数学分析
学习指导书

上　　册

吴良森　毛羽辉
韩士安　吴　畏　编著

高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内容提要

本书是与华东师范大学数学系编《数学分析》(第三版,上册)配套的学习指导书,主要是作为学习本课程的课后复习和提高之用。本书按节编写,每节包含:内容提要、释疑解惑、范例解析、习题选解,每章后附有总练习题提示和解答(解答部分约占50%)及测试题。本书切合实际,注意提高学生对数学分析基本概念、基本定理、基本计算技巧的理解和应用,可作为师范院校或其他类型数学专业学生使用,对教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习指导书.上册 吴良森等编著.—北京:高等教育出版社,2004.8
ISBN 7-04-014363-1

Ⅰ.数… Ⅱ.吴… Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第063573号

策划编辑 李 蕊 责任编辑 舒敬江 封面设计 于文燕
责任绘图 吴文信 版式设计 张 岚 责任校对 尤 静
责任印制

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷

开 本 787×960 1/16
印 张 24.5
字 数 460 000

版 次 年 月第1版
印 次 年 月第 次印刷
定 价 28.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前　言

数学分析是高等院校数学专业和应用数学专业的一门重要基础课程。本书是与华东师范大学数学系编的《数学分析》第三版(上、下册)相配套的学习指导书,主要是作为学习数学分析课程的学生课后复习与提高之用,并希望对任课教师也有参考价值。

本书按节编写,每节内容包括如下四部分:

一、内容提要　陈述每节中的基本概念,重要定理、公式及要点与难点分析。

二、释疑解惑　通过一系列问题与解答,用以解释数学分析学习过程中的某些疑难问题。主要包括对课程中某些较难概念的理解;重要定理的条件分析和使用要领;典型方法和技巧的总结;对某些似是而非的论断的辨析。

三、范例解析　在每节中选择 5～8 个中等和中等以上难度的例题(一般按难易程度排序),通过分析、求解和注释,介绍与该例题有关的典型解题方法和计算技巧,也适度地引入一些物理和其他应用实例。认真钻研这部分内容,对读者掌握基本要求、提高分析和解决问题的能力会有实质性的帮助。

四、习题选解(也有的节略去了这一部分)　对每节中较难的习题给出适当提示或解答。希望读者能正确对待这部分内容,坚持"先做后看"的原则,才能取得事半功倍的效果。

对每章末的总练习题,同样为难度较高的部分习题给出了提示或解答。

本书在各章后设有测试题(分 A,B 两卷),作为学完各章内容后检测自己掌握知识的程度之用。在书末附有测试题的提示或解答。

在附录中,我们为读者选编了几套我校考研试题,并附解答。

本书分上、下两册,其中第一至第七章和第十三章由吴良森编写;第八至第十一章和第十六章由毛羽辉编写;第十二、十四、十五、十七、十八章由韩士安编写;第十九至第二十三章由吴畏编写;书末考研题由毛羽辉编撰。

编写过程中,由吴良森担任策划、组织工作,毛羽辉和吴良森分别阅读和修改了初稿,最后由毛羽辉整理全书。

高等教育出版社徐刚、王瑜、李蕊、舒敬江等同志对本书编写给予很大帮助,在此一并致谢。

本书承高等教育出版社文小西编审认真审改,提出宝贵的修改意见和建议,在此表示衷心感谢。

由于我们对编写学习指导书缺乏经验,因此难免有不足和错误之处,恳请同行和读者批评指正。

编　者

2004 年 2 月

目　录

第一章　实数集与函数 …… 1
§1　实数 …… 1
§2　数集·确界原理 …… 7
§3　函数概念 …… 12
§4　具有某些特性的函数 …… 17
总练习题提示与解答 …… 21
第一章测试题 …… 26
第二章　数列极限 …… 28
§1　数列极限概念 …… 28
§2　收敛数列的性质 …… 33
§3　数列极限存在的条件 …… 39
总练习题提示与解答 …… 46
第二章测试题 …… 50
第三章　函数极限 …… 52
§1　函数极限概念 …… 52
§2　函数极限的性质 …… 57
§3　函数极限存在的条件 …… 62
§4　两个重要的极限 …… 66
§5　无穷小量与无穷大量 …… 70
总练习题提示与解答 …… 77
第三章测试题 …… 83
第四章　函数的连续性 …… 86
§1　连续性概念 …… 86
§2　连续函数的性质 …… 91
§3　初等函数的连续性 …… 98
总练习题提示与解答 …… 102
第四章测试题 …… 105
第五章　导数和微分 …… 108
§1　导数的概念 …… 108

需要全本请访问 www.ertongbook.com

§2　求导法则 …… 116
§3　参变量函数的导数·高阶导数 …… 123
§4　微分 …… 131
总练习题提示与解答 …… 137
第五章测试题 …… 140
第六章　微分中值定理及其应用 …… 142
§1　拉格朗日中值定理和函数的单调性 …… 142
§2　柯西中值定理和不定式极限 …… 150
§3　泰勒公式 …… 158
§4　函数的极值与最大(小)值 …… 163
§5　函数的凸性与拐点 …… 169
§6　函数图像的讨论与方程的近似解 …… 175
总练习题提示与解答 …… 182
第六章测试题 …… 188
第七章　实数的完备性 …… 190
§1　关于实数集完备性的基本定理 …… 190
§2　闭区间上连续函数性质的证明 …… 194
* §3　上极限和下极限 …… 199
总练习题提示与解答 …… 203
第七章测试题 …… 205
第八章　不定积分 …… 207
§1　基本积分公式与换元积分法 …… 207
§2　分部积分法与有理函数的积分 …… 217
§3　三角函数有理式与简单无理式的积分 …… 227
总练习题提示与解答 …… 237
第八章测试题 …… 239
第九章　定积分 …… 241
§1　定积分概念与牛顿 - 莱布尼茨公式 …… 241
§2　可积条件 …… 250
§3　定积分的性质 …… 261
§4　微积分学基本定理·定积分计算(续) …… 274
总练习题提示与解答 …… 289
第九章测试题 …… 293
第十章　定积分的应用 …… 295

§1　平面图形的面积与立体的体积 …… 295
§2　平面曲线的弧长与旋转曲面的面积 …… 306
§3　定积分在物理中的某些应用 …… 318
第十章测试题 …… 331
第十一章　反常积分 …… 334
§1　反常积分概念及其性质 …… 334
§2　反常积分收敛判别 …… 345
总练习题提示与解答 …… 355
第十一章测试题 …… 358
测试题提示与解答 …… 360

第一章　实数集与函数

§1 实　数

一、内容提要

1° 在中学数学中已经知道实数包括有理数和无理数.有理数可用分数$\frac{p}{q}$(p,q为互质整数,$q\neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示.2是首先遇到的无理数,它与古希腊时期所发现的不可公度线段理论有直接联系,且可以表示为无限十进不循环小数.

实数的无限十进小数表示在人类实践活动中被普遍采用,我们是由无限十进小数表示出发来叙述实数理论的.

2° 若 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数,称有理数

$$x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为实数 x 的 n 位不足近似,而有理数

$$\text{珔}_n=x_n+\frac{1}{10^n}$$

称为 x 的 n 位过剩近似.

实数的无限十进小数理论的核心在于定义实数的四则运算,两个有限小数的四则运算可以从末位开始进行,但是两个无限十进小数的运算无法从末位开始.在定义过程中,实数的不足近似和过剩近似起了重要的作用,在教材上册第300页对无限十进小数的四则运算作了严格的定义.

在§2中证明确界原理时,下述命题将起重要的作用.

命题　设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$与 $y=b_0.b_1b_2\cdots$为两实数,则 $x>y$ 的等价条件是:存在正整数 n,使得

$$x_n>\text{珔}_n.$$

我们对上述命题作一个直观的解释:因为 x_n 当 n 增加时是递增的,即对任何 n,$x_{n+1}\geq x_n$,而珔$_n$是递减的,即对任何 n,珔$_{n+1}\leq$珔$_n$,于是 x_n-珔$_n$是递增的,而且随着 n 增大与 $x-y$ 越来越接近.若 $x-y>0$,则必定存在某个正整数 n,使得 $x_n>$珔$_n$,而且从这个 n 起不等式一直成立.

3° 在数学分析课程中不等式占有重要的地位,在后继课程中,某些不等式可以成为某个研究方向的基础.中学数学中的数学归纳法是证明某些不等式的重要工具,我们在本节范例中将举出这方面的应用,希望读者重视这类技巧.

二、释疑解惑

问题 1 为什么 2.001 与 2.000 999 9…表示同一实数?

答 因为

$$0.001 = \frac{1}{1\,000} = 3\times\frac{1}{3\,000} = 3\times 0.000\ 333\ 3\cdots$$
$$= 0.000\ 999\ 9\cdots,$$

于是 2.001 与 2.000 999 9…表示同一实数.为了实数的无限十进小数表示的唯一性,约定把 2.001 表示为 2.000 999 9….

问题 2 为什么有理数$\frac{p}{q}$(p, q 为互质的整数,$q\neq 0$)可以表示为无限十进循环小数?

答 不妨设有理数$\frac{p}{q}\in(0,1)$,$p<q$.由实数的阿基米德性可知:存在 a_1 和 r_1,使得

$$10p = a_1 q + r_1,\quad 0\leq a_1\leq 9,\quad 0\leq r_1\leq q-1,$$

(注:对 $10p, q$,(i) 若 $10p<q$,则 $a_1=0$,$r_1=10p$;(ii) 若 $10p=q$,则 $a_1=1$,$r_1=0$;(iii) 若 $10p>q$,由实数的阿基米德性,存在正整数 a_1,$0<a_1\leq 9$,使得$(a_1+1)q>10p$,$a_1 q\leq 10p$,于是 $r_1=10p-a_1 q$.)于是

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10q},\quad 0\leq\frac{r_1}{10q}<\frac{1}{10}.$$

同样成立

$$10r_1 = a_2 q + r_2,\quad 0\leq a_2\leq 9,\quad 0\leq r_2\leq q-1,$$

于是

$$\frac{r_1}{10q} = \frac{a_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 q},\quad 0\leq\frac{r_2}{10^2 q}<\frac{1}{10^2},$$
$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 q}.$$

重复以上步骤可得

$$\begin{aligned} &10p = a_1 q + r_1,\\ &10r_1 = a_2 q + r_2,\\ &\cdots\cdots\\ &10r_{n-1} = a_n q + r_n,\quad 0\leq a_n\leq 9,\quad 0\leq r_n\leq q-1, \end{aligned}\tag{1.1}$$

于是有

$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{r_n}{10^n q},0\leq\frac{r_n}{10^n q}<\frac{1}{10^n},$$

这样

$$\frac{p}{q}=0\ .a_1\ a_2\cdots a_n\cdots\ .$$

因为上述各式中的余数 r_n 为$\{0,1,2,\cdots,q-1\}$中某数,于是等式组(1.1)从某个 n 开始重复,即$\frac{p}{q}$是无限十进循环小数 .

三、范例解析

例 1 设 a,b 为任意实数,证明:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\ . \tag{1.2}$$

证 我们将从函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$的性质着手证明不等式 .

设 $f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$, $x>0$,若 $0<x_1<x_2$,则 $f(x_1)<f(x_2)$.

因为$|a+b|\leq|a|+|b|$,于是有

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leq\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}\ .\end{aligned}$$

□

例 2 利用数学归纳法证明二项式展开定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}, \tag{1.3}$$

其中 a,b 为任意实数, n 为正整数 .

证 $n=1$ 时,等式(1.3)显然是成立的 .设等式当 $n=m$ 时成立,即

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k},$$

当 $n=m+1$ 时,

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1}&=(a+b)(a+b)^m\\&=(a+b)\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k}\\&=\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^k b^{m-k+1}+\sum_{k=0}^{m}C_m^k a^{k+1} b^{m-k}\end{aligned}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k a^{k+1} b^{m-k} + a^{m+1}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^k b^{m-k+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^k b^{m-k+1} + a^{m+1}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) a^k b^{m+1-k} + a^{m+1}$$

$$= b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k} + a^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^k b^{m+1-k},$$

其中应用了组合公式 $C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$.于是由数学归纳法,二项式展开定理对任意正整数 n 成立 . □

注　证明中应用了数学归纳法 .本节在后面的例 3、例 5 中将应用它证明其他一些不等式,这是分析证明中常用的方法之一 .

例 3　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个实数, a_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 符号相同, 且 $a_i > -1$, 证明不等式

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n . \tag{1.4}$$

当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x$, $x > -1$ 时,成立伯努利(Bernoulli)不等式

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad (x > -1) \qquad n \in \mathbf{N}_+ . \tag{1.5}$$

证　$n = 1$ 时不等式(1.5)显然成立 .现设 $n = m$ 时不等式成立,即

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_m) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m ,$$

其中 a_i 符号相同且 $a_i > -1$ ($i = 1, 2, \cdots, m$) .

当 $n = m + 1$ 时,因为 $1 + a_{m+1} > 0$,利用 $n = m$ 时的不等式,有

$$\begin{aligned}
&(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_m)(1 + a_{m+1}) \\
&\geq (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m)(1 + a_{m+1}) \\
&= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) a_{m+1} \\
&\geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1} ,
\end{aligned}$$

其中最后不等式成立是由于 a_{m+1} 与 a_i ($i = 1, 2, \cdots, m$) 同号 .再在不等式(1.5)中令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = x$, $x > -1$, 则有伯努利不等式

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (x > -1) . \qquad \square$$

例 4　证明柯西(Cauchy)不等式: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为两组实数,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 . \tag{1.6}$$

证　本例中将应用中学数学中二次三项式恒正的判别式来完成证明 .

需要全本请访问 www.ertongbook.com

设 t 为任何实数, t 的二次三项式

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geq 0,$$

于是有

$$2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)^2-4\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leq 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)^2\leq\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 .$$ □

例 5 设 $p, n, m\in\mathbf{N}_+$. 证明:

(1) $b^m-a^m=(b-a)(b^{m-1}+b^{m-2}a+b^{m-3}a^2+\cdots+a^{m-1})$. (1.7)

(2) $n^p<\dfrac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}<(n+1)^p$. (1.8)

(3) 试用归纳法证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^p<\frac{n^{p+1}}{p+1}<\sum_{k=1}^{n}k^p .$$ (1.9)

证 (1) $(b-a)(b^{m-1}+b^{m-2}a+b^{m-3}a^2+\cdots+a^{m-1})$

$=b^m+b^{m-1}a+b^{m-2}a^2+\cdots+ba^{m-1}-$

$b^{m-1}a-b^{m-2}a^2-\cdots-ba^{m-1}-a^m$

$=b^m-a^m$.

(2) 在(1.7)中设 $b=n+1, a=n, m=p+1$, 有

$$(n+1)^{p+1}-n^{p+1}=(n+1)^p+(n+1)^{p-1}n+\cdots+n^p,$$

于是

$$(p+1)n^p<(n+1)^{p+1}-n^{p+1}<(p+1)(n+1)^p,$$

这样就证得

$$n^p<\frac{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}{p+1}<(n+1)^p .$$

(3) 易证 $n=2$ 时, 当 p 为正整数时,

$$1^p<\frac{2^{p+1}}{p+1}<1^p+2^p .$$

现设不等式(1.9)当 $n=m$ 时成立, 有

$$\sum_{k=1}^{m-1}k^p<\frac{m^{p+1}}{p+1}<\sum_{k=1}^{m}k^p,$$ (1.10)

当 $n=m+1$ 时, 由(1.8), (1.10)可得

$$\frac{(m+1)^{p+1}}{p+1}=\frac{(m+1)^{p+1}-m^{p+1}}{p+1}+\frac{m^{p+1}}{p+1}$$

$$< (m+1)^p + \sum_{k=1}^{m} k^p$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} k^p .$$

同样可证

$$\frac{(m+1)^{p+1}}{p+1} = \frac{(m+1)^{p+1} - m^{p+1}}{p+1} + \frac{m^{p+1}}{p+1}$$

$$\geq m^p + \sum_{k=1}^{m-1} k^p$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k^p .$$

于是不等式(1.9)当 $n = m+1$ 时也成立 . □

四、习题选解(教材上册第 4 页)

6. 设 a、b、$c \in \mathbf{R}_+$ ($\mathbf{R}_+$ 表示全体正实数集合) .证明:

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c| .$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证　利用根式有理化的方法,有

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}|$$

$$= \frac{|b+c||b-c|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\leq \frac{|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}} |b-c|$$

$$\leq |b-c| .$$ □

关于不等式的几何意义请读者通过画图自行解答 .

8. 设 p 为正整数 .证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 是无理数 .

证　用反证法 .假若 $\sqrt{p}$ 为有理数,设

$$\sqrt{p} = \frac{u}{v},\ u,\ v \text{ 为正整数,互质,且 } v \neq 0,$$

于是有 $p = \frac{u^2}{v^2}$.

一方面, p 为非平方数,故 $v^2 \neq 1$.另一方面,因 u 与 v 互质,故 u^2 与 v^2 也互质;但由 $u^2 = pv^2$, v^2 为 u^2 的一个整数因子,故必有 $v^2 = 1$,矛盾 .由此可见 $\sqrt{p}$ 为无理数 .

§2 数集·确界原理

一、内容提要

1° 邻域是数学分析中重要的基本概念.某点的邻域是与该点靠近的数的集合,它是今后描述极限概念的基本工具.

在无限区间记号$(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$中出现的$-\infty$与$+\infty$仅是常用的记号,它们并不表示具体的数.在数学分析课程范围内,不要把$+\infty$, $-\infty$,∞当作数来运算.

2° 有界集和无界集是本节中关键的概念.要熟练掌握验证某个数集 S 是有界集或无界集的方法,其中重要的是证明数 M 不是数集 S 的上界(或下界)的方法:

M 不是数集 S 的上(下)界 $\Leftrightarrow$ $\forall\, x_0 \in S$,使得 $x_0 > M$($x_0 < M$).要证 S 无上(下)界,只需证明任何数 M 都不是 S 的上(下)界就可以了(注意本节释疑解惑问题 2).读者掌握了这种技巧就容易了解如何验证确界的方法.

3° 确界是数学分析的基础严格化中的重要的概念.在初等数学中我们知道有限个数存在最大数和最小数,但是无限数集不一定有最大(小)数.例如:$S = (a, b)$是有界数集,但没有最大(小)数,但是 S 有最小上界 b 和最大下界 a.定义有界数集 S 的最小上界为 S 的上确界,最大下界为 S 的下确界,由此可见,上(下)确界是最大(小)数在无限数集情况下的推广.

确界概念有两种等价的叙述方法,以上确界为例:

设 S 是 $\mathbf{R}$ 中一个数集,若数 η 满足

(1) (i) 对一切 $x \in S$,有 $x \leq \eta$,即 η 是 S 的上界;
(ii) 对任何 $\alpha < \eta$,存在 $x_0 \in S$,使得 $x_0 > \alpha$,即 η 又是 S 的最小上界.

或

(2) (i) 对一切 $x \in S$,有 $x \leq \eta$,即 η 是 S 的上界;
(ii) 对任何 $\varepsilon > 0$,存在 $x_0 \in S$,使得 $x_0 > \eta - \varepsilon$,即 η 又是 S 的最小上界.

这两种定义是等价的.(2)中的 $\eta - \varepsilon$ 相当于(1)中的 α.在上述定义中可以限定 $\varepsilon < \varepsilon_0$,其中 ε_0 为充分小的正数.定义(2)在某些证明题中使用起来更方便些.

4° 确界原理:设 S 是非空数集,若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

确界原理是实数系完备性的几个等价定理中的一个.在不少数学分析教程中把它作为叙述实数理论的出发点.确界定理的证明中主要是构造区间列

$$n.n_1\ n_2\cdots n_k,\quad n.n_1\ n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k},\ k=1,2,\cdots,$$

使得每个区间的左端点 $n.n_1\ n_2\cdots n_k$ 不是数集 S 的上界,但是右端点 $n.n_1\ n_2\cdots n_k+\frac{1}{10^k}$ 是数集 S 的上界,而 $\eta=n.n_1\ n_2\cdots n_k\cdots$ 正好是数集 S 的上确界,这种证明是一种搜索上确界的过程,而且容易在计算机上得到实现.

二、释疑解惑

问题 1 非空有界数集 S 的上确界是否是 S 中的最大数?下确界是否是 S 中的最小数?在什么情况下,非空有界数集的上确界是最大数,下确界是最小数?

答 如果一个数集 S 的最大(小)数存在,则它就是 S 的上(下)确界.有限数集必有最大(小)数,故有限数集必有上(下)确界.而无限集 S 的上(下)确界就不一定是 S 的最大(小)数.例如数集

$$S=\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\ \middle|\ n=1,2,\cdots\right\},$$

可证

$$\sup S=1,\quad \inf S=-1.$$

先证 $\sup S=1$,注意到 $n=2k$,且 n 充分大时,$(-1)^{2k}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$ 可以充分靠近 1.于是

(i) $\forall n,(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq 1$;

(ii) $\forall \varepsilon>0$,当 k 充分大时 $k>\frac{1}{2\varepsilon}$,有 $1-\varepsilon<1-\frac{1}{2k}$,于是 $\sup S=1$.

同理可证 $\inf S=-1$.但是 $\sup S,\inf S$ 并不是 S 的最大、最小数.

若非空有界数集 S 的上确界 $\sup S\in S$,则 $\sup S$ 是最大数;若 S 的下确界 $\inf S\in S$,则 $\inf S$ 是最小数.故对于有界无限数蒋来说,其上(下)确界可以看作最大(小)数的推广.

问题 2 怎样给出无下界数集和无界数集的正面陈述?

答 无下界集:设数集 $S\subset\mathbf{R}$,若 $\forall L,\exists x\in S$,使得 $x<L$,则称 S 是无下界集.

无界集:设数集 $S\subset\mathbf{R}$,若 $\forall M>0,\exists x\in S$,使得 $|x|>M$,则称 S 是无界集.

例如,$S=\{-n^{(-1)^n}\mid n=1,2,\cdots\}$ 是无下界集.这是因为 $\forall L,\exists n=2k_0>|L|$,使得 $-n^{(-1)^n}=-2k_0<L$.

比较有界集与无界集的定义,把有界集定义中“$\vee\ M>0$”换成“$\forall\ M>0$”;“$\forall\ x\in S$”换成“$\vee\ x\in S$”;不等式“$|x|\leq M$”换成“$|x|>M$”,即可得无界集的正面陈述.无上界集的含义是任何 M 都不是数集的上界.把数学形式的陈述与其直观意义结合在一起理解,有利于掌握否定形式的陈述.

问题 3 怎样给出数 ζ 不是数集 S 的上确界的正面陈述?

答 若 ζ 不是数集 S 的上确界,则或者 ζ 不是 S 的上界,或者 ζ 是 S 的上界,但不是最小上界.于是数 ζ 不是数集 S 的上确界的正面陈述为:

(i) $\vee\ x_0\in S$,使得 $x_0>\zeta$;或者

(ii) $\vee\ \alpha_0<\zeta$, $\forall\ x\in S$, $x\leq\alpha_0$.

三、范例解析

例 1 求数集 $S=\left\{\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\ \middle|\ n\in\mathbf{N}_+\right\}$ 的上、下确界.

分析 当 $n=2k$ 时,$\sqrt[2k]{1+2^{2k}}=2\sqrt[2k]{1+\frac{1}{2^{2k}}}$,容易看出 $k=1$ 时 $2\sqrt[2]{1+\frac{1}{2^2}}$ 是偶数项中的最大数.当 $n=2k+1$ 时,$\sqrt[2k+1]{1+2^{-(2k+1)}}=\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}>1$,当 k 充分大时,奇数项与数 1 充分靠近.因为 $2\sqrt[2]{1+\frac{1}{2^2}}=5$ 是 S 中最大数,于是 $\sup S=5$,由上面分析可以看出 $\inf S=1$.

解 因为 5 是 S 中最大数,于是 $\sup S=5$.再证 $\inf S=1$,这是因为

(i) $\forall\ n$, $\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}\geq 1$;

(ii) 设 $a=\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}$,由等式 $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+1)$ 可知,

$$\sqrt[2k+1]{1+\frac{1}{2^{2k+1}}}-1=\frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{a^{2k}+a^{2k-1}+\cdots+1}\leq\frac{1}{2^{2k+1}},$$

于是 $\forall\ \varepsilon>0$,$\vee\ k_0\in\mathbf{N}_+$ 只要 $k_0>\frac{1}{2}\left(\log_2\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$,使得

$$\sqrt[2k_0+1]{1+\frac{1}{2^{2k_0+1}}}-1\leq\frac{1}{2^{2k_0+1}}<\varepsilon,$$

即

$$\sqrt[2k_0+1]{1+\frac{1}{2^{2k_0+1}}}<1+\varepsilon,$$

这样便证得 $\inf\ S=1$. □

例 2 设数集 $S=\left\{1+n\sin\frac{n\pi}{3}\,\middle|\, n\in\mathbf{N}_+\right\}$，求 $\sup\ S,\inf\ S$.

解 不妨取 $n=6k+1,6k+2,\cdots,6k+5(k=1,2,\cdots)$验证相应数值，可以发现一些规律 取 $n=6k+1(k=1,2,3,\cdots)$得到数集 S 的子集

$$S_1=\left\{1+(6k+1)\frac{3}{2}\,\middle|\, k\in\mathbf{N}_+\right\};$$

取 $n=6k+5(k=1,2,3,\cdots)$又得到子集

$$S_2=\left\{1-(6k+5)\frac{3}{2}\,\middle|\, k\in\mathbf{N}_+\right\}.$$

因为 S_1 是无上界数集，S_2 是无下界数集，所以

$$\sup\ S=+\infty,\ \inf\ S=-\infty .$$ □

例 3 设数集 $S=\{y\mid y=1+x^2,\ x$ 为有理数$\}$，试求 $\inf\ S,\sup\ S$.

分析 因为数集 S 无上界，所以 $\sup\ S=+\infty$.又因数 1 是 S 的下界，当有理数 x 充分小时，$y=1+x^2$ 与 1 很靠近，于是可以推测 1 是 S 的下确界 .

解 先验证 $\sup\ S=+\infty$.

" $M>0$，v 有理数 x_0 (设 $M>1$，只要 $x_0>\sqrt{M-1}$)，使得 $1+x_0^2>M$，于是 S 是无上界数集 .按定义，$\sup\ S=+\infty$.

再验证 $\inf\ S=1$:

(i) " $y\in S$, $y=1+x^2\geq 1$(x 为有理数);

(ii) " $\varepsilon>0$，由有理数的稠密性，v 有理数 x_0，使得 $-\sqrt{\varepsilon}<x_0<\sqrt{\varepsilon}$，于是 $1+x_0^2<1+\varepsilon$.

由此可见 $\inf\ S=1$. □

例 4 设 a 为任意实数，A 为 $\mathbf{R}$ 中非空有界数集，证明:

$$\sup(a+A)=a+\sup\ A,\ \inf(a+A)=a+\inf\ A,$$

其中 $a+A=\{a+x\mid x\in A\}$.

证 先证 $\sup(a+A)=a+\sup\ A$.

由 $\sup\ A$ 的定义，满足:

(i) " $x\in A$, $x\leq\sup\ A$;

(ii) " $\varepsilon>0$，v $x_0\in A$, $x_0>\sup\ A-\varepsilon$.

于是又满足:

(i) " $x\in A$, $a+x\leq a+\sup\ A$;

(ii) " $\varepsilon>0$，v $x_0\in A$, $a+x_0>a+\sup\ A-\varepsilon$.

因而证得

$$\sup(a+A)=a+\sup\ A .$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com