第一章　绪　论

§1　数学的认识论与数学思维

一、从东方人的思维特征谈起

这里所说东方,主要指以中国为主的东亚与东南亚地区,也就是现在说的儒教文化圈，因此所谓东方人的思维特征主要以中国为背景.

首先我们看到,中国的古典哲学特征在今天说来就是宏观的、综合的、抽象的思维特征,从道、法、阴、阳研究起,从软的一面研究起.这在传统的中医理论上表现十分明显.比如它不是从人体的部位、器官来研究,而是从宏观上作综合地整体认识,从而统一地提出了望、闻、问、切诊断方法，自然比起西医的来自解剖学的实证研究，更难以把握了.但它并不失为一种治病救人的重要手段,且往往与西医不可相互替代,而是各有所长.这不是别的,从哲学来说,它们一个走的是由宏至微的路子,另一个走的是由微至宏的路子.从方法论来说,前者属抽象的,后者属实证的.从空间层次来说,前者在属性空间,后者在物理空间,因而前者较难,后者较易.

的确,正是西方人的思维特征使得他们首创自然科学,从而产生了近代的科学文明.具体说正是由于培根的剖分法,伽利略的观察法,牛顿的证明论,瓦特的发明论,惠更斯的实验论和达尔文的进化论等等实证思维支撑起了近代的科学文明,西医学即是其中一门科学,所以它比中医发展快.

东西方人思维特征的区别还可从它们在信封上写地址时，由大到小和由小到大的不同习惯上看出来.

不过,尽管从方法论看,西方思维容易深入、容易进展,但今天科学

已进入宏观思维、抽象思维阶段，应该说是东方思维尽其发挥的时候了.那么，数学思维更是培养这一思维特征的一个不可或缺的方式.

二、谈谈哲学及其认识论的深化进程

都知道,历史上数、理、哲本是一家.的确比如数学思维与哲学思辩、哲学方法论等,在抽象性及其若干特征上都是十分接近的,彼此相辅相成.又如历史古今，众多数学家中哲学修养都很深，更不乏哲学名家,一流的有如莱布尼茨、笛卡儿、庞加莱等等.这是为什么?不能不说明数哲间存在深刻的本质联系.却遗憾的是我国数学界曾一度流行轻视哲学的风气,这是很可惜的.那么,我们应该挽回这段历史,应该在年轻数学家(包括应用数学家)中强调哲学修养. 特别地,在本书中更需要强调数学与哲学的相辅性和相成性.我们的讲述也将随时可能提到哲学.不过我们不可能用更多篇幅去讲哲学，也没有必要，因为哲学就在我们生活中(这一观点叙述在 §2 的一).

总之,我们不应该畏惧哲学,更应该热爱它,数学修养中也应该自然地包涵着哲学修养.因此我们应该首先在意识中报充分接纳它的态度才是.

从传统哲学讲,人类的科学研究最初使用的是认识论,然后进展到方法论最后是价值论和本原论,但我们主张在这里把自然科学(属于自然哲学）的实证方法也归于认识论与方法论间一个层次来讨论，叫它做实证论.显然五论的先后排列也正好显示了它们难度的先后顺序.可以说认识论是人类用以理解事物的最为古朴、直接的思维方法,也是一种本能的认识方法.实证论是认识论的具体和实在化方向的深化.方法论系指思想方法、世界观,可说是认识论、实证论的升华和指导.对于那些不可能用认识论、实证论一下子解决的问题,它首先致力于从高观点去寻求解决问题的思想，或用抽象的思维方式去解决问题.比如各门自然科学中好些课题即不像生活常识那样简单.墙上挂的东西够不着,搭上梯子就行了.这里得先放下问题本身,着力于发明、创造出一架适合的"梯子"(思想)而不是硬搬现有的"凳子",或至少得借一架适用的梯子才能说到去解决问题.价值论是考虑了"利益"关系的问题,也是在

“自然”问题上同时考虑了“社会性”的问题或管理类问题，因此变得更为复杂.比如首先就难以作出实证量度，难以用上测量仪器，不能不承认它的数学是较难的.至于本原论则更难了，它志在追本溯源，寻找事物发生的真谛，因此有可能涉及到人类生活空间、精神世界的终际和边缘，比如人类有史以来都追索不已的四大恒古之继 地球的起源、宇宙的本质、精神的实质和细胞的发生机制等，即是本原论所要解决的最大问题.显然本原论是认识的最深层、最高级形式.

也有人说认识论是解决“是什么”的，实证论是解决“有什么”的，方法论是解决“像什么”的，本原论是解决“为什么”的，价值论则是解决“应该是什么”的，不谓不精粹也.

总之，从总体上说来，认识论、实证论、方法论仍然是基础、是重点，价值论和本原论是其派生和推广，因此作为科学运用，着重应掌握的还是前三论.为此我们可进一步观察一下，人类从认识论进展到实证论和方法论的进次步骤，这就是：

1. 凭直观 只能认识眼前有形的、实在的事物；

2. 凭直觉 简单说，直觉 = 直观 + 想像.它可作预测性的认识，但其准确性较差；

3. 凭经验 经验是一种实践知识，简单说经验 = 经历实事(信息) + 直觉，这样认识事物比仅凭直觉的准确性更强；

4. 凭知识和经验：知识是前人经验的整理与升华，因而更为可靠；

5. 凭“定律”和程序步骤 定律是公认的观察、测定、实验结论，简单说定律就是公认实事，它是一种具有定格的（命题式）知识.用定律再结合程式设计以作实证认识，即进入实证论范畴.它比一般认识论更为实在、更为深刻，更能深入到直观和经验不可及的深度和广度，因而更为准确；

6. 凭“定理”和推导 定理是依据客观事实、知识和定律、符号，通过逻辑推理而得出的科学结论，常常是人们凭经验、观察得不到的实事.因而凭定理、定律再作逻辑推理将会使人类的认识达到更深层、更抽象的地步.这时的认识同样属于实证论范畴.

7. 方法论 当一般认识论与实证论经上升、升华成为思想方法、思

维工具和思维观念时即成为方法论，以此反回去认识世界将变得更广、更深、更抽象，更具指导性.数学方法中蕴涵着丰富的方法论.

至此，我们看到了，对于认识事物来说 1～7 的手段是逐步深入的，其中还可分作三个大的阶段:1～4 属于一般认识论阶段，也叫做思辩认识阶段，其特点在于凭直接地思维去认识对象，这样的认识范畴和深度自然是有限的；5～6 则属于实证论阶段.由此升华即成 7 的方法论，它的特点是凭藉"软"的思想方法去抽象地，从而更为宽广、深邃地认识问题.还应说明的是，这里"定律"、"定理"是广义的，只要符合上述定义即是，不必局限于书本上已有称呼的(有名的)定律、定理.此外现代的思辩认识也在借助定律、定理，但它与实证论的关键区别在于它是凭藉直接地思维方式而不是采用实证方法去实现目标.

本书任务之一即在借助一般认识论，去揭示数学中种种实证方法的方法论思想，促进我们数学思维的修养提高.

三、数学思维与合情推理

科学进入现代，数学思维这一术语已在科技界流行起来，可什么是数学思维?这是值得认真思考、正确回答的.这一回答本身即有利于增进我们的数学修养.不过这里不准备展开（有兴趣的读者可参见拙著《思维科学引论》，中国铁道出版社，2001 年）.藉此我们直接给出定义：数学思维属于认识论和方法论的综合型思维形式，它具有概念化、抽象化、模式化的认识特征，或说具有把数学中的概念结论和处理方法推广应用于认识一切客观事物，这样的哲学高度和认识特征.

换句话说，一个具有"数学思维"修养的人常常表现出如下特点：

1.在讨论问题时，习惯于强调定义(界定概念)，强调问题存在的条件；

2.在观察问题时，习惯于抓其中的(函数)关系，在微观(局部)认识基础上进一步作出多因素的全局性(全空间)考虑；

3.在认识问题时，习惯于将已有的严格的数学概念如对偶、相关、随机、泛函、非线性、周期性、混沌等等概念广义化，用于认识现实中的问题.比如他们会看出价格是商品的对偶，效益是公司的泛函等等.

通俗说来，数学思维乃数学家的一种职业习惯.这里我们更强调它是应用数学家的职业习惯."三句话不离本行"，职业习惯对于任何职业的职业者都有,一般说这是好习惯、值得肯定.可以说'数学思维'这一职业习惯更是得到人类共同肯定的，属于数学修养之例，都希望秉有它,这是好事,也是容易的,只要具有这一强烈意识,坚持下去即可逐步形成.有意识的修养比无意识地、凭自然地增长来得快.事实上数学修养从来都不只数学家才有,应用数学家(不只来自数学专业的)中也不乏具有高深数学修养的人，即使在我国科技界这种人也很不少.

一位名家说"真正的数学家应能把他的东西讲给任何人听得懂"，为什么?这就应了哲学上一句名言'真理总是简单的'，换句话说数学形式再复杂，它总有简单的思想实质，因而我们掌握数学思想总是容易的.再说现代科学中，数学能力对每个人都很重要，但数学能力的关键不在数学计算,特别在计算机时代首先应该重视建模能力,却要知道建模能力的基础是数学思维.换句话说,思想比公式更重要,建模比计算更重要.

那么,对数学的认识既是数学思维的用武之地,也是培养数学思维的一个好场所.

顺便提到,一种叫做'合情推理'或'常识推理'的思维形式也是一种重要的数学思维方式.这是经著名数学家波利亚推崇，被数学界广泛接受的一种数学修养,它属于'归纳'型思维,对偶于严格的逻辑演绎,有利于培养灵活、抽象、猜想和活跃的思维习惯.目前数学教育界纷纷主张在数学教育中加强合情推理能力的培养，无疑对每个科学工作者都是重要的(续见第九章 §1、三).

§2　谈点学习心理学

本节希望表明:(1)从课堂和书本学到的只能是知识，是外来信息，人们最终的需要却是开发自己的意识和悟性;(2)但知识可以促进意识和悟性的开发，加深意识和悟性的内容;(3)人们自身潜在的意识和领悟能力可以不同,但他们有着共同的可开发特征和年龄特征,成人

期正是它的佳期,现分段简述之.

一、关于认识过程的一点认识

通过观察思辨，我们把脑内认知深化过程从接受知识开始到最高的‘悟性’层次,初步分作四个阶段来认识,其中还包括一个跃迁层次,总的见图 1.1.

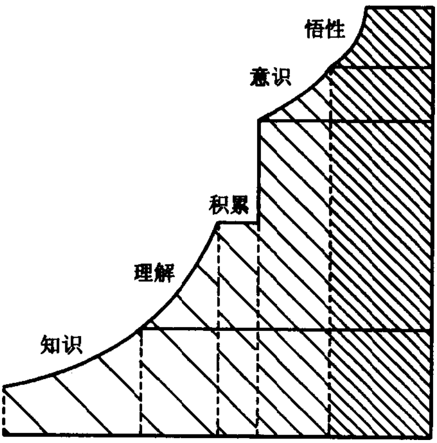

图 1.1

首先需要说明,这里我们似乎涉及到了哲学史上、特别是近代哲学史上一个纷繁跌宕的敏感述语,但是我们没有工夫、相信读者也没工夫去光顾历史大卷，弄清诸如康德和黑格尔的分野等哲学家才关心的专业哲学问题，再去决定我们的思想站队.作为一种便捷处理，我们首先强调两点,然后以解释图 1.1来完成任务.

(1) 哲学不是哲学家创造的.哲学思维原本存在于人类共同的思维中,哲学家的贡献仅在于用人类共有的理性思维去观察、总结、整理了人类的‘哲学思维’,提出了种种概念.但也正是这些从数学意义来讲不甚严格、不甚分明的概念加剧了他们旷日持久的争论，并且越是争论,新概念(实则新术语)变得越繁复稠密,使得局外人难分彼此.鉴于

哲学真正的发展还是离不开科学和社会整体的发展这点，我们局外人满可以不介入它，只须从我们人人都秉有的思维特征和基本的哲学知识去直接认识我们所要的概念，把它叫做大众哲学.

(2)本书提倡一种坦率直言的性格,特别根据数学思维特征,我们将按我们的理解,对我们所用的哲学概念赋以公理化(实则只能说是拟公理化）定义藉以阐述我们的观点.从科学意义讲，即使我们的定义与“哲”人的有所差异,也不至承受歪曲、背叛的责任.

鉴于此,我们在图 1.1 的解释中对所用到的概念,同时给出定义.

1.知识

简言之，知识就是脑内存储的正确信息.反之,脑内存储的一切正确信息都叫做知识，因此知识一词是很广泛的术语.所谓‘正确’信息，即从根本上说是合符实际的信息,尽管暂时还无法检验也罢,亦即这只是一种理论上的说法.

知识可以来自客观经验(包括经历),也可来自脑内创生.

知识的结构很复杂、层次很多.图 1.1 中表出的是知识的升华层次,仅表出了一些基本层次.

2.理解

这里‘理解’作名词用,表示理解了的知识,也叫活知识.对于一个信息(知识),如果获得了与之有关的更多信息,从而形成一个以该信息为中心的信息系统，这时叫该信息做理解了的信息或理解了的知识抑或活知识.

知识的理解也是有程度之分的.事实上知识从基本知识到完全理解了的知识之间没有绝对分明的界限，而是个连续分部的上升的过程.

但不管怎样，基本的和理解了的知识仅以一种外来知识的形式被存储,还不能就是自己的知识,还可能被遗忘.

3.意识

理解了的知识经过一定的积累阶段(如图 1.1 中(积累)段)后,可能产生一次内在的飞跃或说升华，表现为对已有（理解）知识的反视觉醒,是对已有知识来自自我的重新发现,叫做意识了的知识,简称意识知识.

意识知识有几大特点：①这种知识经过自己的重新发现成为自己的内在信息,甚至已不记得它来自何处,倒觉得是自己从来就有的知识似的;② 意识知识能达到自如的运用，即可以在不知不觉的自然状态下随着思维而自觉地运用，而勿须意识的驱使;③ 意识知识是不会忘却的,也不需要去记忆和回忆,似乎意识知识不是存在于大脑皮层而是存在于大脑皮层以下.一般（未升华）知识与意识知识的存储状态可比做计算机上外存与内存的不同状态,内存信息可以直接运用,而外存信息要经过内存(相当于意识的驱使)才能使用.

4. 悟性

悟性是对知识的一种醒悟、觉悟、感悟、归纳,它比意识来的更深刻,不仅表现为对知识的"重新发现"而且有更深层的发现感.所谓"发现感"，是说这种悟性所悟出的东西不一定是实在的发明创造性思想,而是一种带有情感性的认识，一种激情，往往只能体会而不可能完全"道"出来,即所谓"只可意会不可言传",因为它带有内在情感性,不是一般的信息."道可道,非常道",用语言表达出的只能是一般信息,最多是经解释成为理解了的信息. 因此讲演的效果最多只能促进意识或悟性的发生，而不可像一般信息授予那样直接授予悟性.

显然,悟性与灵感也不是一回事,灵感有时可表现为新事物的创造和发明,而悟性主要表现为现有知识的更深刻、更抽象的升华.

总之,悟性是意识的高级阶段,它与意识没有分明的界限,是一个连续分布的更高阶段(见图 1.1).悟到的与意识到的知识都是"内存"知识,是真正属于自己的.人的意识和悟性能力是潜在于自身的，它只可接受外来因素的启发、诱发、激发和开发,却不可自外在直接传递、转录而来.

二、对学习的一点再认识

学习(包括生活实践、书本阅读和课堂接授)似乎是人类增长智慧的唯一源泉,因此人类越来越重视学习和教育.但这里我们准备从另一角度对学习作作认识.

本着"一"中观点不难看到,学习获得的只能是一般信息(一般知

识),最多是得到理解的知识,由于它是外来信息只能属于图 1.1 中第一个上升过程. 也就是说人的意识、悟性等更高级的知识不可由学习直接得到,所谓'师傅引入门、修行在个人'也是这个原理. 皆因意识和悟性属于人的内在潜能. 学得的知识只能为之奠定基础，只能通过学习(量变)去启发和诱发这种潜能的发挥,产生质变,获得潜能的开发. 这就是学习与智慧间的全部关系（真正的智慧仅表现为意识和悟性能力). 我们既不能夸大学习对智慧的'源泉'作用,也不可贬低学习对智慧的'源泉'作用.

本著正是基于这一认识来写的，我们从心理上力求把自己意识到、领悟到的东西写出来. 但毕竟不是完全可能的，写出来的将只能是一般知识,所以我们宁可立足于讲授知识,同时竭力附之以感情,以期诱发读者的悟性.

反之也应承认,只有有了悟性的人才容易被诱发出语性来,否则他只能作为一般知识来读. 却悟性是人人都有的'矿藏',只是不同的人矿深(慧根)不同. 即使同一个人,不同的年龄阶段,其'矿深'也不同,正好本著是奉献给那些慧根最浅——进入悟性期的读者的,其原因请见下段.

三、关于学习的年龄特征

教育心理学已经得知,人的学习能力是具有年龄特征的. 比如粗略地讲,人从 6、7 岁到 14 左右是记忆的最佳期，这时的记忆常常表现为善于死记,过目不忘. 读过的知识能记住在那一页那个位置，却这种能力在 15 岁以后即逐步衰退. 15 岁以后的记忆越来越依赖于理解性记忆. 一般说在 25 岁以后,连理解性的记忆也已走向或走过顶峰,即此期(25 岁以后)内,随着人的进入成年期,另一种更为重要的学习特征(也是思维特征）日渐强盛了. 这就是进入了悟性期. 这时他们会自然地、不自觉地对已熟悉的知识进行“反刍”，产生新的感觉和深层的意识. 另一个特点是,知识一旦产生了悟性思维,即自然地变成了自己的内存知识,而没有得到悟性,或说未达到悟性程度的知识,常常会被逐步遗忘. 每个年长的人都可作出回忆比较，他们在 25 岁前所记得的能够用

上的知识往往比他年长后的多. 好些年轻时口若悬河的善辩者,老来却吐不出多少词来也是这个原理.这就是年龄进入悟性期后，原来“外”存的大量知识,要逐步经受一个取舍过程,能达到意识和悟性级别的则转为更高级的‘内存’形式,变成自己的知识,如观点、观念、信条之类的知识即是(也许老人的固执也源于此),其它的知识则逐步萎缩之. 当然也得承认另一个事实,年轻时存储的知识越丰富,将来得到的悟性知识则越多、越高级,亦即既有的知识量也是与悟性量、悟性深度呈正比的.

总之,我们看到,目前的博士生们都进入了人生悟性佳期,加上他们有丰富的前期知识,更应珍重这一时机,有意识地去接受启发,创造激发悟性的心理环境. 只有报这样的观点去学习、阅读,去领会更深层的知识,才会更有利于我们的事业.本著也是报着适应读者的这一心理来写的.

第二章　数学一瞥

本章将以鸟瞰方式对数学在历史上和结构上的几个基本特征作一简要掠述，以对应用数学工作者的基本要求为限．

§1　数学史一瞥

一、数学的基本发生图

代数学(复数系、超复数系、广义超复数系)
↑
*探索客观世界的离散特征
代数(广义数)→ 经典代数(方程式(组)论)→抽象代数
(群、环、域、线性空间、代数)
↑
出发点：数 → 算术 → 四则 → 八则
数论（整数集中种种结构特征探讨）
形(几何)初等几何 → 解析几何 → 微分几何 → 非欧几何
→射影几何 → 现代几何
↓
函数（模数）→ 微积分
*探索客观世界的连续特征
数学分析 → {函数论（实函、复函、泛函，概率论）; 方程论（常微分方程、偏微分方程）; 动力系统}
↓
拓扑学(点集拓扑、组合拓扑、代数拓扑、微分拓扑)

注．应用数学则以上述数学作为综合的理论基础．其次可分作：

1．应用基础 如价值数学、运筹学、数理统计学、系统科学、决策论等．

2．实际应用 思维(认识)→建模 → 分析 →返回对象（循环至满意为止）

二、数学中心的迁移史

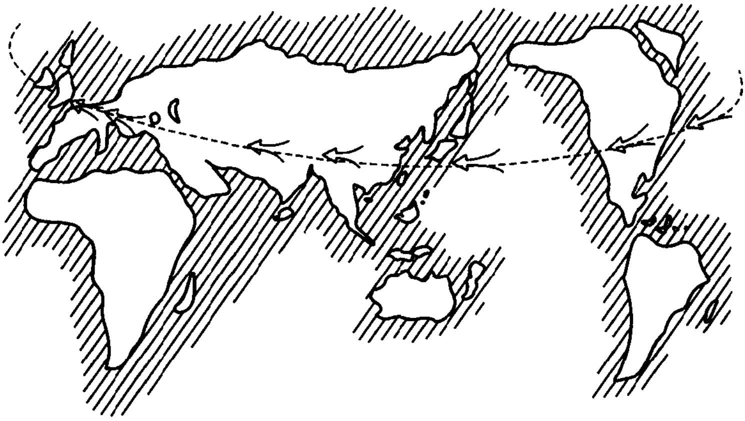

图 2.1

如图 2.1 所示，在古代(公元 5 世纪以前) 数学发展的中心地带在东地中海岸的希腊、埃及、巴比伦以及阿拉伯、印度、中国等地区，主要特点是希腊的三角学、埃及的平面几何、巴比伦的初等代数和中、印的算术等.在中世纪时期(公元 6 ～ 15 世纪)因宗教桎梏，整个科学进入黑暗期(特别是 6 ～ 11 世纪)，仅有一些自发性的发展.相对起来这时的数学中心地带已移至中欧和西欧如意、法、奥等地，主要贡献在初等代数上，如三次、四次方程求根公式(意)和韦达定理(法)的发现即是；在近代(16 世纪以后)，数学中心进一步西移，主要地区在波、德、法、西、英等国，主要贡献如微积分(英、德)、对数(英)、解析几何(法)等等.可是在近现代(上世纪末以来)，数学经过了源于西欧的数学爆炸性发展后，其中心于本世纪初开始横渡大西洋移到了美国.不过自近代以来，与其说是中心的西移，倒不如说是中心的西扩，比如在近代以来可以说西欧和美国都属于中心区.特别在现代(20 世纪 60 年代以来)，这个中心区更加西扩到了日本乃至东亚和东南亚.

总之，从地图上可看出，在两千多年的数学史中，数学中心自中、印、巴比伦、希腊乃至中欧、西欧、美国、日本、东南亚，自东向西移动和扩展，最终成为一个基本上落在北纬 30° ~ 40°(仅北欧超出一点)内的封闭环带，这似乎是个奇迹现象.

还要看到，数学中心扩展的这一历史特征和地理特征皆与整个科学发展中心以及经济发展中心的迁移特征相吻合，当然这不是偶然的.

三、数学史的几个重要阶段

1. 公元前 6 ~ 3 世纪

此期内在当时的数学最中心希腊，发生了如下几件对整个数学史起着重要影响的事件.

(1) 毕达哥拉斯学派. 首先是，他的学派可算是数学史上时间最早(前 580 ~ 500 左右)，规模最大的学派.其次是毕氏犯了个有理数错误. 他误认为任二线段间皆可公比，亦即认为任一线段长皆为有理数，实则认为数只有有理数. 由此产生了数学上第一次危机. 对数学和哲学产生了一次大的推动；第三点是毕氏对黄金分割的深刻研究和运用. 黄金分割是在整个数学史中，直到本世纪的应用数学优化理论中，都还起着重要作用的一个数学成果.最后，大家都熟悉，毕氏也独立地发现了勾股定理.

(2)欧几里得. 欧氏是毕氏学派的继承者，他对数学史的最大贡献是撰著了《几何原本》. 原本的最大特色是创造了公理化方法. 这是吸取了毕达哥拉斯错误的教训而提出来的. 公理化方法发展至今，对数学起着基础性的作用，留待下节进一步讨论. 此外《原本》使得人们把凡是满足它的五大公理，五大公设的几何学都叫做欧氏几何学，把推广物理空间所成的 n 维直角坐标系表示的空间（满足欧氏公理者）叫做欧氏空间

(3)哲学家芝诺(Zero，元前 5 世纪)提出‘ 芝诺悖论 ’(简单说他提出诡辩“ 飞矢不达的，静矢不起飞 ”，或说‘ 走神亚其尔追不上乌龟 ’悖论)，一般认为由此引起了数学的第二次危机. 它标志着数学对“ 无穷小 ”考虑的第一次深入，不过这一危机的真正受到重视是在 2000 年后

发明了微积分时. 有趣的是芝诺悖论至今可以说还没有得到公认的解决(十一章将进一步谈到).

(4) 产生了几何学三大世界难题：用圆规和无刻度直尺画圆为方，三等分任一角,倍立方体等之不可能(皆已得证),它们是产生高等几何(19 世纪,以射影几何为代表的推广欧氏空间的几何)的先驱思想.

2. 公元 17世纪 产生了高等数学

17 世纪发生了如下几大重要事件，使得它堪称高等数学的世纪，或叫做近代数学的开端. 简单说来就是(依时间顺序)：

(1) 开普勒天体三大定律的发现(1601 ～ 1619 年). 可以说是三大定律开创和推动了堪称应用数学分支的天体力学和天文学的发展，因而也是推动了数学的发展. 这三大定律就是

- 太阳的行星沿着以太阳为一焦点的椭圆轨道运行.
- 连接行星与太阳的"矢径"在相等时间内扫过相等面积.
- 行星运行的周期平方与该轨道的半长轴成正比.

(2) 内比尔发明了对数(1613 年). 可以说，在积分学中没有对数(自然对数)是无法进行的,比如 $dy = ydx$ 这样一个极简单的微分方程,如果没有对数概念就表不出它的原函数(积分式)来. 可见对数的发明是直接为着高等数学的诞生作准备的.

(3) 笛卡儿发明了直角坐标系(1619 年). 据说是 1619 年 11 月 10 日笛卡儿的一个祥梦产生了直角坐标系,又叫笛卡儿坐标,从而产生了解析几何学 —— 高等数学的三大基础之一，产生了坐标系下的函数讨论,产生了"活"的数学. 因此说笛卡儿坐标标志着数学进入新的时代.

(4)微积分的发明(17 世纪 70 年代). 是牛顿和莱布尼茨分别从不同出发点独立而同时期地发明了微积分学. 微积分学在整个数学中的地位已不用任何人宣传解释. 但反过来,真要说透微积分在数学中的地位和作用也是难的.

(5) 从应用数学角度,不能不承认牛顿的《自然哲学的数学原理》(1687 年) 也是推动近代数学的一大动力. 因为已公认《原理》是整个自然科学的奠基性巨著，特别是其中提出的运动学三大定律和万有引力定律也直接丰富了数学、一般力学和天体力学的研究

(6)数论的成熟(17世纪末).数论是数学中一门特殊学科,它的产生很早,成熟也早,但至今仍然是一门活跃而"年轻"的学科,数论问题吸引力强,似乎很容易进,但"易进不易出",因为它要求的技巧性很高,不易出成果.先后发生在17世纪末至18世纪初的世界三大难题费马问题、哥德巴赫问题、华林问题,使数论成为一门独立的数学学科.所谓"独立的数学学科"一般指它能依赖自身内部的问题推动其发展,正如点燃了的柴禾、引爆了的核弹一样.

也许会认为数论不过是玩整数游戏，与数学的现代化没多大关系.其实不然,就以三大难题来说,不仅因为其难度和吸引力而增强了数学的知名度,也因为解决它们必须在现有数学基础上进行再创造,产生新的突破，从而推动了数学和科学的发展.19世纪末解决华林问题(希尔伯特）是如此,1994年解决费马问题(A·怀尔斯),也是如此.至于哥德巴赫问题,虽已有过很多突破性创造,其方法已广泛用于其它分支,却仍有所谓"1+1问题"至今还没有解决的希望.

3. 公元19世纪产生了纯数学

19世纪最大的特征是其后半叶产生了数学的爆炸性发展，从而产生了纯数学,使得数学从此明显地分作纯数学和应用数学两大营垒,这是19世纪以前不曾有过的，因此这也是现代数学的本质特征之一.①

酝酿并产生19世纪后半叶数学大爆炸发展的主要因素和形势特征是

(1)在1820年证明了5次和5次以上代数方程不可解（不可一般地用有限形式表出根来)的同时提出了"群"的概念.从而产生了群论,为近世代数的诞生奠定了基础.

(2)1822年Fourier(法)以其"热传导解析理论"一文创造了傅里叶分析,成为数学分析的支柱性方法之一,更是应用数学一个重要的基础理论.

(3) 非欧几何的产生.具体说是1826年产生了罗巴切夫斯基几何、

①目前倾向于把"现代数学"时期定义为19世纪后半叶以来的数学时期，实则近现代数学 物理学称本世纪以来为现代 通有科学一般称60年代或二战以来为现代.其中现代数学时期如此划分的原因在于百多年来的数学特征主要还是来自于这次"爆炸".

1854年产生了黎曼几何，它们都是改变了欧几里得几何的公设5(过直线外一点能且只能引一条平行线）而创造出的合逻辑而不合直观的几何学. 从而激发了人们新的“数学思维”观念.

(4)1873年,康托尔提出集合概念,从而产生了集合论. 集合论宣布了现代数学的开端（续见第三章).

(5)19世纪70年代产生了极限论,奠定了微积分学理论基础,结束了关于微积分学理论基础的整整两百年的争论，从而刺激了分析学的迅猛发展.

注. 这里不能不提到,产生于19世纪的几大应用数学模型，因为它们分别孕育了相应学科在20世纪内的突破性发展.这就是

• 经济学上一般均衡模型(1874年,参见拙著《数量经济学导论》1996年),由此兴起了一门数理经济学,经过整整八十年才得以证明均衡点的存在.此方向上产生了多位经济学诺贝尔奖获得者；

• 物理学上产生了熟知的麦克斯韦方程(1875年),它使得法拉第革命性地提出的场概念(1830年代)真正用上了数学,同时成为后来一系列场理论(如统一场、规范场)的基础,多种场方程都以它为特例,成为检验一个场模型是否成功的必要条件,同时随着场理论的发展,麦氏方程也被赋以多种形式,如积分形式、微分形式、坐标形式、向量形式和张量形式等,甚至其微分形式也有很多很多种,可见该模型之活力和重要性.

• 1834年英国水利官员Russel发现船头激起的浪沿岸边前进久久不息的现象,直到1895年终于形成所谓KDV模型：$u_t-6u\cdot u_x+u_{xxx}=0$,由此孕育了20世纪50年代以来一门热门学科‘孤立子理论’的发展,它在诸如激光、超导及整个凝聚态物理学等等方面有着光辉的应用前景.

(6) 正是纯数学的爆炸性发展趋势造成了纯数学与应用数学的分家，并且一度应用数学被排斥到冷落的地位. 数学家都热衷于纯数学，数学天才们都愿意投身‘数学象牙塔”甚至可说这一度成为一种思潮，这种思潮至到现代才逐渐平静下来.这里摘引一段笔者当年的日记：

数学“象牙塔”工程录：

数学象牙塔,既是实在的又是抽象的.既在现实的客观世界中,又在朦胧的高维空间里;塔里的能工巧匠们原本现实世界的人,由于兴趣、智慧和数学的引诱,进得塔来便到了另一天地,迷迷茫茫、无边无底.这里唯一的信仰是逻辑,唯一的向导是逻辑,唯一的准则还是逻辑.沿着逻辑的脉络,他们雕呀凿,偶尔也凿出一个通向世界的洞,这就是象牙塔的"窗",也是数学有用于现实世界的一个个希望之光.正是它们得以使数学家自信,得以使世上人叹服.

象牙塔是美的,但它是与世隔离的,只有通过窗孔才能与世连通、为世所用.要是没有窗孔,那就成了漆黑的世界,要是处处皆窗孔,那就没有了"塔"而被融合到世界中来了……

象牙塔是需要的,世界需要它不时通过窗孔为之引来逻辑的负熵,世界永远需要适量的天才投入象牙塔工程,但我不愿意,不仅因为我不是天才.

4. 公元20世纪:纯数学继续发展和应用数学的崛起.

(1) 纯数学(基础数学)的继续发展,主要表现为

(1.1) 在19世纪末数学知识剧烈膨胀的形势下,进入20世纪后,逐步形成了系列学科分支,如泛函分析、点集拓扑、近世代数等所谓新三高即是20世纪上半叶陆续形成的.此外如微分几何、高等几何、实变函数、复变函数、常微分方程、定性理论、特别是偏微分方程等学科也基本上都是20世纪上半叶才成熟起来的,至于代数拓扑、流形理论、现代微分几何、微分拓扑与非标准分析等等学科则更是20世纪内形成的了.

总之,我们可以看到:现代的数学专业人才所学到的专业数学大部分是20世纪内才形成的学科,即使非数学专业的人才也已接触过不少现代数学知识,且目前还正在加强这一方向的教改.

(1.2) 在康托尔艰辛创立的集合论(1873年)之下,人类对实数的认识更加深刻了,续见第三章.

(1.3) 也是在集合论(所产生的悖论)刺激下,产生了数学的寻根热(探索数学的基础),形成了"数学哲学"的三大学派:Brower为首的直觉主义(主张构造性证明)、希尔伯特为首的形式主义(主张存在性证