作 者 简 介

朱梧槚，男，1935年11月生，江苏宜兴人。1955年毕业于吉林大学数学系，同年留校任教。1957年被错划为右派，“文革”中又被害入狱十年，1978年底平反出狱，并被重新录用于南京大学数学系。1989年调南京航空航天大学计算机系任教，主要从事数学基础、数理逻辑与计算机科学理论等方向的研究。迄今个人或与人合作，发表论文114篇，出版著作7部，译著1部。1983年以来，与肖奚安教授共同创建和发展了中介系统。现任南航计算机科学研究所所长、教授。并应聘担任汕头大学顾问教授，大连理工大学、西南交通大学、南京大学、中国科学院等学府、学术机构的相关系、所、室的兼职教授、客座研究员或学术委员。主要的荣誉称号有：中国航空航天系统劳动模范、有突出贡献专家，全国优秀教师，国际名人传记协会终身荣誉会员。做人的原则是：“人品第一，学问第二。”主要的信条是：“战胜困难与厄运，唯有两件武器，一个高尚的目的和一个坚强的意志。”公认的外号有：“整不死”、“压不垮。”

南京大学出版社

数学基础概论

朱梧槚　肖奚安　编著

ESSENTIALS OF MATHEMATICAL FOUNDATION

数学基础概论

朱梧槚 肖奚安 编著

南京大学出版社

1996·南京

(苏)新登字 011 号

内容简介

全书分为五章，其中第一章讲几何基础与公理化方法，第二、三、四章讨论精确性经典数学的理论基础问题，其中包括集合论悖论的发现和种种解决方案，还有对数学基础诸学派的分析和评论，本书第五章是讨论模糊数学的理论基础问题，其中包括模糊数学的各种奠基方案。本书的几个附录主要是讨论中介系统中有关数学基础问题的研究题材，其中包括中介逻辑演算系统 ML 和中介公理集合论系统 MS。本书可作为计算机科学系和数学系的基础课教材，也可供理工科大学生、研究生、教师及数学工作者参考。在使用本书于教学过程中，较浅的第1—4章可供本科生用，而较深的第五章和几个附录可作为研究生教材。

数学基础概论

朱梧槚　肖奚安　编著

南京大学出版社出版
(南京大学校内　邮编　210093)
江苏省新华书店发行　丹阳市兴华印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 18.75　字数 484 千
1996 年 5 月第 1 版　1996 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—2000
ISBN 7-305-02938-6

O·203
定价：精装 26.00 元
　　　平装 24.00 元

责任编辑：新　平

(南大版图书若有印、装错误可向承印厂退换)

前　　言

1989 年初，我们共同拟订了一个写作计划，该计划的意义、目的和内容已详述于《数理逻辑引论》与《集合论导引》（即参考文献[8]与[9]）二书的前言中，请读者自行查阅，这里不再重述。但有一点不妨指出，这就是本书的撰写和出版，可谓标志着所说的那个写作计划的全部完成，其间历时七年之久，时间之所以拖得如此之长，其根本原因还是长年累月地陷于繁忙不堪的困境中，然而本书的出版，又为何在教学上能以拖这么长时间呢？原因在于 1987 年出版了《几何基础与数学基础》（即参考文献[5]，以下该书简称为[5]）一书，所以多年来就一直以[5]顶着使用，然而近年来已经到了再也拖不下去的境况，其中之真正原并不是[5]的库存已将耗尽，而是由于多年来关于模糊数学的奠基问题的深入研究和迅速发展，致使[5]的素材日益显得落后，直至难以真正概观‘数学基础’的研究现状。所以不能不重新写作‘数学基础’方面的论著了。当然，既成历史的素材是不能更动的，也正是这个原因，对于本书的写作，仍可谓是在[5]的基础上进行改写而成的，但也不是一般意义下的改写，而是一种作了相当大的更动和补充意义下的改写，其基情况如下：

（1）本书的书名是《数学基础概论》，因而对于几何基础的内容而言，一方面由于‘基础问题’与‘公理化方法’均始于几何基础，从而一本关于数学基础的著作，不能不论及几何基础；另一方面，又由于本书的主题是数学基础，从而在论及几何基础时，无论从深度和广度上，都不能与几何基础方面的专著同等看待，也不能像[5]那样，给几何基础的内容一个对等的地位。基于这样一个认识和前提，在本书中，我们将[5]中关于几何基础的 1—4 章浓缩

到仅占一章的篇幅，浓缩的原则是：立足于把几何基础之基本思想的来龙去脉和公理化方法的基本内容阐述清楚为止，尤其是对于那些欧氏或罗氏几何定理的证明与研究，则一概略去。

（2）在[5]中，关于数学基础的论述，计有5—9章和外加两个附录的篇幅。但在本书中，只取其中关于精确性经典数学奠基问题的核心内容，大致包括5、6、7三章，其余一概删去。如此，着眼于[5]的总体篇幅而言，本书大约从[5]中取材三分之一左右，又基于多年来使用[5]于教学的经验，我们又对取材于[5]的素材，在内容结构与陈述方式上作了种种调整、补充和修改，使之有所改善。

（3）在本书中，除了增补诸如无穷值逻辑悖论等内容外，特别增写了"关于模糊数学的理论基础问题"的第5章，内容涉及关于模糊数学的各种奠基方案，其中包括ZB公理集合论系统和中介数学系统。又因为模糊数学的奠基问题事实上成为建立与发展中介系统的重要背景之一，所以我们又把中介形式系统写在本书的几个附录之中，其中包括中介逻辑演算系统ML和中介公理集合论系统MS，如所知，有关MS的全部结果，曾于1988年以中、英两种文字发表在《中国科学》(详见文献[100]和[101])上，另外还有一部由南京大学、南京航空航天大学和广州大学联合出资印刷的论文集，显然，事过8年之后再来整理这些成果时，不发现其中的一些技术性疏忽是不可能的，我们在此均作了相应的改进，特别是其中有一个重要的不足之处，这就是当年对于MS与ZFC之间的关系的论述，在技术上颇不完善，后经博士生张东摩与肖奚安教授共同作了深入研究而得到改进，又经硕士生姜林根加以形式化，应该说，这是他们的研究成果。

就本书的内容和性质而言，既可谓是教材，又可谓是专著、因为一方面由于本书的写作是按教材的体例撰写，因而可以用于教学，其中较浅部分1—4章可作为本科生教材，其中较深部分第5章和全部附录可作为研究生的教材。另一方面，本书内容包括了

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

我们研究有关数学基础与中介系统的一系列成果，参考文献中也包括了我们较大数量的研究论文，因而本书也是我们沿着数学基础这一方向多年来的研究成果的一个总结，在这一意义下，本书实际上是一本专著。然而又切不可将本书误认为是一部关于中介系统方面的专著，因为就中介系统的发展现状而言，形式系统ML&MS虽为中介系统之核心，但却只是其中之一小块内容，详见附录一。

尽管本书的写作拖了数年之久，然而就其真实的写作过程而言，仍然是仓促成稿，其中疏忽与缺点在所难免，敬请读者和同行专家批评指正，以求改进和完善。

本书的写作，受到南京航空航天大学理学院名誉院长徐利治教授，南京航空航天大学校长朱剑英教授的大力支持和热情鼓励。又南京大学出版社社长时惠荣编审和编务室主任朱丹红为本书的出版给予了热情的帮助，还有蒋顺余副编审为编辑《数理逻辑引论》、《集合论导引》和《数学基础概论》等三本著作付出了辛勤的劳动，让我们在此一并致以诚挚的谢意。

最后还应指出，本书中属于我们的、相当多的研究成果，以及本书的写作，多年来，先后受到国家基础研究攀登计划《思维与智能模拟》项目、国家高技术研究发展计划863项目和南京大学计算机软件新技术国家重点实验室开放课题基金的资助，为此，我们也要对上述资助和支持我们的各个专家组致以深切的谢意。

朱梧槚　肖奚安

1995年11月于南京

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 几何基础

§1 Euclid 几何原本与第五公设问题

在公元前7世纪以前的所谓几何学，只限于一些具体问题的解答，并且是十分粗糙和单凭经验的，直到公元前7世纪以后，才进入希腊几何学家致力于几何的高峰时期. Euclid（约公元前330～275）是古代最大的几何学家之一. 由于他所编著的《几何原本》不仅集了前人之大成，而且用严格的逻辑演绎来系统地陈述这一学科的内容，从而在Euclid几何原本问世以后，就几乎湮没了在此以前的任何其他有关几何学的著作.

Euclid的几何原本，原说有15卷，后传说最后两卷是公元2世纪Hypsisles所著，直到近代才有人正式考证出来，第14卷是Hypsisles所续，第15卷又在公元3世纪时为其他几何学家所续. 因而今已公认Euclid几何原本只有13卷.

15世纪以后，印刷几何原本的版本甚多，现在一般公认Heiberg与Menge于1883—1889的版本是经过科学的整理而翻印的，认为是标准版本，据此版本. 第1卷开头是23个定义；诸如"点没有部分"、"线有长度没有宽度"、"线的界限是点"……等等. 在这些定义以后是引进公设和公理[注]，例如，其中第五个公设被陈述为："若两直线与第三条直线相交，其一侧的两个内角之和小于

[注] 历史上，人们曾提出区分公设与公理的原则，有一种原则认为：公理是算术与几何学所公用的，公设则仅为几何学所用. 又一种原则认为：公理本身十分自明，公设则不如公理那样自明，但也是不加证明就承认的. 现代公理论者则已概用公理一词来取代公设、公理而不加区分了.

两直角时，则把这两条直线向着该侧充分地延长后一定相交”。[注] 如此，所列出的一系列定义、公设和公理，都成为往后严格地陈述和论证每一条定理，直至形成一个演绎系统中所必不可少的根据。Euclid 算是第一个提出几何根据问题的人，并由此而使得他的事业受到人们的崇高评价。虽然，用现代数学的严谨观点来看几何原本的叙述，其中显然还有许多不严格的地方。但却不能忘记，几何原本曾经是两千多年间一直被公认为用严格的逻辑结构来叙述学科的典范。

对于几何原本中的不足之处，大致上可以概括为如下几点：(1) 有些定义的写法运用了一些它本身就应该定义的概念。(2) 有些定义是多余的。(3) 在有些定理的证明过程中，依靠了图形的直观，而这种直观自明性并未列入公理或公设中。

实际上，几何原本的某些不足之处，也早为古代学者所觉察。例如，Archimedes 为了严格陈述关于长度、面积和体积的测量理论，就曾对 Euclid 的公设表作过必要的扩充。人所共知的 Archimedes 公设(任给 $a>0$ 和 $b>0$，并且 $a<b$，则总有正整数 n，使有 $na>b$)便是其中一例，这也是测量几何的不可缺少的几何根据。从某种意义上也可以说，自从 Archimedes 以后，人们一直在努力完善几何原本的陈述。然而一直到 19 世纪末期，人们才第一次给出完备的公理系统，在这个系统中，可以不依靠任何其它空间直观的习惯性而推出所有的 Euclid 几何定理。这是德国大数学家 Hilbert 的贡献，他的著作《几何基础》一书把公理化方法推向了完善化阶段，因而该书被誉为划时代的巨著。

古代学者对几何原本中所列之诸定义、公设、公理的内容与文字表述略加比较以后，就觉察到其中(如上文所陈述之)第五公设的文字与内容显得最为复杂和累赘，远不如其它公设、公理那样自

[注] 在几何原本中对于公设或公理的基本地位的区分并没有说明，而且有些公理的归属问题的处理也不明确。例如，有些版本也把第五公设列为第十一公理，又 Clavins版本中列为十三公理等等。

明．因而古代学者们就怀疑地指出，第五公设是不是多余的？它能不能从其它公设、公理中逻辑地推导出来？这就是所谓的Euclid第五公设问题．不仅如此，古代学者们还进一步认为，Euclid之所以把它当作公设，只是因为他没有能给出这一命题的证明，以致大家认为把第五公设所述的这一命题当作不证自明之公设列出，乃是几何原本中的那些逻辑缺点中的一个主要缺点．致使多代学者们付出了巨大的精力去证明第五公设．几乎可以说在Euclid以后的两千多年时间里，难以发现一个没有试证过第五公设的大数学家．连Euclid本人在几何原本中也是直到第29个命题才开始应用第五公设，因而很可怀疑他也曾试证过它，至少他是尽可能地延迟，直到推车上壁时才应用了第五公设．历史上，所有试证第五公设的努力都失败了，在所有这些失败的“证明”中，或是最终发现证明有误，或是发现在证明过程中暗自使用了与第五公设相等价的命题．在这些失败的“证明”中，唯一引出的正面结果便是一批等价命题的发现．两千多年来，在试证第五公设过程中被发现的与之等价的命题甚多，我们不能也不必一一列出，只能举其一、二，陈述如下：

(1) 三角形内角和为二直角．即 $\Sigma(\Delta)=2d$．此处用 $\Sigma(\Delta)$ 表示任意三角形之三个内角之和，又 $d=\frac{\pi}{2}$．

(2) 普雷菲尔公理：过平面上已知直线外的一点，至多只能引一条直线平行于该已知直线．

“普雷菲尔(John Playfair, 1748—1891, 苏格兰人)在他校订的《几何原本》(1795年在爱丁堡出版)中采用了一条很好的公理：‘过线外一点，只能作一直线与已知直线平行．’(或‘相交二直线不能同时平行第三线’．)这一公理，比第五公设简单明了，所以受到普遍欢迎，被采用在现今的教科书中，称为普雷菲尔公理”．[1]

(3) 锐角命题：存在一锐角，在其某一边上任一点引它的垂线，必与该锐角的另一边有交点．

在这里，我们要提到 Saccheri 和 Lambert 的工作。因为“萨凯里(Girolamo Saccheri，1667—1733，米兰的神父)对平行公理作了有价值的贡献，可说是非欧几何的先驱”。[1]“兰伯特(Johann Heinrich Lambert，1728—1777)在1766年发表的《平行线论》也有和萨凯里类似的研究”[1]。

如图(1.1)所示，Saccheri 从讨论四角形 $A'ABB'$ 出发，在这个四角形中，假定 $AA'=BB'$，又夹着 AB 边的两个内角都是直角，即 $\angle A=\angle B=\frac{\pi}{2}$，人们称该四角形 $A'ABB'$ 为 Saccheri 四角形，记为 $S_a^{\square}$，易证 $S_a^{\square}$ 中的另外两个内角是相等的，即 $\angle A'=\angle B'$，并称之谓 Saccheri 角，记为 $S_a^{\triangle}$。可以证明下述结论：

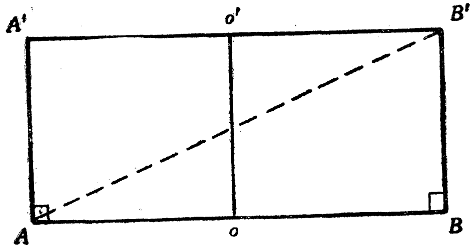

图 (1.1)

(4) $S_a^{\triangle}=d$，当且仅当第五公设成立。

又如图(1.2)所示，Lambert 从讨论四角形 $ABCD$ 出发，在这个四角形中，有三个内角被假定为直角，即 $\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{2}$，我们把这种四角形叫做Lambert四角形，记为 $L_a^{\square}$，又把 $L_a^{\square}$ 中那个没有假定为直角的内角叫做 Lambert 角，并记为 $L_a^{\triangle}$。可以证明下述结论：

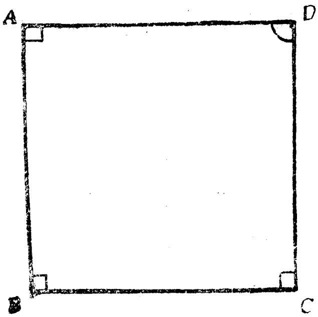

图 (1.2)

(5) $L_a^{\triangle}=d$，当且仅当第五公设成立。

如所知，对于$\Sigma(\Delta)$，有且仅有$\Sigma(\Delta)>2d$，$\Sigma(\Delta)=2d$，$\Sigma(\Delta)<2d$三种可能情形，对于$S_a^{\triangle}$和$L_a^{\triangle}$也是一样，即要么$S_a^{\triangle}>d$，$L_a^{\triangle}>0$，要么$S_a^{\triangle}=d$，$L_a^{\triangle}=d$，要么$S_a^{\triangle}<d$，$L_a^{\triangle}<d$。人们不仅证得如上(1)、(4)、(5)所示，$\Sigma(\Delta)=2d$，$S_a^{\triangle}=d$、$L_a^{\triangle}=d$三者均与第五公设等价，而且易见$\Sigma(\Delta)>2d$、$S_a^{\triangle}>d$、$L_a^{\triangle}>d$三者均不得成立，因而只要不以第五公设为基础得以否定$\Sigma(\Delta)<2d$、$S_a^{\triangle}<d$、$L_a^{\triangle}<d$三者之一，则就算是完全解决了第五公设问题，即就算是从几何原本中之其它公设、公理中逻辑地导出了第五公设。历史上，人们都曾想用反证法来达到这个目的。如所知，Legendre、Saccheri、Lambert分别依次想从$\Sigma(\Delta)<2d$、$S_h^{\triangle}<d$、$L_a^{\triangle}<d$的假设下引出矛盾来。然而，他们虽然在各自所设的前提下深入地进行推导和演绎，直到引出了相当复杂的几何系统，但除了在各自的系统中获得许多矛盾于直观感觉的古怪命题外，始终没有引出两个在逻辑上互相排斥的命题。应当指出，Lambert在当时来说，他的几何观点是最先进的，工作也推进得最远。他不仅从来没有在他的著作里声称过他已经证明了第五公设，而且“他认识到任何一组假设如果不导致矛盾的话，一定提供一种可能的几何。这种几何是一种真的逻辑结构，虽然它或许对真实的图形作用很少，后者或可提示一种特别的几何，但不能限制逻辑上可能发展的千差万别的几何”。[2]由此可见，Saccheri和Lambert不愧为非欧几何的先驱者了。

§2 Лобачевский的信念和品质

虽说Euclid几何原本在其逻辑结构上的那些真正缺点和上节所提到的第五公设这个“缺点”，早为古代学者所觉察，而且在两千多年的漫长岁月里，学者们是如此不遗余力地去修正这些缺点和“缺点”，借以完善几何原本的陈述，但在另一方面，却又毫不影响人们始终坚信Euclid几何是现实空间的正确抽象。

"很多人确实说出了绝对信任 Euclid 几何为真理的话。例如 Isaac Barrow 把他的数学包括微积分在内都建立在几何基础之上，对几何的肯定性列举了八项理由：概念清晰，定义明确，公理直观可靠而且普遍成立，公设清楚可信且易于想象，公理数目少，引出量的方式易于接受，证明顺序自然，避免未知事物。

Barrow 确曾提出问题：何以确知几何原理可应用于自然界？其回答是，这些原理来自内在理性。感觉到的事物只是起了唤醒它们的作用。再者几何原理早为长期经验所不断证实。并将继续如此，因为上帝创造的世界是万古不易的。于是几何是完备的与肯定无疑的科学"。[2]

直到 17 世纪末叶和整个 18 世纪时期，除了个别学者（也只限于作为怀疑论者的哲学观点而认为，几何的定律也和宇宙间一切事物不会有它一定的法则那样，未必是物理的真理）以外，几乎所有的哲学家和数学家都认为 Euclid 几何定律是绝对真理，甚至 Hegel 也指出：初等几何就 Euclid 所遗留给我们的内容而言，已经可以视为相当完备了，不可能再有更多的进展。应当指出，最有代表性的是 Kant，他把 Euclid 几何看成是关于空间的绝对真理，即所谓先验的综合判断。作为 Kant 的同时代的学者们，也几乎全都同意 Kant 的观点。这就是说，不仅整个 18 世纪时期，直到 19 世纪初叶，Euclid几何是绝对真理的观点一直笼罩着整个学术界。

但是正反的历史经验总会在一些先进人物的头脑中首先引起反响，迫使他们起来反抗传统观念的束缚，寻找新的出路。基于两千多年来，在求证第五公设的征途上屡遭失败的教训，19世纪俄国的年轻数学家 Лобачевский 产生了与前人完全不同的信念。他首先认为第五公设不能从其余的几何公理、公设中逻辑地推导出来，就是说第五公设与其它几何公设、公理是相互独立而不是逻辑相关的。其次，除掉第五公设成立的 Euclid 几何之外，还可以有第五公设不成立的其它几何系统存在，就是说 Euclid 几何并不是唯

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com