数学分析选讲

元摇鲁摇卢若飞摇编著

广西民族出版社

摇图书在版编目（悦陨） 数据

摇数学分析选讲 辕元鲁，卢若飞编著援原南宁：广西民族出版社，圆园园愿

摇陨杂月晕 苑原缘猿远猿原员猿源缘原愿

摇Ⅰ 郾数…摇Ⅱ 郾①元… ②卢…摇Ⅲ 郾数学分析摇Ⅳ郾韵员苑

摇中国版本图书馆 悦陨孕数据核字（圆园园远）第 员园圆源缘猿号

数学分析选讲

元摇鲁摇卢若飞摇编著

出版发行	广西民族出版社 （地址：南宁市桂春路猿号摇摇邮政编码：缘猿园园圆愿）
发行电话	（园苑苑员）缘远苑圆远员园摇缘远苑圆远园远摇缘远苑圆远园员（传真）
耘原皂葬蚤造	造糟怎遭造蚤泽澡藻则岳员远猿援糟燥皂
责任编辑	黄玉群
特邀编辑	马摇辉
封面设计	玉荣奖
责任校对	苏兰清
责任印制	余秀玲
印摇摇刷	广西地质印刷厂
开摇摇本	愿苑园皂皂×员员远园皂皂摇员/猿圆
印摇摇张	愿
字摇摇数	圆园园千
版摇摇次	圆园园远年 愿月第 员版
印摇摇次	圆园园远年 愿月第 员次印刷

陨杂月晕 苑原缘猿远猿原员猿源缘原愿 辕韵·园苑缘摇摇定价：员圆援园园元

前摇言

本书是为报考数学类专业硕士研究生的本科学生编写的援按照数学分析的教学大纲要求，强调学生的综合能力援这个综合能力表现在两个方面：一是对一个具体学科的数学理论的归纳能力，即明确基本问题是什么，基本思想是什么，基本方法有哪些援二是灵活运用相关理论和方法解决某一个具体的数学问题，熟练地运用数学工具援本书分为六章：一元函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数与广义积分援其内容顺序与通常教材的顺序基本一致援每节附有一定的练习题，以便读者自己检验学习的效果援

本书作为一门选修课的教材，可用远园个学时讲完援作者的愿望是：既要覆盖主要的考研知识点，又要精简浓缩相应的基本内容，使学生在教师的引导下，通过精读与讨论的方式，对数学分析课程的基本概念、理论、方法能有较为完整系统的认识援关于学习方法，建议读者尽可能按内容提要复习相应的定理；对每道例题尽可能先自己独立思考，想出解题方法并解答，再看书上的解法；关于练习题，附有提示，供参考；不附答案，是希望读者把注意力放在审视解题过程是否正确，而不要满足于对答案。

编者

圆园园远年愿月

第一章摇一元函数的极限与连续

极限理论是数学分析的基础，也是难点援极限理论的基本问题有两个：一是确定变量在某个变化过程中是否有极限；二是设法求出这个极限援在很多场合下，往往是必须先解决第一个问题才能着手解决第二个问题或求出近似解援连续是一种特别有用的极限情形援

员摇极摇限

一、证明极限的存在性（与不存在性）

证明极限存在常用到的基本内容：极限的定义，悦葬怎糟澡赠准则，匀藻蚤藻则定理，收敛公理以及 杂贼燥造扎法则（有的教材不作介绍），上、下极限等援为了使用方便，下面给出有关知识援

员郾极限的定义

（员）造蚤皂 葬灶 越 葬 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon$ 跃园，$\exists$ 晕，$\forall$ 灶跃晕，有 |葬灶 原 葬| 约 ε 援

（圆）造蚤皂 枣（曾）越 粤 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon$ 跃园，$\exists\delta$ 跃园，当 园约|曾原曾园| 约 δ 时，有 |枣（曾）原 粤| 约 ε 援

圆郾悦葬怎糟澡赠准则

（员）造蚤皂 葬灶 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon$ 跃园，$\exists$ 晕，$\forall$ 灶，皂跃晕，有 |葬灶 原 葬皂| 约 ε 援

（圆）造蚤皂 枣（曾）存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon$ 跃园，$\exists\delta$ 跃园，$\forall$ 曾员，曾圆，使得当 园约|曾员 原 曾园|约 δ，园约|曾圆 原 曾园|约 δ 时，有 |枣（曾员）原 枣（曾圆）| 约 ε 援

3. Heine定理

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \exists U^{0}(x_0)$, $\forall\{x_n\}\subset U^{0}(x_0)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在$\Leftrightarrow \exists U^{0}(x_0)$, $\forall\{x_n\}\subset U^{0}(x_0)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 有 $\{f(x_n)\}$收敛于同一数值.

4. 收敛公理

(1) 若数列$\{a_n\}$单调有界,则必有极限.

(2) 若函数$f(x)$在某区间内单调有界,则$f(x)$在该区间内任一点处存在左、右极限(定理).

5. Stolz法则

定理1$\left(\dfrac{*}{\infty}型\right)$. 设数列$\{a_n\}$严格递增,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\begin{cases}A\\+\infty,\\-\infty,\end{cases} 则 \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}A\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$$

定理2$\left(\dfrac{0}{0}型\right)$. 设数列$\{a_n\}$严格递减,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,

$$若 \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\begin{cases}A\\+\infty,\\-\infty,\end{cases} 则 \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}A\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$$

6. 上、下极限

定义. 设$\{a_n\}$为有界数列,则$\{a_n\}$的所有收敛子列的极限的上、下确界分别称为$\{a_n\}$的上、下极限,记作$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

定理. 有界数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$,这时, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

例1. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续且$f(x)>0$, M为$f(x)$在$[a,b]$上

的最大值，证明：$\underset{灶→肄}{遭皂}\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}$越酝援

分析摇证明的思路：

①用极限的定义，考虑$\left|\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}原晕\right|$援

②用上、下极限证明极限存在，再确定极限值为酝援在此采用思路②较为简捷援

证明摇因为酝为枣曾在[葬，遭]上的最大值，

所以摇$\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}\leqslant\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}酝^{灶}谱曾}$越酝$\sqrt[灶]{遭原葬}$，

由此可知摇$\overline{\underset{灶→肄}{遭皂}}\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}\leqslant$酝援　　　　(员)

又因为摇$\forall\varepsilon$跃园(ε约酝)，$\exists$[糟，凿]$\subset$[葬，遭]，使在[糟，凿]上，枣曾跃酝原ε，从而

摇摇$\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}\geqslant\sqrt[灶]{\int_{糟}^{凿}(酝原\varepsilon)^{灶}谱曾}$

越(酝原ε)$\sqrt[灶]{凿原糟}$，

故摇$\underline{\underset{灶→肄}{遭皂}}\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}\geqslant$酝原$\varepsilon$援　　　　(圆)

由ε的任意性，得

摇摇$\underline{\underset{灶→肄}{遭皂}}\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}\geqslant\overline{\underset{灶→肄}{遭皂}}\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}$，

所以，极限$\underset{灶→肄}{遭皂}\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}$存在，记为粤援

由式(员)、(圆)可知摇酝$\geqslant$粤$\geqslant$酝原ε，

再由ε的任意性，可知摇粤越酝援

即摇$\underset{灶→肄}{遭皂}\sqrt[灶]{\int_{葬}^{遭}[枣曾]^{灶}谱曾}$越酝援

注：此例给出一个求正值连续函数在闭区间上的最大值的一般

方法，值得注意.

例2 设 $a_n \geq 0$ 且 $a_{m+n} \leq a_m a_n$，证明 数列$\{\sqrt[n]{a_n}\}$收敛.

分析：若某个 $a_k = 0$，则 $\forall n > k$，由题设，有 $a_n = 0$，这时 $\sqrt[n]{a_n} = 0$ $(n > k)$. 下面假设所有 $a_n > 0$，并采用上、下极限的方法.

证明：由 $a_{m+n} \leq a_n a_m$，可知：$\sqrt[n]{a_n} \leq a_1$，

所以：$\{\sqrt[n]{a_n}\}$的上、下极限都存在.

令 $b_n = \sqrt[n]{a_n}$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n = l$，则易知 $\exists$ 子列 $\{b_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_k} = l$，故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists k_0$，$\forall k \geq k_0$，有 $|b_{n_k} - l| < \varepsilon$. 于是，当 $n > n_{k_0}$ 时，设 $n = m n_{k_0} + r$，$0 \leq r < n_{k_0}$，令 $M = \max\{a_0, a_1, \cdots, a_{n_{k_0}}\}$，$a_0 = 1$，则有

$$
\begin{aligned}
: b_n &= \sqrt[n]{a_{m n_{k_0} + r}} \\
&\leq \sqrt[n]{a_{n_{k_0}}^m a_r} \\
&\leq a_{n_{k_0}}^{\frac{m}{n}} M^{\frac{1}{n}} \\
&= a_{n_{k_0}}^{\frac{1}{n_{k_0}} \cdot \frac{m \cdot n_{k_0}}{n}} M^{\frac{1}{n}} \\
&= b_{n_{k_0}}^{\frac{n-r}{n}} M^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

当 $n > n_{k_0}$ 时，有

$$: b_n \leq (l+\varepsilon)^{\frac{n-r}{n}} \cdot M^{\frac{1}{n}},$$

故：$\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \leq l + \varepsilon = \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n + \varepsilon$.

由 ε 的任意性，有

$$: \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leq \varliminf_{n\to\infty} b_n,$$

所以 $\{b_n\}$ 收敛.

即数列$\{\sqrt[n]{a_n}\}$收敛.

例3 设 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，$a_1 = \sin x$，$a_{n+1} = \sin a_n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2}{\frac{1}{n}} = 3$.

分析摇若直接考虑 葬灶 员 越 灶 员 ，式中有两个变量，讨论不方便援于是考虑用 杂法则将问题转化为 造灶→肆 灶 员 葬灶 援

摇摇因为摇 灶垣员 原灶 员 葬灶垣员 原 员 葬灶

越 葬灶葬灶垣员 葬灶 原葬灶垣员

越 葬灶 葬灶 葬灶 原 葬灶 ，

而最后一个式子只有一个变量 葬灶，弄清楚 造灶→肆 葬灶，就可以找到解决问题的办法了援

证明摇由于 曾∈ (园，π/圆)，知 曾∈ (园，员)，即 葬员∈ (园，员)援

又由 葬员 约葬员，可知 {葬灶} 单调递减且大于零，

所以 {葬灶} 收敛援

再令 造灶→肆 葬灶 越葬，由题设的递推公式 葬灶垣员 越葬灶，可得 葬越葬，于是 葬越园运用 匀定理，考虑 造贼→园 贼 贼原贼，由极限运算法则，有

摇摇造贼→园 贼 贼原贼 越造贼→园 贼 贼原贼

越造贼→园 源贼 圆贼原圆贼

越造贼→园 源贼 圆贼原贼

越造贼→园 员贼 圆原圆贼

越遭皂 贼→园 圆赋 / 源孳孽园赋

越猿援

因此，由 匀贼造造定理，可知摇 遭皂 灶→肆 葬灶圆 原孳孽葬灶 / 葬灶圆 原孳孽葬灶 越猿援

由 杂贼燥造法则，得摇 遭皂 灶→肆 灶 / 员 / 葬灶圆 越猿，

即摇 遭皂 灶→肆 葬灶圆 / 员 / 灶 越猿援

例 源摇设 遭皂 灶→肆 灶(葬灶 原葬灶原员) 越园，且 遭皂 灶→肆 葬员 垣葬圆 垣… 垣葬灶 / 灶 越葬，证明：

遭皂 灶→肆 葬灶 越葬援

分析摇由题设条件和目标，容易看出问题可转化为

摇摇 遭皂 灶→肆 (葬灶 原 葬员 垣葬圆 垣… 垣葬灶 / 灶) 越园

在考虑后一极限时，设法用上条件 遭皂 灶→肆 灶(葬灶 原葬灶原员) 越园援

证明摇令 遭灶 越葬灶 原葬灶原员，则摇葬灶 越遭灶 垣遭灶原员 垣… 垣遭圆 垣葬员，

故摇葬灶 原 葬员 垣葬圆 垣… 垣葬灶 / 灶

越遭灶 垣遭灶原员 垣… 垣遭圆 垣葬员 原 葬员 垣葬圆 垣… 垣葬灶 / 灶

越 员 / 灶 [灶遭灶 垣灶遭灶原员 垣… 垣灶遭圆 垣灶葬员

摇 原(葬员 垣葬圆 垣… 垣葬灶)]

越 员 / 灶 [灶遭灶 垣灶遭灶原员 垣… 垣灶遭圆 垣灶葬员

摇 原(灶葬员 垣灶遭圆 垣(灶原员) 遭圆 垣… 垣圆遭灶原员 垣遭灶)]

越员灶[(灶原员遭灶垣(灶原圆遭灶原员垣… 垣遭圆]援

令摇月灶越(灶原员遭灶垣(灶原圆遭灶原员垣… 垣遭圆

则摇月灶垣员原月灶越(灶垣员遭灶垣员,

故摇遭灶→肄 月灶垣员原月灶 (灶垣员原灶 越遭灶→肄(灶垣员遭灶垣员

越遭灶→肄 (灶垣员遭灶垣员 灶垣员 · 灶

越园援

由 杂贼燥造扎法则,可知摇遭灶→肄 月灶 灶 越园

即摇遭灶→肄(葬灶原 葬员垣… 垣葬灶 灶)越园

从而摇遭灶→肄葬灶越遭援

例 缘摇设函数 枣(曾)在(葬,垣肄)内有定义且内闭有界,若

遭曾→垣肄[枣(曾垣员)原枣(曾)]越粤,证明:遭曾→垣肄 枣(曾) 曾 越粤援

分析摇比较理想的证明思路是,考虑当 曾充分大时,|枣(曾) 曾 原粤|能

否转化(或变型)为形如 渣枣(贼垣员)原枣(贼)原粤渣的式子,而证明的关键

是将充分大的 曾考虑为 贼垣灶,贼是有限的值援

证明摇由 遭曾→垣肄[枣(曾垣员)原枣(曾)]越粤,可知∀ε跃园,∃酝跃葬(且 葬跃园),使得当 曾≥酝时,渣枣(曾垣员)原枣(曾)原粤渣约ε援

特别地,当 贼∈[酝,酝垣员)时,∀灶,有

摇摇渣枣(贼垣灶垣员)原枣(贼垣灶)原粤渣约ε援

设在[酝,酝垣圆]上,渣枣(曾)渣约运,则∀贼∈[酝,酝垣员),有

摇摇摇|枣(贼垣灶) 贼垣灶 原粤|

越$\frac{员}{贼垣灶}$灌贼垣灶 原(贼垣灶 粤渣

越$\frac{员}{贼垣灶}$灌贼垣灶 原枣贼垣灶原员 垣枣贼垣灶原员

摇 原枣贼垣灶原圆 垣… 垣枣贼垣圆 原枣贼垣员 垣枣贼垣员

摇 原枣贼 原(贼垣灶 粤垣枣贼渣

≤$\frac{员}{贼垣灶}$[灌贼垣灶 原枣贼垣灶原员 原粤渣垣…

摇 垣灌贼垣员 原枣贼 原粤渣垣灌贼渣垣贼垣粤渣]

约$\frac{员}{贼垣灶}$[灶ε 垣悦垣(酝垣员 灌粤渣

约ε 垣$\frac{员}{灶}$[悦垣(酝垣员 灌粤渣,

由 $\lim\limits_{灶\to 垣肄}\frac{员}{灶}$[悦垣(酝垣员 灌粤渣 越园可知,∃ 晕跃园当 灶跃晕时,

摇摇$\frac{员}{灶}$[悦垣(酝垣员 灌粤渣 约ε;

从而∀灶跃晕,∀贼 [酝,酝垣员,有摇 $\left|\frac{枣贼垣灶}{贼垣灶}原粤\right|$ 约圆ε 摇

这样,当 曾跃酝垣晕垣员时,∃灶跃晕,贼 [酝,酝垣员,使 曾越贼垣灶,

故摇 $\left|\frac{枣曾}{曾}原粤\right|$ 约圆ε 摇

这就证明了 $\lim\limits_{曾\to 垣肄}\frac{枣曾}{曾}$越粤 摇

例 远摇设 枣曾 在 [葬,垣肄) 内恒正且内闭有界,若 $\lim\limits_{曾\to 垣肄}\frac{枣曾垣员}{枣曾}$越粤跃园,证明:$\lim\limits_{曾\to 垣肄}[枣曾]^{\frac{员}{曾}}$越粤 摇

分析摇 $[枣曾]^{\frac{员}{曾}}$越$藻^{\frac{员}{曾}造灶枣曾}$,于是应考虑$\frac{造灶枣曾}{曾}$的极限,而例 缘启

发我们,可以考虑函数的差 遭枣曾垣员 原遭枣曾 的极限援

证明摇令 早(曾 越遭枣曾,则 早(曾 在 [葬 垣肄) 内有定义且内闭有界,由题设,知

摇摇 $\underset{曾\to 垣肄}{\text{遭皂}}$ [早(曾垣员 原早(曾] 越遭粤,

故摇 $\underset{曾\to 垣肄}{\text{遭皂}}$ $\dfrac{早(曾}{曾}$ 越遭粤,

从而摇 $\underset{曾\to 垣肄}{\text{遭皂}}$ [枣曾] $^{\frac{员}{曾}}$ 越藻遭粤 越粤援

注:此例中的 粤是否等于 园是一个悬而未决的问题援

例 苑摇设 葬员 跃园,葬灶垣员 越 $\dfrac{葬(员垣葬灶)}{葬垣葬灶}$,证明:{葬灶} 收敛援

分析摇数列用递推形式给出,较为可行的证明思路是:①考虑用收敛公理证明;②憎悦赠遭增准则援

证法 员摇用收敛公理证明援

摇摇葬灶垣员 原葬灶 越 $\dfrac{员}{葬垣葬灶}$(葬垣葬葬灶 原葬葬灶 原葬 $_灶^圆$)

越 $\dfrac{葬原葬 _灶^圆}{葬垣葬灶}$援

若 葬员 越 $\sqrt{葬}$则 葬圆 越葬员,葬猿 越葬圆,…,葬灶垣员 越葬灶 越 $\sqrt{葬}$当然 {葬灶} 收敛援

若 葬员 跃 $\sqrt{葬}$ 则 葬圆 约葬员,且

摇摇葬圆 越 $\dfrac{葬垣葬葬员}{葬垣葬员}$

越 $\dfrac{葬(葬垣葬员) 垣葬原葬圆}{葬垣葬员}$

越葬垣 $\dfrac{葬原葬圆}{葬垣葬员}$

约葬垣 $\dfrac{葬原葬圆}{葬垣\sqrt{葬}}$

越 $\sqrt{葬}$援

于是又可推出摇葬$_{猿}$约葬$_{圆}$，葬$_{猿}$跃$\sqrt{葬}$，…

即｛葬$_{灶}$｝单调递减且有下界$\sqrt{葬}$，

故｛葬$_{灶}$｝收敛援

若葬$_{员}$约$\sqrt{葬}$，则葬$_{圆}$跃葬$_{员}$，且

摇摇葬$_{圆}$越葬垣$\dfrac{葬原葬_{圆}}{葬垣葬_{员}}$跃葬垣$\dfrac{葬原葬_{圆}}{葬垣\sqrt{葬}}$越$\sqrt{葬}$援

于是又可推出摇葬$_{猿}$跃葬$_{圆}$，$\sqrt{葬}$跃葬$_{猿}$，…

即｛葬$_{灶}$｝单调递增且有上界$\sqrt{葬}$，

故｛葬$_{灶}$｝收敛援

证法圆摇考虑用 悦葬怎糟澡赠 准则证明援

令摇枣(曾)越$\dfrac{葬(员垣曾)}{葬垣曾}$，曾跃园，

则摇渣枣忆(曾)渣越$\dfrac{葬(葬原员)}{(葬垣曾)^{圆}}$

约$\dfrac{葬(葬原员)}{葬^{圆}}$

约员，

于是摇渣枣(葬$_{灶垣员}$)原枣(葬$_{灶}$)渣越渣枣忆(悦)渣渣葬$_{灶垣员}$原葬$_{灶}$渣

即摇渣葬$_{灶垣圆}$原葬$_{灶垣员}$渣约$\dfrac{葬原员}{葬}$渣葬$_{灶垣员}$原葬$_{灶}$渣

约…

约$\left(\dfrac{葬原员}{葬}\right)^{灶}$渣葬$_{圆}$原葬$_{员}$渣

这样，$\forall$灶，责有

摇摇摇渣葬$_{灶垣责}$原葬$_{灶垣员}$渣

$\leqslant$渣葬$_{灶垣责}$原葬$_{灶垣责原员}$渣垣…垣渣葬$_{灶垣圆}$原葬$_{灶垣员}$渣

$\leqslant$渣葬$_{圆}$原葬$_{员}$渣$\left[\left(\dfrac{葬原员}{葬}\right)^{灶垣责原圆}$垣…垣$\left(\dfrac{葬原员}{葬}\right)^{灶}\right]$

· 员园 ·

越渣葬圆 原葬员渣 (葬原员/葬)^灶 · 员原(葬原员/葬)^责原员 / 员原葬原员/葬

≤ 渣葬圆 原葬员渣 (葬原员/葬)^灶 葬

从而由 憔蚤造早怎增准则,可知{葬灶} 收敛援

例 愿摇 设 葬员 越员,葬圆 越√员垣√圆,葬猿 越√员垣√圆垣√猿,…,

葬灶越√员垣√圆垣… 垣√灶,证明:{葬灶} 收敛援

分析摇显然{葬灶} 单调递增,故可考虑用收敛公理来证明援困难在于根号,为了估计上界,考虑将根号内各项换成圆的乘幂援

证明摇容易验证 灶约圆^灶,故 灶约圆^圆灶,于是

摇摇√员垣√圆垣… 垣√灶约√圆 垣√圆^圆 垣… 垣√圆^圆灶

越√圆 垣√圆^圆 垣… 垣圆^圆灶原员 √员

越√圆 垣√圆^圆 垣… 垣圆^圆灶原圆 √员垣员

越圆√员垣√员垣… 垣√员援

摇(共有 灶个根号)

令摇遭灶越√员垣√员垣… 垣√员(灶个根号),

容易证明摇遭灶约圆

故摇葬灶约源

所以{葬灶} 收敛援

例 怨摇设 葬灶(园,枣(曾) ~曾(曾→园),葬灶越∑(噪越员 to 灶) 枣(圆噪原员/灶^圆)葬,证明:造蚤皂(灶→肄) 葬灶

越葬援

分析摇由 枣(曾) ~曾及 造蚤皂(灶→肄) (圆噪原员/灶^圆)葬越葬,可以想到

摇摇枣(圆籍原员/灶圆 葬)~ 圆籍原员/灶圆 葬，蚤越员，圆…，灶，(灶→肆)

即摇 | 枣(圆籍原员/灶圆 葬) / (圆籍原员/灶圆 葬) 原员 | →园(灶→肆)，

于是有摇 | 枣(圆籍原员/灶圆 葬) 原 圆籍原员/灶圆 葬 | 约 圆籍原员/灶圆 葬援

证明摇由于 ∑(蚤越员..灶) 圆籍原员/灶圆 越 员/灶圆 ∑(蚤越员..灶) (圆蚤原员)

越 员/灶圆 · [圆 · 灶(灶垣员)/圆 原灶]

越员，

故摇 澡(葬灶) 原葬越 | ∑(蚤越员..灶) 枣(圆籍原员/灶圆 葬) 原 ∑(蚤越员..灶) 圆籍原员/灶圆 葬 |

≤ | ∑(蚤越员..灶) [枣(圆籍原员/灶圆 葬) 原 圆籍原员/灶圆 葬] | 援

由 枣(曾) ~ 曾(曾→园)，可知 ∀ε 跃园，∃δ 跃园，当 园约渣曾渣约δ 时，有

摇摇 | 枣(曾)/曾 原员 | 约ε援

又由摇 圆籍原员/灶圆 葬 ≤ 圆灶原员/灶圆 葬约 圆葬/灶，蚤越员，圆…，灶，

可知 ∃ 晕，当 灶跃晕 时，圆葬/灶 约δ，

即摇 圆籍原员/灶圆 葬约δ，

故摇 | 枣(圆籍原员/灶圆 葬) / (圆籍原员/灶圆 葬) 原员 | 约ε，

即摇|枣(圆蚤原员/灶圆)葬原圆蚤原员/灶圆葬|约圆蚤原员/灶圆葬，蚤越员,圆…,灶,

于是,当灶跃择时,

摇摇渣葬灶原葬渣臆 $\sum_{蚤越员}^{灶}$ 圆蚤原员/灶圆葬越葬,

这就证明了 遭灶→肆 葬灶越葬援

例员园摇设 遭灶→肆 葬灶越葬,证明:遭灶→肆 葬灶垣圆葬灶原员垣…垣灶葬员/员垣圆垣…垣灶越葬援

分析摇有两个较理想的证明思路:①用极限定义;②用杂贼燥造扎法则援而思路②较简单援

证明摇令 月灶越葬灶垣圆葬灶原员垣…垣灶葬员,粤灶越员垣圆垣…垣灶,则

摇摇月灶垣员原月灶/粤灶垣员原粤灶越葬灶垣员垣葬灶垣…垣葬员/灶垣员,

由 遭灶→肆 葬灶越葬,可知摇遭灶→肆 葬灶垣员垣葬灶垣…垣葬员/灶垣员越葬,

故摇遭灶→肆 月灶垣员原月灶/粤灶垣员原粤灶越葬,

由杂贼燥造扎法则,得摇遭灶→肆 月灶/粤灶越葬援

即摇遭灶→肆 葬灶垣圆葬灶原员垣…垣灶葬员/员垣圆垣…垣灶越葬援

练习摇员

员郾设 遭灶→肆 葬员垣葬圆垣…垣葬灶/灶存在,证明:遭灶→肆 葬灶/灶越园援

圆郾设 葬灶越 $\sum_{蚤越员}^{灶}$ (葬蚤蚤原员)(葬跃园),证明:遭灶→肆 葬灶越员/圆遭灶葬援

猿郾证明:遭灶→肆(员垣圆责垣…垣灶责/灶责原灶/责垣员)越员/圆援

4. 设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=2$.

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，正数数列 $\{b_n\}$ 单调递增且趋于正无穷大，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n}{b_n}=0$.

6. 设 $a_n\geqslant 0$，$a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\inf\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$.

7. 设 $x_1\in(0,1)$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，证明：$\{x_n\}$ 收敛.

8. 设 $x_1=a$，$x_{n+1}=1+bx_n$，问为使 $\{x_n\}$ 收敛，a,b 应取何值.

9. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$g(x)>0$，令 $a_n=\int_a^b [f(x)]^n\cdot g(x)\,dx$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\max\{f(x):x\in[a,b]\}$.

10. 设 $a_n>0$，$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$，$\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 有界，证明：$\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

二、求极限值的常用方法

前面讨论的证明极限存在的方法中，也提供了一些求极限值的方法，如 Stolz 法则等. 而常用的较为简捷的求极限的方法有四则运算、复合运算、两个重要极限、两边夹法则、洛必达法则、算术平均与几何平均、马克劳林公式、积分和等.

例 1.5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^n-1}}\cdot\left(\dfrac{2}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2^n-2}}\cdot\cdots\cdot\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

分析 较为理想的证明思路：先将乘法转化为和的形式，再进一步考虑其他方法.