

打开这本书，我就带你到数学的花园里去漫步。

你已经学习了不少数学知识。这些知识都在数学花园的大门口，或者在进门不远的地方。这些地方已经修起了许多美丽的花坛花棚，盖起了许多高楼大厦。你学过的数学知识，是这些建筑的基础。

这一次，让我们尽可能走得远一些，去观赏一下数学花园里的新景色！

数学的花园很大，分成许多地区，叫做数学的分支。你学习的代数、几何，就是数学的分支。每一个分支，又分成许多小的分支。不论大的分支，小的分支，几乎都有我们的同胞在工作；有的分支，还留下了我们祖先深深的脚印。你一定想知道，这些能工巧匠在那里干些什么。

他们在锄地，灌水，栽花。他们在维修、改建和新建一座座精美的建筑。

你看陈景润，正在哥德巴赫猜想的塔边，研究着怎样把塔尖放上去。杨乐和张广厚，来到函数论大楼的阳台上，在那里布置了鲜艳的花草，使这座古老的建筑显得青春焕发。还有许多你不认识的人，他们在做着你没有听说过的事情。

随我一路走过去吧！各种各样的景色会引起你的喜爱和关心。

新奇的问题层出不穷，每一个分支里都有它独特的问题。有的你一眼就能看出它的实用价值；有的你会感到它是严肃的理论研究；有的你会觉得它是有趣的智力测验；有的还可能和你平时的看法不一致。

这些问题，在它们自己的分支里都是有资格的代表。

为了解决这些问题，人们已经花费了许多的时间和精力。他们反复琢磨，有的提出了新的观点和思想，有的想到了新的方法和技巧。

看看他们的成绩，听听他们的议论，你就可以接触到现代数学的脉搏，它是在怎样跳动着。

希望你不要满足于看看而已。

每当遇到一个新的问题，你应当想一想，这是一个什么性质的问题，你能解决它吗？

每当听到一种新的思想，你应当想一想，这种思想的本质是什么，对你有没有启发？

每当看到一种新的方法，你应当想一想，这种方法妙在哪里，你能用来解决其他问题吗？

不然的话，你会入宝山而空回。





## 1 数数问题



谁不会数数？这也算个问题？

当然罗，人有几个手指，屋子里有几把椅子，这谁也会数。

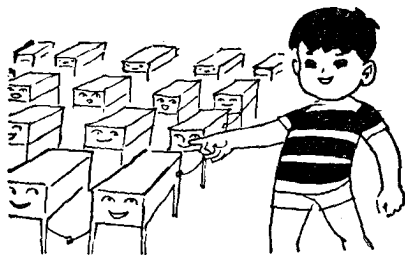
但是也有一些数，不能靠“一、二、三……”这样简单的办法去数。

比如中国有九亿七千多万人，如果一、二、三……这样地数，就算一秒钟数两个，一天二十四

小时不停地数，也只能数  $24 \times 60 \times 60 \times 2 = 172800$  个，一年数  $172800 \times 365 = 63072000$  个，也就是六千三百万多一点。九亿七千多万个就要数十五年还不止。在这个时间内，不知有多少人死去，多少人出生，怎么数得清呢？

又比如教室里有多少座位，我们一般不是一个一个地数，而是数数有多少排，每一排有多少个座位，然后用乘法来计算。

有一些数字很大，又只需要一个比较粗略的近似值，这时



候，我们就要利用种种的办法进行估计。一本书有多少字？大体上可以用页数乘上每页的行数，再乘上每行的字数来估计。

不过，即使是估计，有时候也需要认真思考，才能找到一个切实可行的好办法。

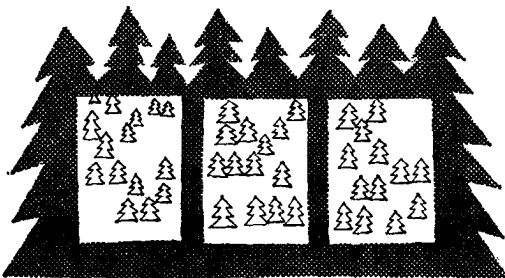
例如，你头上有多少根头发？

据说，人的头发有几十万根之多，当然不可能一根一根地去数。你想用乘法来计算，可是头发不是成行成垅、整整齐齐地排好的。

一种切实可行的办法，是测量一下长着头发的皮肤面积有多大，再数一数一个平方厘米的头皮上有多少根头发，这是可以数得清的。

当然罗，头上这一平方厘米和那一平方厘米的头发可能不一样多。我们可以仔细观察一下，选有代表性的一个平方厘米。

数头发并不重要，数森林中的树有多少棵，可是一件重要的事。这两个问题十分相似，可以用相同的办法去解决。



但是，森林中的树木长得有稀有密，我们很难走遍整个林区，来挑选一块最典型的地方。这怎么办呢？

最好的办法是任意挑选若干块地方，分别计算，然后求出平均数来。数学的研究说明，平均数总是更加接近实际。

研究这类问题的数学叫做数理统计。这是现代数学中一个非常活跃的分支。这里用的方法，叫做抽样方法。

我们再举一个例子，来说明数理统计的用途。

水库里养了鱼，每年要捕捉一些供应市场需要，爱吃鱼的人很多，最好多捕一些。捕得太多了，剩得就太少，会影响鱼的繁殖，明年就捕不到多少鱼了。

为了掌握好捕鱼的数量，就需要知道水库里到底有多少鱼。这个问题看来和上面的问题很相象，其实要困难得多。因为鱼是游来游去的，而我们也不好选出一平方米水面，来数一数下面有多少鱼。

渔业人员想出了一个巧妙的办法，他们捕上一千条鱼，给每条鱼都做上记号，比如在尾巴上剪去一个小角，然后放回水中。

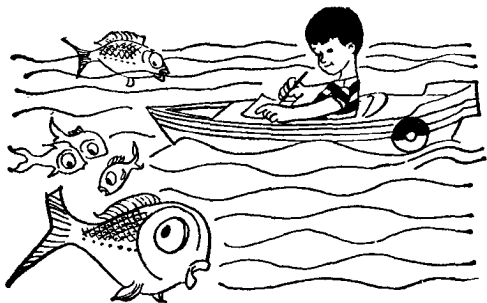
鱼儿到了水里就四散游开去。过了几天，这些鱼均匀地散布在水库的各个地方了。

渔业人员再捕上一千条鱼，一看，其中有二十条是做过记号的。

他们想 如果水库中共有  $X$  条鱼，其中有一千条被我们做过记号 那么 做过记号的鱼占全部  $X$  条鱼的几分之几呢？当然是  $\frac{1000}{X}$  了。现在捕了一千条鱼，其中有二十条做过记号，也就是说 在这一千条鱼中 有记号的鱼占  $\frac{20}{1000} = \frac{1}{50}$ 。这个比和前面那个比的值 大体上应该是一样的。所以  $\frac{1000}{X} \approx \frac{1}{50}$ 。这样一来 就计算出  $X \approx 50000$  了。

五万条鱼 今年捕上三四万条 大概没问题吧！

这个问题，简直象一个简单的比例问题，其实不然。你也去那里捕一千条鱼，数数有几条是做过记号的，你敢保证也是二十条吗？不敢吧！



实际情况必然是这样，每捕一千条鱼，其中做过记号的鱼的数目，不会是一成不变的。

比如说，你捕的一千条鱼中有二十五条是做过记号的，你列出的方程就会是  $\frac{25}{1000} \approx \frac{1000}{X}$ ，算出的结果是  $X \approx 40000$  比刚才算的少了一万条。那么，水库里到底有多少鱼呢？

数理统计可以帮助我们解决这个问题。它告诉我们，在后捕上来的一千条鱼中有多少条做过记号，数目虽然不是固定的，而是可变的，但是有一定的变化的规律。一旦掌握了这个变化的规律，我们不但可以用比例的办法来估计出水库中的鱼的总数，而且可以掌握这个估计会有多大的误差。数理统计还可以给我们提出一些更好的办法，来帮助我们尽可能地减少这种误差。

这样，就在数理统计的基础上，发展出一整套调查动植物资源和研究许多其他问题的方法。



## 2 关于考试的话



考试成绩公布了，大家都很关心。

考试得分多，固然好，得分少，也不必太难受。因为考试是对某一阶段教学的检查，不但检查学生学得好不好，也检查老师教得好不好。不好怎么办呢？学生得想法子改进学习方法，老师也得想法子改进教学方法。

还有个问题，考试能不能真正反映教学的成绩，还得看出

题的人的水平。

我们请出题的人出两份性质一样的题，让五十个学生重复考两次。如果出题的人水平很高，出的题目确实能够考出学生的学习成绩来，那么，每个学生在两次考试中得的分数应该基本相同。

说基本相同，就是不能绝对化。考分有偶然的成分。一个考九十分的学生，不一定比考九十五分的学生差；在另一次考试中，他们俩的考分很可能调个个儿。但是无论如何，如果两份题性质一样，每个学生的两个考分应该是接近的。

我们把两次考试的成绩做一个统计：

第二次 第一次	98	95	92	89	86	83	80	77	74	71	68	65	62
	100	97	94	91	88	85	82	79	76	73	70	67	64
98—100	2	1											
95—97	1	4	2										
92—94	1	2	1										
89—91		1	1	1	1	1			1				
86—88				3	1	1	1				1		
83—85				1	1	2							
80—82					2	2							
77—79										1			
74—76							1	1	1				
71—73							1			2	2		
68—70									1				
65—67								1		1			
62—64									1				2

当然罗，其中也有个别例外，比如有一个同学第一次考试分数在 86-88 之间，第二次却跑到 68-70 之间去了。这可以算做一种偶然的情况。

这是五十个学生在两次考试中的成绩统计表。两份考题的性质是一样的。箭头指出的“2”是两个学生在第一次考试中得了 80-82 分，在第二次考试中得了 86-88 分，这表示两次考分的关系是很密切的。用数理统计的方法，可以算出两次考分的相关系数高达 0.96。也可以说，出题人的水平是 96 分。

考试成绩还可以说明更多的问题。比如说，这次考试是十个题，每题十分，那我们还可以列出一个每个人每道题得了多少分的表：

姓名	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分
甲	10	10	10	10	10	8	8	10	10	8	94
乙	8	4	10	2	0	0	10	10	10	8	62
丙	10	6	10	0	5	10	8	10	6	6	71
.....	.....										.....
平均	9.6	7.4	9.8	4.8	5.5	7.7	8.9	9.8	9.6	6.6	80.7

这张表说明：第四题和第五题，同学们掌握得不太好，是学习的弱点所在；第三题和第八题，同学们基本上都答对了，可见掌握得都不错。如果这是物理考试，而四五两题都是有关电学的，那么，今后应该加强电学方面的教学。

这种表是分析考卷的时候经常要用到的。根据是什么呢？就因为平均数最能反应一般情况。

当然罗，这样分析还嫌粗糙，因为一般考试题都带点儿综合性。还得把综合的东西分解开来，再作进一步的分析。

现代的数理统计，提出了许多很好的方法，来处理这些问题。比如说，用因子分析和群分析的方法，我们可以从上面的表中，找出主要是哪些因素影响了学生的成绩：是掌握概念的程度吗？是灵活运用公式的能力吗？是逻辑推理的能力吗？还有没有其他未知的因素呢？

经过这样的分析，把一次考试说明的问题充分发掘出来，分数才能发挥它对改进教学方法、提高教学质量的指示作用。

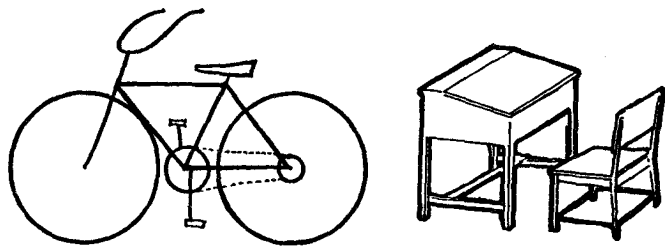
人们在日常工作和生活中，常常可以得到大量的数据资料。用数理统计的方法整理和研究这些资料，可以得到许多有指导意义的结论。因此，数理统计在近年来发展很快，应用范围正在不断扩大。



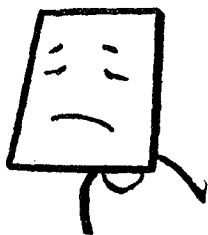
### 3 地图上的数学

几何学研究图形的性质。

自行车、课桌和形形色色的机器、车辆以及用具等，都是工业产品。在设计的时候，人们总是尽可能地采用直线、圆、三角形、四边形等简单的几何图形，为的是便于加工和配套，便于使用和修理。

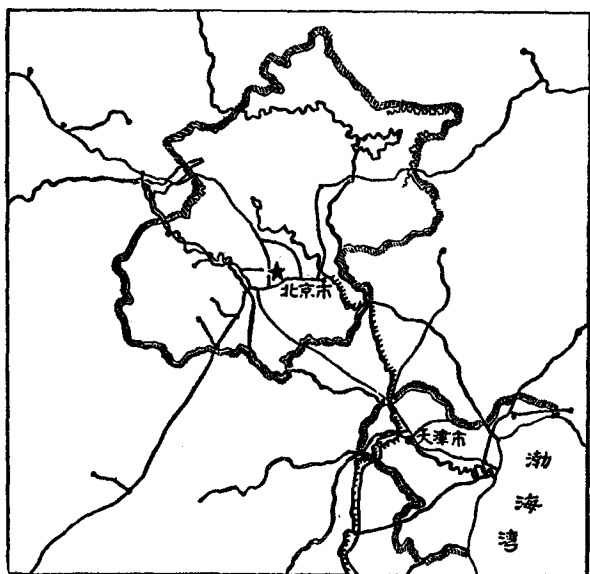


自然形成的东西，形状往往要复杂得多。我们常常说某人是四方脸或者圆脸，那只是一个大概的轮廓罢了。如果某人的脸真是一个端端正正的正方形，或者是一个浑圆的圆形，那会把人吓得毛骨悚然的。



自然界里的东西，都不会是又整齐又简单的图形，所以几何学不能只研究简单的几何图形。





我们翻开一本地图来看一看，地图上就充满了各种各样的复杂的图形，最主要的是曲线。比如北京到天津的铁路是一段曲线，北京市的边界是一条首尾相连的曲线。

大家都知道，量直线的长度可以用直尺，量曲线的长度却没有“曲尺”。曲线的形状千变万化，没有一种曲尺可以对付各种不同的曲线。

有一个办法可以量天津到北京的铁路线有多长，就是用一根细线顺铁路线摆好；用笔在线上做两个记号，表示北京和天津的位置；然后把线拉直，用直尺量出两个记号之间的距离。

这个方法很不方便，而且效果很差，不信你就试试。要使细线正好摆在铁路线上就很困难，如果反复做几次还会发现，各次量得的结果相差很大。

有个比较好的办法：找一个两支脚都是铁针的圆规，把两支脚张开到一厘米，使圆规的一支脚放在天津的位置上，另一支脚落到铁路线的一点上。以这个点为中心，旋转圆规，使原来放在天津的位置上的那支脚，落到铁路线的另一点上。这样一步一步地前进，直到圆规的一支脚落到北京的位置上。你记住了圆规走了几步，就知道铁路线的长度是多少厘米了。如果稍微差一点，相应增减一点就行了。



当然，也可以把圆规的两支脚张开得小一些，比如说 0.5 厘米 或者 0.3 厘米，量出来的距离就更准确一些。这是什么道理呢？请看下一页上的图。

如果圆规两支脚张开的距离是一厘米，用来量图上 AB 这一段曲线，一共走了五步，分别经过 C、D、E、F 各点。那么我们可以说，AB 这段曲线的长是五厘米。

但是仔细一看图，就知道这个数目并不正确。比如从 A 到 C 之间的直线 和 A 到 C 之间的曲线并不重合，还离得比较