数学分析学习指导书

(第　二　版)

下　　册

刘玉琏　吕凤　苑德新　王大海　编

高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内 容 提 要

本书是与刘玉琏主编的中学教师培训教材套的学习指导书．按教材章节对应编写．每章包括“内容结构”、“学习要求”、“学习辅导”、“习题解答”、“自我检查题”等几个部分．“内容结构”主要概述内容的安排、处理及所处的地位、作用；“学习辅导”对重要概念、理论、计算及与中学数学有密切联系的问题作进一步说明．书末附有自我检测题答案．

图书在版编目 CIP)数据

数学分析学习指导书 下册/ 刘玉琏等编．—2 版．—北京：高等教育出版社，1995

ISBN 7 - 04 - 004975 - 9

中国版本图书馆 CIP 数据核字

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网　　址	http: // www．hep．edu．cn
传　　真	010 - 64014048		http: // www．hep．com．cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京天河印刷厂		
		版　　次	1988 年 10 月第 1 版
开　　本	850×1168　1/ 32		1994 年 10 月第 2 版
印　　张	7.125	印　　次	2002 年　月第　次印刷
字　　数	180 000	定　　价	7.70 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换 .
版权所有　侵权必究

目　　录

第 八 章　定积分 …… 1
第 九 章　定积分的应用 …… 29
第 十 章　数值级数 …… 46
第十一章　函数级数 …… 78
第十二章　广义积分 …… 111
第十三章　多元函数及其连续性 …… 127
第十四章　多元函数微分学 …… 142
第十五章　重积分 …… 166
第十六章　曲线积分 …… 183
第十七章　微分方程简介 …… 194
附　　录　自我检测题答案 …… 207

第八章　定　积　分

内容结构

本章有四节十二段．重点是定积分定义、可积条件和定积分的计算．

一元函数积分学的核心就是本章所讲的定积分，在数学分析中不论是在理论上或应用上，它都占有重要的地位．掌握定积分的构造性定义及其数学思想，对学习多元函数的积分学也是有益的．定积分概念，同其它数学概念一样，也是由实际需要产生的．为了讲清定积分定义的客观背景，首先讲了两个几何方面的实例：一个是曲边梯形的面积；另一个是锥体的体积

体几何》

础上给出了抽象的定积分定义，即特定结构和式

极限

上有所不同，应予注意．有了定积分定义之后，从数学角度来说，紧接着要讨论定积分的存在性、性质以及计算等三个问题：

第一，定积分的存在性，即特定结构和式极限存在的必要与充分条件．这里首先给出可积的必要条件

条件虽然有用，但是更有用的是可积的充分条件．为了得到可积的充分条件，先给出与积分和有关的小和与大和的定义及其性质(8.2.2)

需要全本请访问 www.ertongbook.com

数是可积的

第二，定积分的性质

都要应用定积分的性质．这里介绍的定积分的性质可分为四组：

线性性

(定理 4、定理 5)

第三，定积分的计算．将定积分有效地应用于实际问题必须解决定积分的计算问题．定积分的定义虽然给出了计算定积分的步骤和方法，但是计算积分和的极限，一般来说，都是十分困难的，甚至无从着手．因此，计算定积分不能按照定积分定义进行，必须另辟蹊径．解决定积分计算问题与沟通微分与积分的微积分基本定理

联系着．微积分基本定理在理论上十分重要，它把分别独立定义的、似乎是无关的微分与积分的概念联系起来．通过牛 - 莱公式

数的不定积分

的方法．这样我们就明白了在讲定积分之前用了一定篇幅讲授不定积分的目的．为了进一步简化定积分的计算，将不定积分的变数替换法和分部积分法与牛 - 莱公式结合起来就得到定积分的变数替换公式

学习要求

1．理解和掌握定积分概念，知道构造积分和的方法与积分和极限的意义．

2．了解可积准则，掌握可积函数类．

3．掌握定积分的性质与微积分基本定理．能熟练地应用

牛 - 莱公式计算定积分 .

4. 掌握定积分的变数替换法和分部积分法 .

§8.1 定 积 分

学习辅导

1. 积分和的极限及其存在性

设函数 $f(x)$ $[a, b]$ T 将区间 $[a, b]$ n 个小区间:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]. \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

设第 k 个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 的长是 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, 而

$$l(T) = \max_T \{\Delta x_k \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

在第 k 个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ ξ_k $(x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k)$ 积分和

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

由此可见, 使积分和 $\sigma(T, \xi)$ 情况也比较复杂 . 这就给我们研究它的变化趋势带来许多的麻烦 .

我们以前遇到的极限都是函数的极限(包括数列极限) 分 σ 和 $\sigma(T, \xi)$ $l(T)$ $l(T) \to 0$ 时, 积分和 $(T, \xi) \to I$ 是什么意思呢 ?

从形式上说, 当 $l(T)$ T 的每个小区间的长 Δx_k $(1 \leq k \leq n)$ $\xi_k\}$ $\sigma(T, \xi)$ 尽管积分和 $\sigma(T, \xi)$ 但是积分和的变化是能够有一个稳定的变化趋势的, 使其与

数 I 无限接近 .

用分析语言(即“ ε - δ”语言)

定义，就是:

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\,T:\lambda(T)<\delta,\forall\,\xi_k\in[x_{k-1},x_k],\text{有}$$

$$|\sigma(T,\xi)-I|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon.$$

积分和 $\sigma(T,\xi)$

ξ_k 外，绝大多数的 ξ_k 的变化，不会使函数 $f(\xi_k)$

化，即函数 $f(x)$ $[a,b]$

基本上都是连续的才有可能 . 因此，积分和 $\sigma(T,\xi)$

限，即函数 $f(x)$ $[a,b]$ $f(x)$ $[a,b]$

不连续点“不能太多”或 $f(x)$

可积

数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\cap[a,b],\\ 0, & x\in(\mathbf{R}-\mathbf{Q})\cap[a,b],\end{cases}$$

在 $[a,b]$

说，定积分基本上是对连续函数类所定义的积分 .

§8.2 函数可积条件

学习辅导

1. 关于小和与大和

函数 $f(x)$ $[a,b]$

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

的变化因素较多，变化也比较复杂．对比而言，函数 $f\ \ x)$ 间 $a, b]$ T 的小和与大和

$$s(T)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \quad 与 \quad S(T)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$$

的变化比较简单，它只与分割 T 有关，当分法 T 给定之后，不论 $\xi_k\}$

$$s(T)\le\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\le S(T).$$

这样就把变化比较复杂的积分和 $\sum_{k=1}^{n} f\ \ \xi_k)\Delta x_k$ 夹在两个比较简单的小和 $s\ \ T)$ $S\ \ T)$

理的思想方法，讨论积分和极限的存在性，达到了化繁为简的目的．这样引入小和与大和的目的就清楚了．因为关于积分和的极限没有给出两边夹定理，所以不能直接引用函数极限的两边夹定理．因此，函数 $f\ \ x)$ $a, b]$ 8.2.3 定理 2)

2. 关于函数可积性的证明

一般来说，证明函数的可积性经常应用 8.2.3 定理 2 的充分性，即只须证明:

$$"\ \varepsilon>0,\vee\ \delta>0,"\ T: l(T)<\delta, 有\ \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon,$$

其中 $\omega_k=M_k-m_k$ 是函数 $f\ \ x)$ $x_{k-1}, x_k]$

为了证明 $\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$，只能从两个方面入手:

一是，所有小区间上的振幅 ω_k 一致地小于 ε. 例如，证明在闭区间 $a, b]$ $f\ \ x)$ 8.2.4 定理 3)

此．根据函数 $f\ \ x)$ $a, b]$

$$"\ \varepsilon>0,\vee\ \delta>0,"\ T: l(T)<\delta, 有\ \omega_k<\varepsilon(1\le k\le n).$$

从而，$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b-a)$.

二是，所有小区间的长 Δx_k 都一致地小于 ε. 例如，证明在闭区间 $a, b]$ $f(x)$ 8.2.4 定理 4)

"$\varepsilon>0$, v $\delta>0(\delta<\varepsilon)$, " $T: l(T)<\delta$, 有 $\Delta x_k < \delta < \varepsilon (1 \leq k \leq n)$.

从而 $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \omega_k$

$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) = \varepsilon f(b) - f(a) .$$

一般情况，将振幅和 $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$ 分成两部分：一部分是第一种情况；另一部分是第二种情况，两部分振幅和的和 $\sum \omega'_k \Delta x_k + \sum \omega''_k \Delta x_k$ 能任意小. 例如，证明在闭区间 $a, b]$ 个不连续点函数的可积性 8.2.4 定理 5)

习题 8.2 解答

2. 证明：若函数 $f(x)$ $a, b]$

$$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(b)(b-a).$$

证 已知函数 $f(x)$ $a, b]$ 4，函数 $f(x)$在 $a, b]$ $x \in [a, b]$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ $f(x)$ $a, b]$ T 和取法 ξ 的积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$，有

$$f(a)(b-a) = f(a) \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leq f(b) \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$= f(b)(b-a).$$

令 $l(T) \to 0$，有

$$f(a)(b-a)\leq\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\leq f(b)(b-a),$$

因为 $f(x)$ $a,b]$

$$f(a)(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq f(b)(b-a).$$

3. 证明：若函数 $f(x)$ $a,b]$ $M>0$，$\forall x_1,x_2\in[a,b]$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\right|\leq M|x_2-x_1|.$$

证　已知函数 $f(x)$ $a,b]$ 3.2.1 定理 1 函数 $f(x)$在 $a,b]$ $M>0$，$\forall x\in[a,b]$ $|f(x)|\leq M$.

$\forall x_1,x_2\in[a,b]$ $x_1<x_2$. 函数 $f(x)$ $x_1,x_2]$ T 和取法 ξ 的积分和有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\Delta x_k\leq M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=M(x_2-x_1)$$

或 $-M(x_2-x_1)\leq\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\leq M(x_2-x_1)$.

已知函数 $f(x)$ $x_1,x_2]$ $f(x)$ $x_1,x_2]$ 积，当 $l(T)\to 0$ 时，有

$$-M(x_2-x_1)\leq\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\leq M(x_2-x_1)$$

或 $$\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\right|\leq M|x_2-x_1|.$$

4. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[a,b],\\ 1, & x=a,\end{cases}$$

在 $a,b]$ $\int_a^b f(x)\,dx=0$,

需要全本请访问 www.ertongbook.com

证　从题设可知函数 $f(x)$ $[a,b]$ 4，函数 $f(x)$ $[a,b]$ $f(x)$ $[a,b]$ T 和取特殊的 ξ $\xi_1 \neq a$) $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$，已知 $f(\xi_k)=0$，$k=1,2,\cdots,n$．于是，定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{l(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

5．证明：若函数 $f(x)$ $[a,b]$ $c\in[a,b]$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x\in[a,b]-\{c\} \\ k & x=c, \end{cases}$$

则函数 $g(x)$ $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

证　考虑函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x)-g(x)=0, & x\in[a,b]-\{c\}, \\ f(c)-k, & x=c. \end{cases}$$

显然，函数 $F(x)$ $[a,b]$ c．因此，$F(x)$在 $[a,b]$ $F(x)$ $[a,b]$ T 和取法 ξ的积分和 $\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$，设 $c\in[x_{i-1},x_i]$．$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$．

总取 $\xi_i \neq c$．有 $F(\xi_k)=0$，$k=1,2,\cdots,n$．从而，

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{l(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = 0.$$

对 $[a,b]$ T 和任意取法 ξ，作积分和，有

$$\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k.$$

已知函数 $f(x)$ $F(x)$ $[a,b]$ $l(T)\to 0$ 时，

有

$$\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k$$

$$=\lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - \lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

即函数 $g(x)$ $[a,b]$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

6. 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ -1, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$$

在 $[0,1]$ $|f(x)|$ 在 $[0,1]$

论？

证　作函数 $f(x)$ $[0,1]$ T 和取法 ξ 的积分和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

取 ξ_k 都是有理数，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1.$$

取 ξ_k 都是无理数，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = -\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = -1.$$

当 $l(T)\to 0$ 时，积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ 不存在极限．于是，函数 $f(x)$ $[0,1]$

函数 $|f(x)|\equiv 1$．在 $[0,1]$ $|f(x)|$ 在 $[0,1]$

上述事实说明，函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ $f(x)$ $a,b]$

7. 判定下列函数在指定区间是否可积：

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ x-2, & x\in[1,2] \end{cases}$ 在 $0,2]$

答 可积. 因为函数 $f(x)$ $0,2]$ 点 1.

(2) $f(x)=x-[x]$ $0,10]$

答 可积. 因为函数 $f(x)=x-[x]=\{x\}$ $0,10]$ 10 个第一类不连续点：1，2，…，10. 1.4).

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\in(0,1], \\ 2, & x=0, \end{cases}$ 在 $0,1]$.

答 可积. 因为函数 $f(\mathbf{x})$ $0,1]$ 点 0.

8. 证明：若函数 $f(x)$ $a,b]$ $f(x)^2$ 在 $a,b]$

证 已知函数 $f(x)$ $a,b]$ $f(x)$ $a,b]$ $M>0$，$\forall x\in[a,b]$ $|f(x)|\le M$. 作函数 $f(x)$ $a,b]$ T 的振幅和 $\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$，其中 ω_k 是函数 $f(x)$ $x_{k-1},x_k]$

设 ω_k' 是函数 $f(x)^2$ 在 $x_{k-1},x_k]$

$$\begin{aligned}\omega_k' &= \sup\{|[f(x_1)]^2-[f(x_2)]^2| \mid x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]\} \\ &= \sup\{|f(x_1)-f(x_2)| \mid |f(x_1)+f(x_2)| \mid x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]\} \\ &\le \sup\{|f(x_1)-f(x_2)|(|f(x_1)|+|f(x_2)|) \mid x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]\}\end{aligned}$$

$\leq 2M\sup\{|f(x_1)-f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in [x_{k-1}, x_k]\} = 2M\omega_k$,

$k=1, 2, \cdots, n$. 于是,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \omega_k' \Delta x_k \leq 2M \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k .$$

已知函数 $f(x)$ $[a, b]$ $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0$. 于是,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k' \Delta x_k = 0,$$

即函数 $f(x)^2$ 在 $[a, b]$

§8.3 定积分的性质

习题 8.3 解答

1. 证明: 若函数 $f(x)$ $[a, b]$ $M>0$, 有

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a).$$

证 已知函数 $f(x)$ $[a, b]$ 5, 函数 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ $f(x)$ $[a, b]$

$\forall M>0, \forall x \in [a, b]$, 有 $|f(x)| \leq M$.

于是, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$.

2. 证明: 若函数 $f(x)$ $[a, b]$ $x_0 \in [a, b]$ $f(x_0)>0$, 则 $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

证 不妨设 $x_0 \in (a, b)$ ($x_0 = a$ 或 $x_0 = b$ 证法相同) 根据连续函数的保号性, $\forall \delta>0$ ($a < x_0 - \delta$ 与 $x_0 + \delta < b$)

" $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$ $f(x)\geq\frac{f(x_0)}{2}$. 而 " $x\in[a, x_0-\delta]$ $x_0+\delta, b]$ $f(x)\geq 0$. 从而

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx\geq 0, \text{与}\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx\geq 0.$$

于是,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

$$\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}\,dx=f(x_0)\,\delta>0.$$

3. 证明: 若函数 $f(x)$ $g(x)$ $a, b]$ $x\in[a, b]$ $f(x)\leq g(x)$ $x_0\in[a, b]$ $f(x_0)<g(x_0)$ 则

$$\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx.$$

证 考虑函数 $F(x)=g(x)-f(x)$. 显然, 函数 $F(x)$ $a, b]$ $x_0\in[a, b]$ $F(x_0)=g(x_0)-f(x_0)>0$. 由第 2 题, 有

$$\int_a^b F(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

即 $$\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx.$$

4. 证明: 若函数 $f(x)$ $a, b]$ $\int_a^b [f(x)]^2\,dx=0$, 则 $f(x)\equiv 0$.

证 用反证法 假设 $f(x)$á 0, 即v $x_0\in[a, b]$ $f(x_0)\neq 0$. 有$[f(x_0)]^2>0$. 这样, $f(x)^2$ 在 $a, b]$ 函数, 由第 2 题, 有

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx>0.$$

与已知条件矛盾．于是，$f(x)\equiv 0$.

5. 比较下列各题中定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 与 $\int_0^1 x^2\,dx$.

解 $\forall x\in[0,1]$，$x-x^2\geq 0$，且 $\exists x_0\in(0,1)$ 使 $x_0-x_0^2>0$．由第 2 题，有

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 x^2\,dx>0.$$

即
$$\int_0^1 x^2\,dx<\int_0^1 x\,dx.$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

解 $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，有连续函数 $x-\sin x\geq 0$，且 $\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $x_0-\sin x_0>0$．由第 2 题，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx>0,$$

即
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx.$$

(3) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ 与 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

解 $\forall x\in[0,1]$，$e^{-x^2}-e^{-x}\geq 0$，且 $\exists x_0\in(0,1)$ $e^{-x_0^2}-e^{-x_0}>0$．由第 2 题，有

$$\int_0^1 (e^{-x^2}-e^{-x})\,dx=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx-\int_0^1 e^{-x}\,dx>0,$$

即
$$\int_0^1 e^{-x}\,dx<\int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

6. 证明：

需要全本请访问 www.ertongbook.com