖的长度。

现设已用 $n+1$ 块砖叠成可能达到的最远平衡状态（如图 1－5 所示），并考察由上而下的第 n 块砖，为了推得最远且不至于倒下，压在其上的 $n-1$ 块砖的重心显然应当位于它的右边缘处，而上面 n 块砖的重心则应当位于第 $n+1$ 块砖的右边缘处，设两者水平距离为 Z_n。由力学知识可知，以第 $n+1$ 块砖的最右端作为支点，第 n 块砖受到的两个力（上面 $n-1$ 块砖的压力和第 n 块砖自身重力）的力矩应当相等，即有

$$(n-1)mgZ_n=mg\left(\frac{1}{2}-Z_n\right)$$

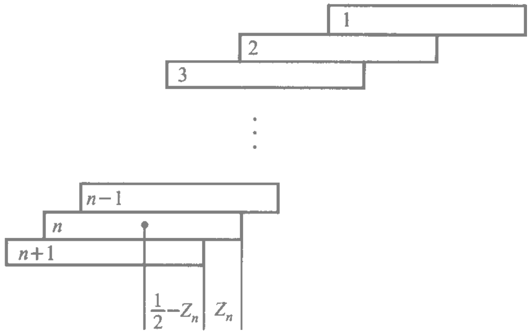


图 1－5

故 $Z_n=\frac{1}{2n}$，从而上面 n 块砖向右推出的总距离为 $L=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$，令 n 趋于无穷，从理论上讲，向右推出的距离可趋于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$。这里涉及到无穷级数，众所周知，调和级数是发散的，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

故砖块向右可叠至任意远，这一结果多少有点出人意料！

二、发散性思维、创新能力的培养

数学建模中经常需要用到创新思维或发散性思维。这里的发散性思维是相对于“一条道跑到黑”的收敛性思维方式而言的，并非是贬义词。所谓发散性思维，是指针对同一个问题，沿着不同的方向去思考，不同角度、不同侧面地对所给信息或条件加以重新组合，横向拓展思路、纵向深入探索研究、逆向反复比较，从而找出多种合乎条件的可能答案、结论或假说的思维过程和方法，这就是我们通常所说的“条条大路通罗马”。

我们先举一个例子来加以说明，是否有创新性思维或发散性思维在很大程度上会影响到建模者的建模步骤。这个例子源自于华盛顿大学物理系教授卡兰得卡的一篇名为《气压计的故事》的文章。

例 1.5　有一位物理老师给学生出了一道试题：“试证明怎么能够用一个气压计测定一栋高楼的高度”。学生的答案是：“把气压计拿到高楼顶部，用一根长绳子系住气压计，然后把气压计从楼顶向楼下放，直到放到街面为止；然后把气压计拉上楼顶，测量绳子放下的长度。此长度即为楼的高度。”这位学生的回答的确提供了一种测量楼高的方法，但这位学生完全没有利用气压计的主要功能，故老师准备给他打零分。然而学生则声称他的方法没有错，应该得满分。于是这位老师找来了一位同事作为评分的鉴定人。这位同事听了学生的答案后，提出了一个折中方案，要求学生在 6 分钟内重新回答同一问题，但答案中必须体现一些物理学知识。学生在规定时间的最后 1 分钟里写出了他的答案：“把气压计拿到楼顶部，让气压计斜靠在屋顶的边缘，从屋顶自由落下，用秒表记录下下落的时间，然后利用公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 计算出大楼的高度”。虽然这一回答用到了物理知识，但这种方法也没有涉及气压计的实际用途，由于试题并没有强调一定要用到气压计的功能，该物理老师的同事作了让步，几乎给这个学生打了最高分。当这位同事想要离开时，应试学生称他还有其他答案：“可以在有太阳的日子里测量气压计的高度和它的影子的长度，再测出大楼影子的长度，利用简单的比例关系即可算出大楼的高度”，“还有一种最基本的测量方法，拿着气压计，从一楼登梯而上，当你登楼时，测出一层楼的高度有几个气压计的高度，然后乘以层数即可”，“如果想得到更精确的答案，可以用一根线的一端系住气压计，让它成为一个钟摆，然后测出街面和楼顶的重力加速度 g,从两个 g 值之差，原则上也可以计算出高度”。在举出几种方案之后，他又补充道：“如果不限制使用物理学方法回答这个问题，还有其他办法。比如，你拿上气压计走到楼房底层，敲开管理人员的门，对管理人员说：‘亲爱的管理员先生，我有一个很漂亮的气压计。如果你告诉我这栋楼的高度，我将把这个气压计送给您……’”。

当然，这或许只不过是一个笑话。这位学生懂得的物理知识显然不少，也应该知道这个题目的常规答案，但他就是不想按照老师设计的解法解答，这种近乎抬杠的方法我们并不提倡，但是，他这种不被传统固有知识所限制，举一反三，努力提出新方案的思维方式，就是我们所提倡的发散性思维。

例 1.6 三角形内角和为 180° 的“证明”。

大家都知道三角形的三内角之和为 180°，现在，我们将用一支普普通通的铅笔来“证明”这个几何定理。

如图 1-6 所示，取一枝铅笔，将其放置在三角形 ABC 内靠近边 AC 的一侧，笔身方向与 AC 相同，笔尖指向 A 点一侧，现将此铅笔笔尖向前，沿三角形的边在三角形内环行一周，返回原地。证明完毕。

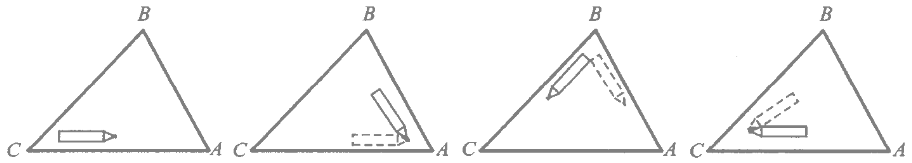


图 1-6

好像什么也没有证明呀。让我们来分析一下。

铅笔沿三角形内侧环行，走到 A 点时，以笔尖为圆心，将铅笔顺时针旋转至使笔身平行于边 AB 的方向，则转过的角度等于$\angle A$；继续前行至 B 点，以笔的尾端为圆心，将铅笔顺时针旋转至笔身平行于边 BC 的方向，则转过的角度等于 $\angle B$ 继续前行，到 C 点按同样规则转弯，转过的角度等于 $\angle C$。三次转弯下来，笔尖由指向 A 点一侧变为指向 C 点一侧，一共旋转了 180°。这说明$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，完成了证明。

现在我们改变环行规则，将铅笔放在三角形 ABC 外侧，沿外侧环行，铅笔后端（前进方向的反方向）将要远离三角形时停下来，以后端为圆心，将铅笔逆时针旋转至平行于相邻边的方向，继续环行，直至回到初始位置（如图 1-7所示）。

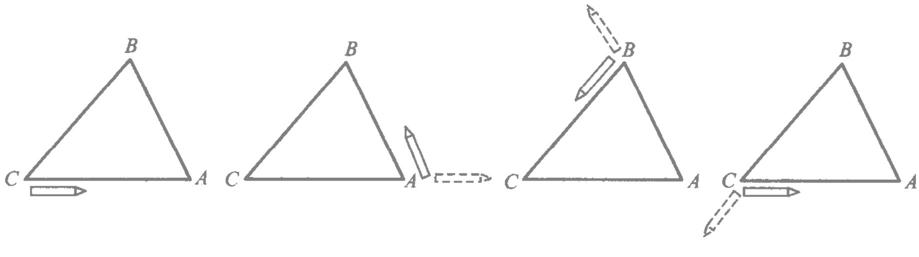


图 1-7

我们又“证明”了另一个几何定理：三角形的三外角之和等于 $360°$。为什么？请同学们考虑。（当然，这些并非真正严格的数学证明，故我们给证明加上了引号。）

例 1.7　勾股定理的证明。

大家熟知的勾股定理应用极广，从古至今，已知的数学证明方法超过 370 种，现在我们介绍一种比较有趣的证法——纸箱推倒法（注：同样并非严格的数学证明）。

如图 1-8，一只纸箱 $ABCD$ 竖放在地上，用手一推，纸箱被推倒了，到了 $AEFG$ 的位置，勾股定理已经被证明！

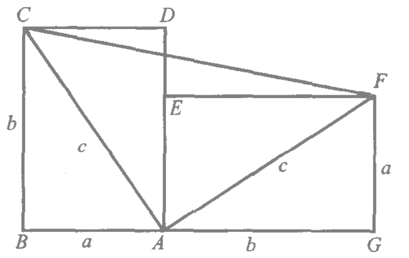


图 1-8

你不相信吗？请联结 AC，AF，CF，设 $AB=a$，$BC=b$，$AC=c$，推倒了纸箱，对角线 AC 旋转 $90°$ 到达 AF 位置，故 $AC=AF$ 且 $AC\perp AF$。

现计算直角梯形 $BCFG$ 的面积，梯形面积公式为上、下底之和的一半乘以高，即

$$S=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$$

直角梯形的面积也可以这样来计算，将梯形 $BCFG$ 拆成三个直角三角形，分别为 $\triangle ABC$，$\triangle ACF$，$\triangle AFG$。由于全面积等于各部分面积之和，故

$$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACF}+S_{\triangle AFG}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$$

两式相比较，马上可得勾股定理 $a^2+b^2=c^2$.

上述证明非常直观，但我们想强调的是证明时一定要注意逻辑推理的严密性，否则，如仅凭直观想像，也很容易导出荒谬的结果。（见例 1.10）

例 1.8　取一张普通的 64 开纸，现在要求用这张纸剪出一个洞，使得你的整个身体都能够从此洞中钻过去。

显然，64 开纸比人的头颅要小得多，更加不要说是人的身体了，是不是题目出错了?! 按我们一般的思维，确实不管你怎么剪，都不可能从纸上剪出一个比人的身体还大的洞来，但纸张是柔软的和有韧性的，假如按照图 1-9 的式样，先将纸上下对折，拿起剪刀，剪出图中的一些竖线，竖线

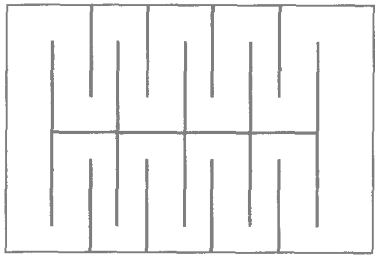


图 1-9

的条数不限，关键是从对折以后的双层纸上下两边轮流剪，不能剪断。竖线剪好以后，再沿折缝剪出中间的横线，两头也不能剪断。放下剪刀，双手捏住纸的边框，轻轻抖开，马上就出现了一个很大的洞！你的身体就能钻过去了。事实上，只要你的裁剪技术足够好，纸的韧性足够强，竖线剪得足够多，这个洞甚至还可以让整个地球钻过去！考虑一下，你是否会有类似的发散性思维。数学中在构造反例时经常会采用一些在别人看来似乎有些古怪的想法，但不这样做却很难找到反例。所以，能用发散性方法来思维，也应当被看成是一种能力。

三、提出建模假设的技巧

例 1.9　餐馆每天都要洗大量的盘子。为了方便，某餐馆是这样清洗盘子的：先用冷水粗粗洗一下，再放进热水池洗涤。水温不能太高，否则会烫手，但也不能太低，否则洗不干净。由于想节省开支，餐馆老板想了解一下一池热水到底应当洗多少盘子，请你帮助他建模分析一下这一问题。

分析　看完问题你已经完全了解情况了吗？我们认为可能还需要再调查了解一些具体情况。例如，盘子有大小吗，是什么样的盘子？盘子是怎样洗涤的等等。因为不同大小、不同材料的盘子吸热量是不同的，用不同洗涤方法盘子吸的热量也不相同。假设我们了解到：盘子大小相同，均为瓷质菜盘。为了清洗得干净一点，洗涤时先将一叠盘子浸泡在热水中，然后一一清洗。

你还应当再分析一下，是什么因素决定着洗盘子的数量呢？根据题意不难看出，是水的温度。盘子是先用冷水洗过的，其后可能还会再用清水冲洗，更换热水的原因并非因为水太脏了，而是因为水不够热了。那么热水为什么会变冷呢？也许你能找出许多原因：盘子吸热带走了热量，水池吸热，空气吸热并传播散发热量等等。此时，你的心中可能已经在盘算该建一个怎么样的模型了。假如你想建一个比较精细的模型，你当然应当把水池、空气等吸热的因素都考虑进去，这样，你毫无疑问地要用到偏微分方程了，这样做的话无论是建模还是求解，都会有一定的难度。但餐馆老板的原意只是想了解一下一池热水平均大约可以洗多少盘子，你这样做是不是有点自讨苦吃，有“杀鸡用牛刀”之嫌吗？如此看来，你不如建一个稍粗略点的模型，作一个较为粗糙的分析。由于在吸热的诸因素中盘子吸热是最主要的（热水一池一池地换，池子和空气可以近似地看成处于热平衡状态之中）。此外，题目还告诉我们，该餐馆在洗盘子时盘子还在热水中浸泡过一段时间。于是，你不妨提出以下一些简化假设：

（1）水池和空气的吸热不计，只考虑盘子吸热，盘子的大小、材料相同。

（2）盘子的初始温度与气温相同，洗完后的温度与水温相同。

（3）水池中的水量为常数，开始时水温为 T_1，最终换水时水温为 T_2。

（4）每个盘子的洗涤时间 ΔT 是一个常数。（这一假设甚至可以去掉

不要。）

根据上述简化假设，利用热量守恒定律，餐馆老板的问题就变得很容易回答了，当然，你还应当调查一下一池水的质量是多少，查一下瓷盘的比热和质量等。

从以上分析可以看出，假设条件的提出不仅和你研究的客观实体有关，还和你准备利用哪些知识、准备建立什么样的模型以及你准备研究的深入程度有关，即在你提出假设后，建模的框架已经基本搭好了。

四、严密的逻辑推理

古希腊学者亚里士多德所创立的逻辑推理体系，已经成为人类揭开客观世界的本质及规律的极其重要的思维活动形式，它几乎渗透到人类获取所有新理论和新知识的每一个过程中。近代科学家伽利略正是用这套逻辑推理方法，推翻了亚里士多德提出的关于“物体落下的速度与重量成比例”的错误推断。伽利略巧妙地提出：如果把一个重物与一个轻物绑在一起，结果将怎样呢？根据亚里士多德的“逻辑”，“重物下落快，轻物下落慢”，那么轻重两物绑在一起后，原先下落快的要被拖着变得慢一些，而下落慢的将被拉着变得快一些。这样，轻重两物绑在一起后，其下落速度应当比原先单个重物下落得慢而比原先单个轻物下落得快。但是，另一方面，按亚里士多德的重物下落快的“逻辑”，那么将轻物与重物绑在一起，捆绑物应比原先单个重物还要重，下落速度应该更快才对。这样，亚里士多德原来的论断就自相矛盾、漏洞百出了。

科学家尚会由于种种原因出现一些差错，对于普通人，出现这样那样的错误更是不可避免的了。下面就是一个因推导过程不严密而得出荒谬结论的例子。

例 1.10　任意三角形都是等腰三角形。

如图 1－10，设$\triangle ABC$为任意三角形。我们现在要证明，AB 的长度一定等于 AC 的长度。

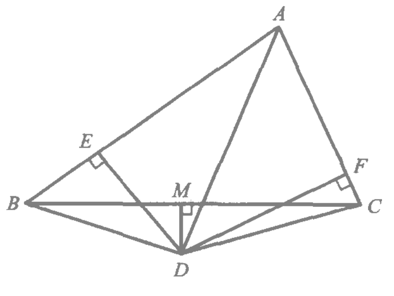


图 1－10

证明　作$\angle A$ 的平分线和线段 BC 的垂直平分线，两直线相交，交点记为 D。联结 BD，CD，作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E 和 F。

因为 D 点在$\angle A$ 的平分线上，所以 D 到AB，AC 两边的距离相等，即 $DE=DF$。又 D 在 BC 的垂直平分线上，故 $DB=DC$，又$\angle BED=\angle DFC$，故$\triangle DBE\cong\triangle DCF$，因此有 $BE=FC$，此外由于$\triangle DAE\cong\triangle DFA$，故 $AE=AF$，两式相加，有

$$AE+BE=AF+FC\text{，故}\quad AB=AC$$

即任意三角形的两边相等，证毕。

这个结果很明显是错误的。论证过程肯定有问题！让我们来检查一下上述推理过程。可以看出 $BE=FC$ 毫无疑问是正确的，$AE=AF$ 也肯定不错。两个正确的等式相加，所得结果 $AB=AC$ 也应该是对的。但 $AB=AC$ 显然错误，为何错呢？什么地方错了呢？

其实，从一开始我们就犯了一个错误，我们想当然地认为 E 在 A,B 之间，F 在 A,C 之间，而事实上 E,F 均可以落在线段 AB,AC 之外，如图 1－11 所示，如果这样，你就推不出刚才的结果了。

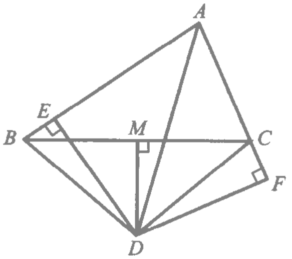


图 1－11

本例说明，正确的逻辑推理过程，只有从正确的前提出发，才能得到正确的结论。在数学建模中，正确的前提就是正确的模型假设。很多人经常忽视建模中的模型假设，认为其无足轻重，总是根据自己的感觉或经验想当然地，有时甚至是很轻率地提出假设，事实上，一旦假设中包含了错误，其后的一切努力都是徒劳。模型假设与建模中的其他过程同等重要甚至更为重要。只有在正确的模型假设下建立的模型，才会与实际生活相符，才可能有实际应用价值。

习 题 1

1. 试用图 1－12 证明余弦定理。

2. 取一根很长的绳子，它的长度恰好能紧贴地球表面绕赤道一周。如果把绳子再接长 15 m，将其悬在空中绕赤道一周（如果可以做到的话），问：你是否可以从绳子的下方自由地穿行？

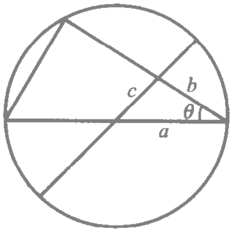


图 1－12

3. 在一个等边三角形的内部寻找一点，使得该点到三边的距离之和最小。如果是普通三角形，情况又会怎样？（提示：所求之点应为此等边三角形的中心。你会发现，联结三个顶点和中心得到的就是该三顶点间的最短联结方法，所求之点被称为该三顶点的 Steiner 点。）

4 某部门在植树节时想种 10 棵树，要求这 10 棵树排成 5 列，每列 4 棵，问应当如何种？

5. 一个男孩和一个女孩分别在离家 2 km 和 1 km 且方向相反的两所学校里上学，每天同时放学后分别以 2 km/h 和 1 km/h 的速度步行回家。一只小狗以 6 km/h 的速度由男孩处奔向女孩处，又从女孩处跑回男孩处，如此往返地奔跑，直至回到家中。问小狗总共奔波了多少路程？

6. 若上题中的男孩和女孩上学时小狗也往返奔波于他们之间，问当他们到达学校时小狗在何处？