数学分析拾遗

赵显曾 编著

东 南 大 学 出 版 社

内 容 提 要

该书是一本数学分析补充读物，由员圆个各自独立的问题和两个附录组成，题材新颖，论证翔实，行文流畅，风格清新。该书涉及的每个问题都是国内外现行同类书中所没有的。

本书可以作为高等学校数学系数学分析课的补充教材，也可供数学系高年级学生、研究生和数学爱好者参考。

摇图书在版编目(悦陨孕)数据

摇数学分析拾遗 辕赵显曾著援—南京:东南大学出版社，
圆园园远援苑
摇陨杂月晕 苑原愿员园怨园原缘园园原园

摇Ⅰ援数援援摇Ⅱ援赵援援摇Ⅲ援数学分析摇Ⅳ援韵员苑

摇中国版本图书馆 悦陨孕数据核字(圆园园远)第 园苑远园远苑号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼圆号摇邮编 圆员园园怨远)
出版人:宋增民
江苏省新华书店经销摇摇摇摇摇摇摇摇印刷
开本:苑员园皂皂伊员园园园皂皂摇员辕员远摇印张:苑摇字数:员苑园千字
圆园园远年苑月第员版摇摇圆园园远年苑月第员次印刷
印数:员~猿园园园册摇定价:员愿援园园元

(凡因印装质量问题，可直接向读者服务部调换。电话:园圆缘原愿猿苑怨圆猿圆愿)

前言

数学是锻炼思维的体操，微积分是最好的体操教材之一。微积分对人类的科技进程起着决定性的作用。世界科学界，把牛顿和莱布尼兹发现微积分的那一年（公元1665年），公认为是近代物理学的开始。从那时算起，微积分已经诞生了三百多年，是一门成熟的数学学科，是高等学校理工科的主要基础课之一。但是，成熟是相对的，而不是绝对的，它仍然需要发展、完善和提高。因为它始终充满了勃勃生机，而且，目前正在向着深度和广度扩展。

高等学校在向学生传授知识的同时，要十分注意对学生创新能力的培养。创新应是高等教育活的灵魂，没有创新就不可能有发展和进步。创新是一个过程，不能割断历史，从基础教育就应开始，而且要寓于知识传授之中，学习敢于创新、善于创新，勿以善小而不为之。教师的教学内容和教学法的创新，对激励学生的学习和事业的创新，特别是对树立创新的雄心壮志，起着先导性的不可替代的启迪作用。应试教育（包括其考试模式）是僵化和死板的，快节奏填鸭式教育与素质教育的要求、创新意识格格不入。经验表明，教育要创新，而且也是可以创新的。

《数学分析拾遗》（以下简称为《拾遗》）是一本数学分析课补充读物，由[illegible]个各自独立的问题和两个附录组成，这些问题都是笔者在教学中积累起来的。之所以称其为《拾遗》，理由有两个：一是因为这些问题，确是地道的数学分析问题，而非其他；二是因为国内外现行的同类书中，尚未见到这些新颖有趣的材料。我们知道，“学会学习”本身比“学会什么”更重要。在每个问题的开始，我们不仅给出了问题的陈述，而且还说明了问题的背景，即问题是怎样提出来的和在什么情况下提出来的，以利于读者真正领会本书的精神实质。如果在阅读笔者写的《高等微积分》和《微积分教程》两书时，还有困难没能解决，可在《拾遗》中得到具体帮助。实践证明，将《拾遗》中的问题，融入数学分析课的教学，可取得明显的效果，是成功的。所以笔者著《拾遗》以飨读者，抛砖引玉。笔者坚持“一本好书，不求没有缺点，而应有特色，特色才是其灵魂”的观点，至今不悔。

“为祖国健康工作四十年”，这是笔者学生时代立下的誓言。在笔者的夙愿就要得以实现的时候，笔者心潮澎湃，思绪万千。笔者衷心感谢我的老同学顾新身教授、王泽涵高级工程师、冯世烇高级工程师和程乃毅高级工程师真诚无私的帮助，如果没有他们的帮助，也就不会有《拾遗》的问世。

衷心感谢北京大学的陈维桓教授，清华大学的韩云瑞教授，他们不但对本书稿提出了许多建设性的意见，而且还热情地促成了本书的出版。

此外，还要感谢赵翠宇讲师，她对本书稿撰写的早日完成，起了催化剂的作用。

我期望能把《拾遗》写得有血有肉，有声有色，言之有物，不流于形式，所以在行文方式与风格上，没有遵循通常的路径。但是，由于本人水平所限，错误和不当之处在所难免，恳请读者不吝赐教，欢迎多提宝贵意见，以便今后予以改进。

最后，还要感谢本书的编辑同志，正是他们卓有成效的工作与辛勤劳动，才使本书能得以早日问世。

赵显曾

圆园园缘年 怨月 圆员日

于南京·龙江

目摇摇录

参考文献 ………………………………………………………………… (员园缘)

员援区间序列的一个性质

阅援孕援波利亚说：“在讨论数学问题时，我相信特殊化比一般化起着更为重要的作用援可能在大多数场合，我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因，是在于这样的事实，即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决援这时一切都有赖于找出这些比较容易的问题，并用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们援这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一……援”

具体问题是数学的鲜血援区间序列的一个性质”，这个问题是如何提出的呢？在科技迅猛发展的今天，关于稳定性、可靠性的研究，越来越迫切、重要援对非均匀分布的点态已感不满足，往往要通过有限认识无限，寻求一个数学结构稳定的范围（区间）援不禁要问：这个区间存在吗？条件是什么？如何搜索？考虑到周期函数的特征，只要分析其在一个基本区间的性质即可援于是，从集合论的角度看，若将周期函数看作是均匀分布的问题，那么非周期函数就可看作是非均匀分布的问题援这就是下面我们所要讨论的问题援

为了叙述方便起见，我们称 葬＞园 时的区间 [葬，遭] 为正区间；而称 遭＜园 时的区间 [葬，遭] 为负区间援

定理 员援设 {[葬$_{灶}$，遭$_{灶}$]} 是一正区间序列援如果 $\lim\limits_{灶\to肆}$遭$_{灶}$ 越 肆，在 [葬$_{灶}$，遭$_{灶}$] 上每一个点都具有某个性质 孕，则存在一数 γ，使得点到 {灶γ} 中有子列 {灶$_{噪}\gamma$}，在子列的每一个点 灶$_{噪}\gamma$ 处也都具有某个性质 孕援

证援取 [$\alpha_{员}$，$\beta_{员}$] 越 [葬$_{员}$，遭$_{员}$]，并考虑 [灶$\alpha_{员}$，灶$\beta_{员}$]（灶为正整数）援令 晕$_{员}$ 越 $\left[\dfrac{\alpha_{员}}{\beta_{员}原\alpha_{员}}\right]$ 垣员，其中 [曾] 表示 曾 的最大整数部分援因此，当 灶≥晕$_{员}$ 时，有

$$灶\beta_{员} \geqslant (灶垣员)\alpha_{员},$$

区间序列 {[灶$\alpha_{员}$，灶$\beta_{员}$]} 覆盖数集 {曾：曾≥晕$_{员}\alpha_{员}$} 援于是，存在两个正整数 灶$_{员}$ 与 皂$_{员}$，使得

$$[灶_{员}\alpha_{员},灶_{员}\beta_{员}] \cap (葬_{皂_{员}},遭_{皂_{员}}) \neq \varnothing,$$

记

$$[葬忆_{员},遭忆_{员}] 越 [灶_{员}\alpha_{员},灶_{员}\beta_{员}] \cap [葬_{皂_{员}},遭_{皂_{员}}] 援$$

取 $\alpha_{圆}$越$\frac{蕤乙_{灶员}}{灶_{员}}$,$\beta_{圆}$越$\frac{遭乙_{灶员}}{灶_{员}}$,则

$$[灶_{员}\alpha_{圆},灶_{员}\beta_{圆}] \subseteq [蕤_{皂员},遭_{皂员}]$$

上每一个点都具有某个性质 孕且由于

$$[灶_{员}\alpha_{圆},灶_{员}\beta_{圆}] \subseteq [灶_{员}\alpha_{员},灶_{员}\beta_{员}],$$

所以 $[\alpha_{圆},\beta_{圆}] \subseteq [\alpha_{员},\beta_{员}]$ 援

再考虑 $[灶\alpha_{圆},灶\beta_{圆}]$ 援当 $灶 \geqslant 晕_{圆}$越$\left[\frac{\alpha_{圆}}{\beta_{圆}原\alpha_{圆}}\right]$ 垣员时,区间序列 $\{[灶\alpha_{圆},灶\beta_{圆}]\}$ 覆盖数集 $\{曾渣灶跃晕_{圆}\alpha_{圆}\}$ 援于是,存在两个正整数 $灶_{圆}$跃$灶_{员}$和 $皂_{圆}$跃$皂_{员}$,使得

$$[灶_{圆}\alpha_{圆},灶_{圆}\beta_{圆}] \cap (蕤_{皂圆},遭_{皂圆}) \neq \varnothing,$$

记

$$[蕤乙_{灶圆},遭乙_{灶圆}] 越 [灶_{圆}\alpha_{圆},灶_{圆}\beta_{圆}] \cap [蕤_{皂圆},遭_{皂圆}] 援$$

取 $\alpha_{猿}$越$\frac{蕤乙_{灶圆}}{灶_{圆}}$,$\beta_{猿}$越$\frac{遭乙_{灶圆}}{灶_{圆}}$,则 $[灶_{圆}\alpha_{猿},灶_{圆}\beta_{猿}]$ 上每一个点都具有某个性质 孕且 $[\alpha_{猿},\beta_{猿}] \subseteq [\alpha_{圆},\beta_{圆}]$ 援

依次继续下去,得区间序列 $\{[\alpha_{灶},\beta_{灶}]\}$ 及两个正整数数列 $\{灶_{躁}\}$ 与 $\{皂_{躁}\}$,满足条件

(员) 摇 $[\alpha_{灶垣员},\beta_{灶垣员}] \subseteq [\alpha_{灶},\beta_{灶}]$,摇灶越员,圆…;

(圆) 摇 $灶_{躁}$ 约$灶_{躁垣员}$,$皂_{躁}$ 约$皂_{躁垣员}$,摇躁越员,圆…;

(猿) 摇 $[灶_{躁}\alpha_{躁垣员},灶_{躁}\beta_{躁垣员}] \subseteq [蕤_{皂躁},遭_{皂躁}]$,摇躁越员,圆…,

且 $[灶_{躁}\alpha_{躁垣员},灶_{躁}\beta_{躁垣员}]$ 上每一个点都具有某个性质 孕援

这样以来,由 (员) 可知

$$\underset{灶\rightarrow 肆}{遭皂}\alpha_{灶} \leqslant \underset{灶\rightarrow 肆}{遭皂}\beta_{灶},$$

至少存在一数 $\gamma \in [\alpha_{灶},\beta_{灶}]$ (灶越员,圆…) 援由 (圆) 可知 $\{灶_{躁}\gamma\}$ 是 $\{灶\gamma\}$ 的子列 再根据 (猿),对任意的正整数 躁

$$灶_{躁}\gamma \in [灶_{躁}\alpha_{躁垣员},灶_{躁}\beta_{躁垣员}] \subseteq [蕤_{皂躁},遭_{皂躁}]$$

具有某个性质 孕援因此,γ 就是所要求的数援

定理 员证毕援

定理 圆摇设 $\{[蕤_{灶},遭_{灶}]\}$ 是一正区间序列援如果 $\underset{灶\rightarrow 肆}{遭皂}蕤_{灶}$ 越园在 $[蕤_{灶},遭_{灶}]$ 上每一个点都具有某个性质 孕则存在一数 γ,使得点列$\left\{\frac{\gamma}{灶}\right\}$中有子列$\left\{\frac{\gamma}{灶_{躁}}\right\}$,在子列的每一个点$\frac{\gamma}{灶_{躁}}$也都具有某个性质 孕援

其证明与定理员的证明类似援只要将前面证明中所考虑的区间 [灶$\alpha_员$,灶$\beta_员$] 换为 $\left[\frac{\alpha_员}{灶},\frac{\beta_员}{灶}\right]$,数集 {曾曾跃晕$_员\alpha_员$} 换为 $\left\{曾 \middle| 曾约\frac{\beta_员}{晕_员}\right\}$,等等,定理圆便可得证援

注员摇在定理员中“正区间序列”的条件可改成“葬$_员$跃园”,在定理圆中该条件可改成“葬$_灶$≥园”援

注圆摇上述两个定理,对于负区间序列,也有类似的结果,这里不再赘述援

最后,作为定理员的应用,证明下例援

例摇设函数 枣在 (园,垣肄) 连续,且对任给的数 γ 跃园,都有

$$\lim_{灶\to肄} 枣(灶\gamma) 越园,$$

其中 灶为正整数,证明 $\lim_{灶\to垣肄}$ 枣(曾) 越园援

证摇用反证法援假若不然,则必存在一个 $\varepsilon_园$ 跃园及数列 {曾$_灶$},且 $\lim_{灶\to肄}$ 曾$_灶$ 越垣肄,使得

$$渣枣(曾_灶) 渣跃\varepsilon_园 (灶越员,圆,\cdots) 援$$

由于 枣的连续性,所以存在含有点 曾$_灶$ 的区间 [葬$_灶$,遭$_灶$],当 曾∈[葬$_灶$,遭$_灶$] 时,有

$$渣枣(曾) 渣跃\varepsilon_园 援$$

于是,根据定理员可知,存在一数 γ≥葬$_员$跃园以及无限多个正整数 灶$_噪$:

$$灶_员 约灶_圆 约\cdots 约灶_噪 约\cdots,$$

使得

$$渣枣(灶_噪\gamma) 渣\geqslant \varepsilon_园,$$

而这与已知条件相矛盾援由此即得所证援

圆援周期函数之和的周期性

这里，所谓周期函数，均指定义在数轴 砸上的实值周期函数，与人们对周期函数的直观认识一致援有关周期函数的重要意义是众所周知的援至于两个周期函数迭加的周期性，是一个古老而且十分有趣的问题，但是作为周期函数论尚处于研究与发展之中援

两个周期函数的周期对它们迭加后的周期性有着重大的影响援我们知道：定义域相同的两个周期函数，如果它们的周期是可公度的，则其和仍为周期函数援当两个周期函数的周期不可公度时，情况就复杂得多了援粤援蕴援列维坦在《概周期函数》一书中曾指出：两个连续周期函数，如果周期是不可公度的，那么这两个周期函数的和不是周期函数援但是，有关此论断的证明，本人至今尚未见到公开报道援事实上，考虑到以任意常数为周期的周期函数的存在性，仅有“周期是不可公度的”条件，显然该结论是欠妥当的：只要将条件改为“最小正周期是不可公度的”，结论就正确了援李运樵教授等在《微积分标准化试题集》一书中指出：周期函数

枣(曾) 越 曾原[曾]，早(曾) 越 泽葬曾，$\forall$ 曾 $\in$ 砸

的和 枣(曾) 垣 早(曾) 为非周期函数，但是没有证明援月援砸援盖尔鲍姆和 允援酝援贺奥姆斯特德在《分析中的反例》一书中证明了：周期函数 泽蚤灶曾 与 泽蚤灶 α曾 之和为非周期函数，其中 α 为无理数援这只是一个特例，并非一般援

在给出两个周期函数之和的周期性的一般化结论之前，我们先证明一个引理援

引理摇设 葬，遭是两个不可公度的正数，则存在数偶序列 (皂噪，灶噪)，噪越员，圆，猿，…，使得

$$\lim_{噪\to肆} (皂_噪葬 垣 灶_噪遭) 越 园，$$

其中 皂噪，灶噪 都是整数援

证摇为了确定起见，不妨设 园约葬约遭 且记 遭越葬园，葬越葬员援根据辗转相除的方法，存在惟一的正整数 贼员 及 葬圆 $\in$ (园，葬员)，使得

$$葬_园 越 贼_员葬_员 垣 葬_圆，$$

并且 葬员、葬圆 不可公度援同理，存在惟一的正整数 贼圆 及 葬猿 $\in$ (园，葬圆)，使得

$$葬_员 越 贼_圆葬_圆 垣 葬_猿，$$

且 葬圆、葬猿 不可公度援依此类推，存在惟一的正整数 贼噪 及 葬噪垣员 $\in$ (园，葬噪)，使得

葬噪垣员 越圆葬噪 垣葬噪原员，

且 葬噪，葬噪垣员不可公度（噪越猿，源，缘，…）援

因为 葬猿约葬圆及 葬猿≤葬员原葬圆，所以有

葬猿 约 员/圆 {葬圆 垣（葬员 原葬圆）} 越 葬员/圆 越 葬/圆；

又由于 葬噪垣员约葬噪及 葬噪垣员≤葬噪原员原葬噪，故有

葬噪垣员 约 员/圆 葬噪 约 员/源 葬噪原员 约… 约 员/圆噪 葬员摇（噪越圆，猿，源，…）援

考虑到

葬噪垣员 约葬噪，摇（噪越员，圆，猿，…），

于是有

遭噪→肆 葬噪 越园

但是

葬猿 越葬圆 原葬员 原葬圆 越原葬员垣遭越皂员葬垣灶员遭

其中 皂员越原员，灶员越员，又

葬源 越葬员 原葬猿 原葬圆 越（员原圆皂员）葬原圆灶员遭越皂圆葬垣灶圆遭

其中 皂圆越员原圆皂员，灶圆越原圆灶员约园，即 皂员与 皂圆，灶员与 灶圆均异号，且 渣皂圆渣跃渣皂员渣，渣灶圆渣≥渣灶员渣援一般，由数学归纳法可得

葬噪垣员 越葬噪原员 原葬噪 越（皂噪原圆葬垣灶噪原圆遭）原（皂噪原员葬垣灶噪原员遭）

越（皂噪原圆 原皂噪原员）葬垣（灶噪原圆 原灶噪原员）遭

越皂噪葬垣灶噪遭摇（噪越猿，源，缘，…）

其中整数 皂噪原员与 皂噪，灶噪原员与 灶噪均异号，且当 噪→肆时，有

渣皂噪原员渣约渣皂噪渣→肆，摇渣灶噪原员渣≤渣灶噪渣→肆援

摇摇综上，引理得证援

定理 员摇设 枣（曾）和 早（曾）是定义于数轴 砸上的周期函数，它们的最小正周期分别为 栽员，栽圆援如果 枣（曾），早（曾）至少有一个是连续的，且 栽员，栽圆不可公度，则枣（曾）垣早（曾）为非周期函数援

证摇为了确定起见，假设周期函数 枣（曾）在数轴 砸上连续援用反证法援假若不然，即 枣（曾）垣早（曾）是周期函数，那么必定存在一个正数 栽，∀曾∈砸，都有

枣（曾垣栽）垣早（曾垣栽）越枣（曾）垣早（曾），

即

枣（曾垣栽）原枣（曾）越早（曾）原早（曾垣栽）≡φ（曾）援

摇摇以下，首先证明 φ（曾）以 皂栽员垣灶栽圆为周期，其中 皂，灶为两个任意的整数援事实上，由于 枣（曾），早（曾）分别以 栽员，栽圆为周期，所以 φ（曾）既以 栽员为周期又以 栽圆为周

期，从而可知 φ(曾 必定以 皂栽员 垣灶栽圆 为周期(其中 皂，灶为任意整数)援于是，$\forall$曾$\in$砸，有

枣(曾垣栽垣皂栽员 垣灶栽圆) 原枣(曾垣皂栽员 垣灶栽圆) 越枣(曾垣栽) 原枣(曾)援

摇摇其次，证明 φ(曾 越悦(常数)，$\forall$曾$\in$砸援用反证法援假设存在 曾员$\neq$曾圆，使 φ(曾员) $\neq$ φ(曾圆) 援由于 枣(曾 的连续性，可知 φ(曾 连续，因此，存在 δ 跃园 使当 渣曾原曾圆渣约δ 时，有

φ(曾 $\neq$ φ(曾员) 援

因为 栽员 与 栽圆 不可公度，由引理可知，存在整数偶(皂园，灶园)，使

园约渣皂园栽员 垣灶园栽圆 渣约δ援

又存在整数 噪使

曾员 垣噪(皂园栽员 垣灶园栽圆) $\in$ (曾圆 原δ，曾圆 垣δ) 援

由于 φ(曾 是以 皂栽员 垣灶栽圆 为周期的(皂，灶为任意整数)，所以

φ(曾员 垣噪(皂园栽员 垣灶园栽圆)) 越φ(曾员) 援

而这与 曾$\in$(曾圆原δ，曾圆 垣δ) 时 φ(曾 $\neq$$\varphi$(曾员) 相矛盾援因此有

φ(曾 越悦，$\forall$曾$\in$砸援

摇摇最后，证明 悦越园援由于

枣(曾垣栽 原枣(曾 越悦，$\forall$曾$\in$砸，

所以对任意正整数 灶，都有

$$\text{枣(曾垣灶栽 原枣(曾 越} \sum_{\text{噪越员}}^{\text{灶}} \{\text{枣(曾垣噪栽 原枣(曾垣(噪原员)栽}\} \text{ 越灶悦援}$$

考虑到 枣(曾 是数轴 砸上的连续周期函数，在一个周期上的振幅为一定值，故必有 悦越园，即 $\forall$曾$\in$砸，有

枣(曾垣栽 原枣(曾 越园摇早(曾垣栽 原早(曾 越园

从而 栽既是 枣(曾 的周期又是 早(曾 的周期援由于 栽员 与 栽圆 分别为 枣(曾 与 早(曾 的最小正周期，所以存在两个正整数 责与 择使得

责栽员 越栽越择栽圆援

因而 栽员 与 栽圆 可公度，这与已知条件相矛盾援

综上，定理 员得证援

如果去掉定理 员中“枣(曾，早(曾 至少有一个是连续的”条件，结论未必成立援因此，在某种意义下，这个定理是“最佳可能”的援

作为定理 员的证明方法的一个应用，我们可以给出两个周期函数乘积的周期性的一个论断援

例 员摇设 枣(曾，早(曾 是定义于数轴 砸上的周期函数，它们的最小正周期分别为 栽员，栽圆援如果 枣(曾，早(曾 至少有一个是连续的，且 栽员，栽圆 不可公度，对任意曾$\in$砸，

都有 枣(曾 早(曾 ≠园则乘积 枣(曾 早(曾 不是周期函数援

其实，例 员的证明与定理 员的证明完全类似援采用反证法援若 枣(曾 连续，枣(曾 早(曾 是周期函数，则存在一正数 栽使得

枣(曾垣栽 早(曾垣栽 越枣(曾 早(曾，∀ 曾∈ 砸，

即

$$\frac{枣(曾垣栽}{枣(曾}\quad 越\frac{早(曾}{早(曾垣栽}\equiv \psi(曾，$$

且 ψ(曾 ≠园援可分三步证明：

(员 ψ(曾 以 皂栽员 垣灶栽圆 为周期；

(圆 ψ(曾 越悦(悦是非零常数)；

(猿 悦越员援

从而可得 栽员与 栽圆可公度，与题设矛盾援于是例 员获证援

有人曾以集合论为基础，建立加群的周期子集概念，定义了两个最小正周期不可公度的周期函数，给出了它们的和是周期函数的例子援但是，这两个周期函数在共同的定义域上的最小正周期是完全一样的，似乎与常规并不相符，有点艰涩无味援

由定理 员可知，要给出周期不可公度的两个周期函数之和为周期函数的例子(例 猿，除了要求这两个周期函数必须是不连续的外，还要满足以下必要条件援

定理 圆摇设 枣(曾 与 早(曾 都是定义在数轴 砸上的周期函数，它们的最小正周期分别为 栽员与 栽圆援如果 栽员与 栽圆不可公度，澡(曾 越枣(曾 垣早(曾 是周期函数，其周期为 栽猿跃园则 栽猿与 栽员(或 栽圆) 不可公度援

证摇用反证法援假若 栽猿与 栽员可公度，则必存在正整数 皂与 灶使得

皂栽猿 越灶栽员 ≡ 栽

于是周期函数

早(曾 越澡(曾 原枣(曾

是以 栽为周期的援考虑到 早(曾 以 栽圆为最小正周期，所以存在正整数 噪使得

灶栽员 越栽越噪栽圆援

即 栽员与 栽圆是可公度的，而这与已知条件相矛盾援因此，栽猿与 栽员不可公度援

同理可证，栽猿与 栽圆也不可公度援

定理 圆证毕援

例 圆摇证明周期函数

枣(曾 越曾原 [曾，

早(曾 越 { 员摇曾越灶±摇 (灶越园 依员 依圆…)，; 园摇曾∈ 砸赞灶± 渣灶越园 依员 依圆…}

的和 枣(曾 垣早(曾 不是周期函数，其中 [曾 为 曾的最大整数部分援

证摇显然 枣(曾 ,早(曾 的最小正周期 员与 π 是不可公度的摇假若 枣(曾 垣早(曾 是周期函数,则存在常数 栽跃园对任意 曾∈ 砸,都有

枣(曾垣栽 垣早(曾垣栽 越枣(曾 垣早(曾 ,

即

枣(曾垣栽 原枣(曾 越早(曾 原早(曾垣栽 援

令 曾越园得

枣(栽 原枣(园 越早(园 原早(栽 援

由定理 圆可知 栽与 员,栽与 π 均不可公度,所以 早(栽 越园摇于是,有

栽原 [栽 越员,

而这与 栽原 [栽 约员相矛盾,即 枣(曾 垣早(曾 不是周期函数援

为了将要构造我们所需要的例子 (例 猿 ,还要先给出全体实数的一个分类摇令

特别取 栽$_{员}$越/圆,栽$_{圆}$越/猿,栽$_{猿}$越员,则 栽$_{员}$,栽$_{圆}$,栽$_{猿}$显然是两两不可公度的正数,且当 躁,皂,灶是不全为零的整数时,躁垣皂√圆垣灶√猿≠园摇由此,定义 砸中的一个等价关系为:设 曾$_{员}$,曾$_{圆}$是两个实数,如果存在整数数组 躁,皂,灶,使得

曾$_{员}$原曾$_{圆}$越躁垣皂√圆垣灶√猿,

则称 曾$_{员}$与 曾$_{圆}$为等价数,记为 曾$_{员}$~曾$_{圆}$援

对任意实数 曾令

曾越 {赠渣赠~ 曾,赠∈ 砸 ,

称 曾为 曾的一个等价类摇所有等价类的全体记为 $\mathscr{A}$,即

$\mathscr{A}$ 越 {粤渣∃ 曾∈ 砸,粤越曾 援

摇摇定理 猿摇存在数集 耘⊂ 砸,对任给的 曾∈ 砸,都有惟一的一组数 (曾乙,躁,皂,灶 ,其中 曾乙∈ 耘,而 躁,皂,灶为整数,使得

曾越曾乙垣躁垣皂√圆垣灶√猿援 (员

摇摇证摇由上述对实数的分类可知,当 曾$_{员}$与 曾$_{圆}$不等价时,曾$_{员}$∩ 曾$_{圆}$≠∅摇这样,砸被分成了两两不相交的非空的等价类,并且有

砸 越 $\bigcup_{粤\in \mathscr{A}}$ 粤援

由选择公理,存在一选择函数 φ,使得 φ (粤 越曾乙,粤∈ $\mathscr{A}$,其中 曾乙∈ 粤⊂ 砸摇因此,取 耘越{曾乙渣曾乙越φ (粤 ,粤∈ $\mathscr{A}$} 摇那么,对任一实数 曾都有惟一的一组数 (曾乙,躁,皂,灶 ,使得

曾越曾乙垣躁垣皂√圆垣灶√猿,

其中 曾乙∈ 耘,而 躁,皂,灶为整数摇定理 猿证毕援

为方便起见,称定理 猿中的表达式 (员 为 曾关于 耘的分解式,并规定 园的分解式为

原

园垣园· 员垣园· √圆垣园· √猿

而这只要定义 φ(园) 越园即可援

例 猿摇下面构造所需要的例子援对任一实数 曾都有惟一的分解式 (员),定义

枣(曾) 越圆曾乙垣躁垣灶√猿

早(曾) 越曾乙原躁垣皂√圆

则

澡(曾) 越枣(曾) 垣早(曾) 越猿曾乙垣皂√圆垣灶√猿援

证明 枣(曾),早(曾),澡(曾) 是分别以 栽员 越√圆,栽圆 越√猿,栽猿 越员为最小正周期的周期函数,且均不连续援

证摇由于对任一实数 曾的分解式 (员) 是惟一的,所以

曾垣√圆越曾乙垣躁垣(皂 垣员) √圆垣灶√猿摇曾乙∈ 耘,

也惟一援因此,根据函数 枣(曾) 的定义,有

枣(曾垣√圆) 越圆曾乙垣躁垣灶√猿越枣(曾),摇曾∈ 砸援

即 栽员 越√圆是 枣(曾) 的一个周期援

再证明 栽员 越√圆是 枣(曾) 的最小正周期援而这只要证明 如果 栽是 枣(曾) 的周期,则 栽必为√圆的整数倍援为此,设 栽的分解式为

栽越曾园 垣躁园 垣皂园√圆垣灶园√猿 (圆)

其中 躁园,皂园,灶园 为一整数数组援因为 栽是 枣(曾) 的周期,所以

枣(栽) 越枣(园) 越园援

又由 枣(曾) 的定义,有

枣(栽) 越圆曾园 垣躁园 垣灶园√猿,

因此,有

园越圆曾园 垣躁园 垣灶园√猿援 (猿)

由式 (圆) 减去式 (猿),得

栽越原曾园 垣皂园√圆援 (源)

式 (圆) 加式 (源),得

圆栽越躁园 垣圆皂园√圆垣灶园√猿援 (缘)

这说明 圆栽~园即 圆栽是 园的等价类中的数,式 (缘) 是 圆栽的分解式,考虑到 圆栽还是 枣(曾) 的周期,得

园越枣(园) 越枣(圆栽) 越躁园 垣灶园√猿援 (远)

式 (缘) 减去式 (远) 后,两边同除以 圆得 栽越皂园√圆于是 栽员 越√圆确实是 枣(曾) 的最小正

周期援

最后证明 枣(曾) 不连续援因为对任意一组不全为零的整数 躁,皂,灶,都有

$$躁垣皂\sqrt{圆}垣灶\sqrt{猿}\neq 园援$$

所以对于 $\varepsilon_{园}$ 越$\frac{\sqrt{圆}}{圆}$跃园,任意 $\delta\in\left(园,\frac{\sqrt{圆}}{源}\right)$,由引理可知,存在整数数组 躁$_{园}$,皂$_{园}$,灶$_{园}$,使得

$$园约渣躁$_{园}$垣皂$_{园}\sqrt{圆}$垣灶$_{园}\sqrt{猿}$渣约\frac{\delta}{圆},$$

且 皂$_{园}\neq$ 园援取 曾$_{园}$越园,曾越曾$_{园}$垣躁$_{园}$垣皂$_{园}\sqrt{圆}$垣灶$_{园}\sqrt{猿}$,其中 曾$\in$ 耘$\cap\left(原\frac{\delta}{圆},\frac{\delta}{圆}\right)$,虽然

$$渣曾原曾_{园}渣\leqslant 渣曾渣垣渣躁_{园}垣皂_{园}\sqrt{圆}垣灶_{园}\sqrt{猿}渣约\delta,$$

但是

$$摇渣枣(曾)原枣(曾_{园})渣越渣园曾垣躁_{园}垣灶_{园}\sqrt{猿}渣$$

$$越渣园曾垣(躁_{园}垣皂_{园}\sqrt{圆}垣灶_{园}\sqrt{猿})原皂_{园}\sqrt{圆}渣$$

$$\geqslant 渣皂_{园}\sqrt{圆}渣原园渣曾渣原渣躁_{园}垣皂_{园}\sqrt{圆}垣灶_{园}\sqrt{猿}渣跃\varepsilon_{园}援$$

即 枣(曾) 不连续援

同理可证,早(曾) 与 澡(曾) 是分别以 栽$_{园}$越$\sqrt{猿}$,栽$_{猿}$越员为最小正周期的不连续的周期函数援

综上,例 猿证毕援

总之,我们的结论是:设 枣(曾) 与 早(曾) 是定义于数轴 砸上的最小正周期不可公度的两个周期函数,则当它们至少有一个连续时,其和 枣(曾) 垣早(曾) 不是周期函数;当它们均不连续时,其和 枣(曾) 垣早(曾) 可能是非周期函数,也可能是周期函数援

顺便还要指出,不难证明:如果周期函数 枣为非常值的连续函数,则必有最小正周期援事实上,假若不然,设 枣无最小正周期援取定一点 曾$_{园}$,因为 枣在点 曾$_{园}$连续,可以任给 ε 跃园,存在 δ 跃园,只要 渣曾原曾$_{园}$渣约δ,就有

$$渣枣(曾)原枣(曾_{园})渣约\varepsilon援$$

根据反证法的假设,存在 枣的一个周期 栽,使得 园约栽约δ援因此,对任意给定的 赠,记 $\left[\frac{赠原曾_{园}}{栽}\right]$越灶(整数部分),则 园$\leqslant$ 赠原灶栽原曾$_{园}$约栽约δ,有

$$渣枣(赠原灶栽)原枣(曾_{园})渣约\varepsilon,$$

考虑到 栽是 枣的周期,所以 枣(赠原灶栽) 越枣(赠)援于是,可得

$$渣枣(赠)原枣(曾_{园})渣约\varepsilon援$$

由于 赠与 曾$_{园}$是两个定点,ε 为任意正数,便得 枣(赠) 越枣(曾$_{园}$) 援又因为 赠的任意性,可知对任意 曾都有 枣(曾) 越枣(曾$_{园}$) ,即 枣为常值函数,矛盾援

猿援关于 砸蚤藻皂葬灶灶积分的定义

定积分定义中“两个任意性”的实质

摇摇设有限集 栽越{曾园,曾员,…,曾灶}，满足条件

$$葬越曾_{园} 约曾_{员} 约… 约曾_{灶} 越遭$$

则称 栽是区间 [葬,遭]的一个划分援

摇摇定义摇设函数 枣定义于区间 [葬,遭]，栽是 [葬,遭]的任意一个划分，记 $\Delta 曾_{蚤}越曾_{蚤}原曾_{蚤原员}$，$\lambda(栽) 越\underset{员\leqslant 蚤\leqslant 灶}{皂葬曾}\{\Delta 曾_{蚤}\}$ 援在每个子区间 $[曾_{蚤原员},曾_{蚤}]$ 上任意取一点 $\xi_{蚤}$(蚤越员,圆,…,灶)，作 砸蚤藻皂葬灶灶和

$$砸(枣,栽,\xi) 越\sum_{蚤越员}^{灶} 枣(\xi_{蚤})\Delta 曾_{蚤}援$$

若有一常数 陨对于任给 ε 跃园存在 δ 跃园使当 λ(栽) 约δ 时，就有

$$渣砸(枣,栽,\xi) 原陨渣约\varepsilon，$$

则称当 $\lambda(栽)\to 园$时 砸(枣,栽,ξ) 以 陨为极限，即

$$\underset{\lambda(栽)\to 园}{造蚤皂} 砸(枣,栽,\xi) 越陨，$$

并称函数 枣在区间 [葬,遭] 上 砸蚤藻皂葬灶灶可积，陨为 枣在 [葬,遭] 上的定积分，记为 $\int_{葬}^{遭} 枣(曾)凿曾$，即

$$\int_{葬}^{遭} 枣(曾)凿曾越陨援$$

摇摇这个定义的几何意义与物理意义十分清楚，它为定积分的实际应用提供了分析问题的思路、处理问题的方法，这是它的优点援但是，由于在这个定义中有“两个任意性”，即任意划分 栽与任意选取中间点集 ξ 越{$\xi_{员}$,$\xi_{圆}$,…,$\xi_{灶}$}，所以这里的极限并不是通常的极限，而是一种新类型的极限，因此就使得定积分概念显得很复杂，难以掌握其实质援

摇摇其实，定积分定义中“两个任意性”的实质，只有“一个任意性”起作用，即或者

对特殊的划分 栽任取 ξ,或者对任意划分 栽取特殊的 ξ 均可援

鉴于函数 枣在区间 [葬,遭] 上 砸藻蚤皂葬灶灶 可积,必有界,所以我们可以仅就有界函数来讨论这个问题援设函数 枣在区间 [葬,遭] 上有界,栽越{曾园,曾员,…,曾灶} 是 [葬,遭] 的任意一个划分,记

$$酝_{蚤} 越 泽怎责\{枣(曾) \mid 曾_{蚤原员} \leq 曾 \leq 曾_{蚤}\},$$

$$皂_{蚤} 越 蚤灶枣\{枣(曾) \mid 曾_{蚤原员} \leq 曾 \leq 曾_{蚤}\},$$

$$哉(枣,栽) 越 \sum_{蚤越员}^{灶} 酝_{蚤}\Delta 曾_{蚤},$$

$$蕴(枣,栽) 越 \sum_{蚤越员}^{灶} 皂_{蚤}\Delta 曾_{蚤},$$

由于

$$蚤灶枣\{枣(曾) \mid 葬 \leq 曾 \leq 遭\}\cdot(遭原葬) \leq 蕴(枣,栽)$$

$$\leq 哉(枣,栽) \leq 泽怎责\{枣(曾) \mid 葬 \leq 曾 \leq 遭\}\cdot(遭原葬),$$

所以对任意划分 栽,哉(枣,栽) 的下确界与 蕴(枣,栽) 的上确界都存在且有限援令

$$\bar{陨}(枣) 越 \mathop{蚤灶枣}_{栽} 哉(枣,栽),$$

$$\mathop{陨}_{原}(枣) 越 \mathop{泽怎责}_{栽} 蕴(枣,栽),$$

则 $\mathop{陨}_{原}(枣) \leq \bar{陨}(枣)$援众所周知,有界函数 枣在区间 [葬,遭] 上 砸藻蚤皂葬灶灶 可积的充要条件是 $\bar{陨}(枣) 越 \mathop{陨}_{原}(枣)$援

定理 员援猿 设函数 枣在区间 [葬,遭] 上有界,划分 栽越{曾园,曾员,…,曾灶} 将 [葬,遭] 等分成几个子区间,对任意 $\xi_{蚤} \in [曾_{蚤原员},曾_{蚤}]$ (蚤越员,圆,…,灶),若极限

$$\lim_{灶\to 肄} \sum_{蚤越员}^{灶} 枣(\xi_{蚤}) \frac{遭原葬}{灶} 越 陨$$

其中 陨为常数援即任给 ε 跃园,存在正整数 晕,当 灶跃晕时,有

$$\left| \sum_{蚤越员}^{灶} 枣(\xi_{蚤}) \frac{遭原葬}{灶} 原 陨 \right| 约 \varepsilon,$$

则函数 枣在区间 [葬,遭] 上 砸藻蚤皂葬灶灶 可积,且 $\int_{葬}^{遭} 枣(曾)凿曾 越 陨$援

证援由于对任意 $\xi_{蚤} \in [曾_{蚤原员},曾_{蚤}]$ (蚤越员,圆,…,灶),有

$$\lim_{灶\to 肄} \sum_{蚤越员}^{灶} 枣(\xi_{蚤}) \frac{遭原葬}{灶} 越 陨$$

所以

$$\lim_{灶\to 肄} \left\{ \sum_{蚤越员}^{灶} \mathop{泽怎责}_{\xi_{蚤}} 枣(\xi_{蚤}) \frac{遭原葬}{灶} \right\} 越 陨$$

$$\lim_{灶\to 肄} \left\{ \sum_{蚤越员}^{灶} \mathop{蚤灶枣}_{\xi_{蚤}} 枣(\xi_{蚤}) \frac{遭原葬}{灶} \right\} 越 陨援$$