数学分析解题指南

北京大学数学科学学院
林源渠　方企勤　编

北 京 大 学 出 版 社
· 北　　京 ·

图书在版编目(CIP)数据

数学分析解题指南/林源渠,方企勤编. —北京: 北京大学出版社,2003.11

ISBN 7-301-06550-7

Ⅰ.数… Ⅱ.①林… ②方… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 083005 号

书　　名: 数学分析解题指南

著作责任者: 林源渠　方企勤　编

责 任 编 辑: 刘　勇

标 准 书 号: ISBN 7-301-06550-7/O・0579

出 版 发 行: 北京大学出版社

地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址: http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

890 mm×1240 mm　A5　14.75 印张　420 千字

2003 年 11 月第 1 版　2003 年 11 月第 1 次印刷

印　　数: 0001—4000 册

定　　价: 20.00 元

内 容 简 介

本书是大学生学习"数学分析"课的辅导教材,可与国内通用的《数学分析》教材同步使用,特别适合于作为《数学分析新讲》(北京大学出版社,1991)的配套辅导教材。本书的两位作者在北京大学从事数学分析和高等数学教学工作近 40 年,具有丰富的教学经验。全书共分 7 章,内容包括:分析基础,一元函数微分学,一元函数积分学,级数,多元函数微分学,多元函数积分学,典型综合题分析。在每一节中,设有内容提要、典型例题分析,以及供学生自己做的练习题等部分,书末附有答案,对证明题的大部分给出了提示或解答。本书许多题给出了多种多样解法,某些解法是吸取学生试卷中的想法演变而得的,特别是毕业于北京大学数学系的、国内外知名的当今青年数学家们在学生阶段的习题课上和各种测验中表现出来的睿智给本书增添了不可多得的精彩。本书的另外一大特色是:辅导怎样"答"题的同时,还通过"敲条件,举反例"等方式引导学生如何"问"问题,就是如何给自己"提问题"。

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范学校各专业大学生学习数学分析的学习辅导书。对新担任数学分析课程教学任务的青年教师,本书是较好的教学参考书;对报考硕士研究生的大学生来说,也是考前复习的良师益友。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

作 者 简 介

林源渠　北京大学数学科学学院教授。1965 年毕业于北京大学数学力学系，从事高等数学、数学分析等教学工作 38 年，具有丰富的教学经验；林源渠教授对数学分析解题思路、方法与技巧有深入研究、系统归纳和总结。多年参加北京大学数学类硕士研究生入学考试试卷命题与阅卷工作。参加编写的教材有《泛函分析讲义》(上册)、《数值分析》、《数学分析习题课教材》、《数学分析习题集》等。

方企勤　北京大学数学科学学院教授。1957 年毕业于北京大学数学力学系，从事数学分析、高等数学等教学工作 40 余年，具有丰富的教学经验；方企勤教授对数学分析造诣甚深，不仅对传统的数学分析方法与技巧有深入研究，而且有许多创新工作。多年参加北京大学数学类硕士研究生入学考试试卷命题与阅卷工作。参加编写的教材有《复变函数》、《数学分析》、《数学分析习题课教材》、《数学分析习题集》等。

序　　言

“数学分析”是数学系本科生一门重要的基础课。数学分析课程内容的更新，通过数学分析教材的编写得到很好的体现。恰当的习题配置和解题指导是数学分析教材不可或缺的一部分。事实上，学生要想较熟练地掌握数学分析的思想、方法和技巧，非要做一定数量的习题不可。正是从这一观点出发，作者十多年前在北京大学出版社和台湾儒林出版社出版了《数学分析习题课教材》。十多年来，该书早已不易找到了。近些年来，经常收到各地读者来信建议再版该书或询问再版信息。作者与北京大学出版社商量之后觉得，根据当前需要，该书题材有必要修订一番，使得面向更多读者，修订后书名改为《数学分析解题指南》。这个修订不仅更新了体例，还加入了不少新颖的题材，更换了一些旧的例题和习题。全书共分7章，内容包括：分析基础，一元函数微分学，一元函数积分学，级数，多元函数微分学，多元函数积分学，典型综合题分析。在每一节中，设有内容提要、典型例题分析，以及供学生自己做的练习题等部分。书末对练习题中的计算题附有答案，对证明题的大部分给出了提示或解答。

在题目的安排上，我们把较难的题或有代表性的题归为典型例题，因有了典型例题的示范和启示，这些练习题相对容易些。练习题中有个别的难题，目的是使读者知道题目所给出的事实，这类题目的提示在书末所示尤为详细。在选择题目时，是按照几个有意义的主题来安排的，尽可能把有紧密联系的题编在一起。本书许多题目给出了多种多样解法，从不同侧面给予归纳、总结，某些解法是吸取学生试卷中的想法演变而得的，特别是毕业于北京大学数学系的、国内外当今知名的青年数学家们在学生阶段的习题课上和各种测验中表现出来的睿智给本书增添了不可多得的精彩。本书的另外一大特色是：辅导怎样“答”题的同时，还通过“敲条件，举反例”等方式引导学生如何“问”问题，就是如何给自己“提问题”，进一步去钻研问题。我们在

某些题后加了评注，有的是想指出题目的作用和意义，使学生对问题的实质有所理解，而不停留于只会解一个问题；有的是把学生接触过的内容归纳起来，哪些容易出错，哪些有简捷思路等，使知识更系统化、条理化。本书汇集了北京大学数学系几代教师从事数学分析课程教学，和指导学生进行“三基”——基本概念、基本理论和基本技能训练所总结的教学经验，其中也包括两位作者多年从事数学分析课程教学工作所积累的教学经验。

本书作者方企勤教授是第一作者的老师，我们于 2003 年 1 月把书稿交于北京大学出版社，不幸方企勤教授于 2 月因病逝世。他毕一生心血从事数学分析与函数论课程的教学工作。他对数学分析造诣甚深，不仅对传统的数学分析方法与技巧有深入研究，而且有许多独创性的工作。方企勤教授的过早逝世给本书带来无法弥补的损失。为了他的四十多年教学经验不致失传，本书第一作者虽然尽了最大努力，完成本书的最后修订、校对等工作，但因水平有限，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范学校数学系及应用数学系、力学系各专业大学生学习数学分析的辅导教材。对新担任数学分析课程教学任务的青年教师，本书是较好的教学参考书；对报考硕士研究生的大学生来说，也是考前复习的良师益友。

本书责任编辑刘勇先生对本书提出许多宝贵意见，付出了辛勤劳动。我们表示衷心的感谢。

林源渠

2003 年 3 月于北京大学

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　分 析 基 础

§ 1　实数公理、确界、不等式

内 容 提 要

1. **实数公理**

在集合 R **内定义了分别称为加法**“ + ”**和乘法**“ · ”**的运算**, **并定义了元素间的顺序关系**“ < ”. **若** R **满足下面三条公理**, **则称** R **为实数域或实数空间**.

1) **域的公理**

(1) **交换律**　$x+y=y+x$, $x\cdot y=y\cdot x$;

(2) **结合律**　$(x+y)+z=x+(y+z)$, $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$;

(3) **存在元素** 0 **与** 1, $0\neq1$, **满足**: $x+0=x$, $x\cdot1=x$;

(4) **存在负元素**, **对非零元素存在反元素**, **满足**:

$$x+(-x)=0,\quad x\cdot x^{-1}=1(x\neq0);$$

(5) **分配律**　$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

2) **全序公理**

(1) "　$x, y\in R$, **以下三个关系** $x<y$, $x=y$, $y<x$ **有且仅有一个成立**;

(2) **传递性**　$x<y, y<z$　　$x<z$;

(3) $x<y, z\in R$　　$x+z<y+z$;

(4) $x<y, z>0$　　$x\cdot z<y\cdot z$.

3) **连通公理**

若集合 R **的子集** A, B **满足**:

(1) $A\neq$　, $B\neq$　(**不空**);

(2) $A\cup B=R$(**不漏**);

(3) "　$x\in A$, "　$y\in B$　　$x<y$(**不乱**),

则或集合 A **有最大元素而** B **无最小元素**, **或集合** B **有最小元素而** A **无最大元素**.

2. **上确界定义**

定义　**设集合** E　R, **若数** M **满足**:

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(1) $\forall\ x\in E \quad x\leq M$(即 M 为 E 的一个上界);

(2) 若 $\widetilde{M}$ 是 E 的上界, 则 $M\leq\widetilde{M}$(即 M 为 E 的上界中最小者),

则称 M 是集合 E 的上确界, 记作 $M=\sup E$ 或 $M=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$.

上确界定义的等价形式:

设集合 $E \quad R$, 若 $\exists\ M\in R$ 满足:

(1) $\forall\ x\in E \quad x\leq M$(即 M 为 E 的一个上界);

(2) $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ x_1\in E$, 使得 $x_1>M-\varepsilon$(这表示 $M-\varepsilon$ 就不是上界了),

则称 M 是集合 E 的上确界, 记作 $M=\sup E$ 或 $M=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$.

定理　非空有上界的数集必有上确界.

3. 绝对值不等式

$$-r\leq x\leq r \quad |x|\leq r, \quad |x\cdot y|=|x|\cdot|y|,$$
$$|x+y|\leq|x|+|y|.$$

典型例题分析

例 1　设 $a\leq c\leq b$, 求证: $|c|\leq\max\{|a|, |b|\}$.

证法 1

$$\max\{|a|, |b|\}\geq|b|\geq b\geq c, \tag{1.1}$$
$$-\max\{|a|, |b|\}\leq-|a|\leq a\leq c. \tag{1.2}$$

联合(1.1)与(1.2)即得 $|c|\leq\max\{|a|, |b|\}$.

证法 2　分 $c\geq0$ 和 $c<0$ 两种情况考虑. 当 $c\geq0$ 时,

$$c\leq b \quad |c|\leq|b|\leq\max\{|a|, |b|\};$$

当 $c<0$ 时, $0\leq-c\leq-a \quad |c|\leq|a|\leq\max\{|a|, |b|\}$.

例 2　设 $a, b>0$, 求证:

(1) 当 $p>1$ 时, $a^p+b^p\leq(a+b)^p$;

(2) 当 $0<p<1$ 时, $a^p+b^p\geq(a+b)^p$.

证　(1) 当 p 是正整数时, 利用二项式公式

$$(a+b)^p=a^p+C_p^1a^{p-1}b+C_p^2a^{p-2}b^2+\cdots+b^p.$$

当 p 为一般实数时, 不能用二项式公式, 但借鉴 $p=2$ 时的推导:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)\geq a^2+b^2,$$

我们可以令 $p=1+h(h>0)$, 则有

$$(a+b)^p=(a+b)(a+b)^h=a(a+b)^h+b(a+b)^h$$

$$\geq a \cdot a^{h} + b \cdot b^{h} = a^{p} + b^{p}.$$

(2) 令 $p = 1 - h\,(0 < h < 1)$, 则有

$$(a+b)^{p} = (a+b)(a+b)^{-h} = a(a+b)^{-h} + b(a+b)^{-h}$$

$$\leq a \cdot a^{-h} + b \cdot b^{-h} = a^{p} + b^{p}.$$

例 3 设 $f(x)$, $g(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$\inf_{x \in X}\{f(x) + g(x)\} \leq \begin{cases} \inf\limits_{x \in X}\{f(x)\} + \sup\limits_{x \in X}\{g(x)\}, \\ \sup\limits_{x \in X}\{f(x)\} + \inf\limits_{x \in X}\{g(x)\}. \end{cases}$$

证 由下确界定义有

$$\inf_{x \in X}\{f(x) + g(x)\} \leq f(x) + g(x)$$

$$\leq f(x) + \sup_{x \in X} g(x) \quad (\forall x \in X).$$

移项即得

$$\inf_{x \in X}\{f(x) + g(x)\} - \sup_{x \in X} g(x) \leq f(x) \quad (\forall x \in X).$$

由下确界定义有

$$\inf_{x \in X}\{f(x) + g(x)\} - \sup_{x \in X}\{g(x)\} \leq \inf_{x \in X}\{f(x)\},$$

即得要证的第一式, 又因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 所处的地位是对称的, 故第二式也成立.

评注 解这类问题的一般方法是: 先把三个集合

$$\{f(x)\}, \quad \{g(x)\}, \quad \{f(x) + g(x)\}$$

中的两个放大或缩小成上、下确界, 即得第三个集合的下界或上界, 从而得到上、下确界.

练 习 题 1.1

1.1.1 设 $\max\{|a+b|, |a-b|\} < \frac{1}{2}$, 求证: $|a| < \frac{1}{2}$, $|b| < \frac{1}{2}$.

1.1.2 求证: 对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 有 $\max\{|a+b|, |a-b|, |1-b|\} \geq \frac{1}{2}$.

1.1.3 求证: 对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 有

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2};$$

并解释其几何意义.

1.1.4 设 $f(x)$ 在集合 X 上有界, 求证:

$$|f(x)-f(y)|\le \sup_{x\in X} f(x)-\inf_{x\in X} f(x)\quad (\forall x,y\in X).$$

1.1.5 **设** $f(x),g(x)$ **在集合** X **上有界,求证:**

$$\inf_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le \inf_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}$$
$$\le \inf_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\};$$
$$\sup_{x\in X}\{f(x)\}+\inf_{x\in X}\{g(x)\}\le \sup_{x\in X}\{f(x)+g(x)\}$$
$$\le \sup_{x\in X}\{f(x)\}+\sup_{x\in X}\{g(x)\}.$$

§ 2 函 数

内 容 提 要

1. **函数概念**

定义 给定数集合 X,Y,如果有某种对应法则 f,使得对于每一个元素 $x\in X$,都存在惟一的 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 的函数或映射,记作 $f: X\to Y$. f 在点 x 处的值记作 $y=f(x)$.

X 称为 f 的定义域,Y 称为 f 的取值域,

$$f(X)\stackrel{\text{定义}}{=}\{f(x)\mid x\in X\}$$

称为 f 的值域. 当我们只给出对应法则与定义域时,约定取值域即为值域.

若 $x_1\ne x_2 \Rightarrow f(x_1)\ne f(x_2)$ 或 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$,则称 f 为单射;

若 $f(X)=Y$,则称 f 为满射;

若 f 既是单射又是满射,则称 f 为双射或一一对应.

2. **反函数**

定义 给定 $f: X\to Y$,若 $\forall y\in Y$,方程 $f(x)=y$ 在 X 上有且仅有一解,则由此定义一个从 Y 到 X 的函数,称为 f 的反函数,记作 $f^{-1}: Y\to X$.

$f: X\to Y$ 有反函数的充分必要条件是 f 是一一对应的. 若 $f(x)$ 在 X 上严格单调,则 f 的反函数存在.

$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形相同,然而,$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形不同,它们关于直线 $y=x$ 对称.

典型例题分析

例 1 设函数 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增加,求证:函数

$$\varphi(x)\stackrel{\text{定义}}{=}\max\{f(x),g(x)\},\qquad \psi(x)\stackrel{\text{定义}}{=}\min\{f(x),g(x)\}$$

也在(a,b)上严格单调增加.

证　$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$且设 $x_2 > x_1$, 因为 $f(x), g(x)$在(a,b)上严格单调增加, 所以 $f(x_2) > f(x_1), g(x_2) > g(x_1)$. 于是

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x_2) = \max\{f(x_2), g(x_2)\} > f(x_2) > f(x_1) \\ \varphi(x_2) = \max\{f(x_2), g(x_2)\} > g(x_2) > g(x_1)\end{array}\right\} \quad \varphi(x_2) > \varphi(x_1).$$

同理可证 $\psi(x)$在(a,b)上严格单调增加.

例 2　(1) 问 $f(x) = x - [x]$是否是周期函数? 并画出它的图形(其中$[x]$表示 x 的整数部分).

(2) 两个周期函数之和是否一定是周期函数?

解　(1) 因为$[x] \leq x < [x] + 1$, 所以

$$[x] + 1 \leq x + 1 < [x] + 1 + 1.$$

按$[x]$的定义, 即得$[x+1] = [x] + 1$. 从而

$$f(x+1) = x + 1 - [x+1] = x - [x] = f(x),$$

即 $f(x)$是以 1 为周期的周期函数. 如图 1.1 所示.

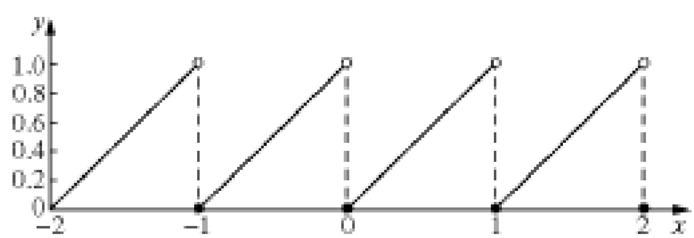

图　1.1

(2) 答案是: 不一定. 例如, 函数 $x - [x] + \sin x$ 就不是周期函数.

例 3　设 $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 \leq x < 1)$.

(1) 将 $f(x)$延拓到$(-1, 1)$, 使其成为偶函数, 即找一个偶函数

$$F(x) \quad (|x| < 1),$$

使得

$$F(x) = f(x) \quad (0 \leq x < 1).$$

(2) 将 $f(x)$延拓到$(-\infty, +\infty)$, 使其成为以 1 为周期的周期函数.

解　(1) $F(x) = \sqrt{|x|}$;　　　(2) $F(x) = \sqrt{|x - [x]|}$.

例 4　设 $f(x)$既关于直线 $x = a$ 对称, 又关于直线 $x = b$ 对称, 已知 $b > a$, 求证: $f(x)$是周期函数并求其周期.

证　由已知

$$f(a-x)=f(a+x)\xrightarrow{t=a+x}f(2a-t)=f(t),\qquad(2.1)$$

$$f(b-x)=f(b+x)\xrightarrow{t=b+x}f(2b-t)=f(t),\qquad(2.2)$$

$$f(x)\xrightarrow[t=x]{(2.1)}f(2a-x)\xrightarrow[t=2a-x]{(2.2)}f(2b-(2a-x))=f(x+2(b-a)).$$

故 $f(x)$ **是周期函数，并且其周期是** $2(b-a)$.

评注　本例给出利用函数图像特性判定函数为周期函数，并同时求得周期的方法.

例 5　**求函数** $y=2x+|2-x|(-\infty<x<+\infty)$ **的反函数，并画出它的图形.**

解　" y 视 x 为未知数，解方程 $2x+|2-x|=y$. 为了去掉绝对值，将方程改写为

$$y=\begin{cases}x+2 & (x\leq 2),\\ 3x-2 & (x>2)\end{cases}\qquad x=\begin{cases}y-2 & (y\leq 4),\\ \dfrac{y+2}{3} & (y>4)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x,y\text{互换}}\quad y=\begin{cases}x-2 & (x\leq 4),\\ \dfrac{x+2}{3} & (x>4).\end{cases}$$

如图 1.2 所示.

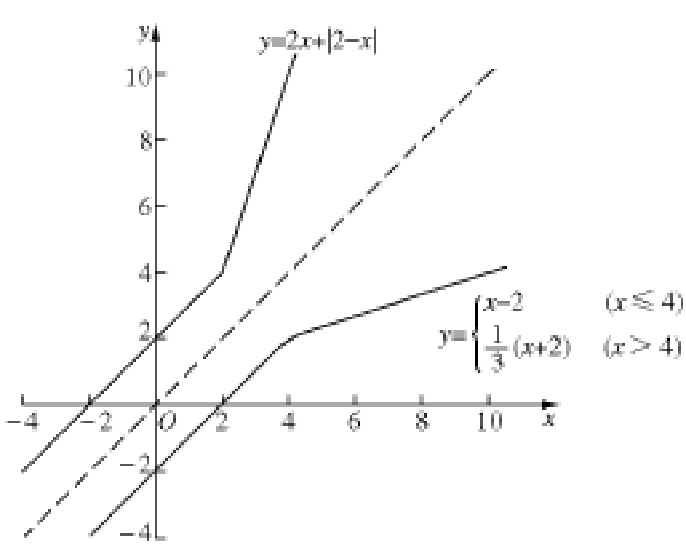

图　1.2

例 6　**设** $f: X\to Y,\ g: Y\to X$. **求证:**

(1) 若 $g[f(x)]=x(\forall x\in X)$,则 f 为单射,g 为满射;

(2) 若 $g[f(x)]=x(\forall x\in X)$,$f[g(y)]=y(\forall y\in Y)$,则 f 与 g 互为反函数.

证　(1) $\forall x_1\in X$,由条件得 $g[f(x_1)]=x_1$,即 $\exists y_1=f(x_1)$ 使得 $g(y_1)=x_1$,故 g 为满射.

若 $f(x_1)=f(x_2)$,则由条件推出 $x_1=g[f(x_1)]=g[f(x_2)]=x_2$,即 f 为单射.

评注　只假定 $g[f(x)]=x(\forall x\in X)$,一般推不出 f 为满射、g 为单射.例如

$$f:[0,1]\to[-1,1],\quad g:[-1,1]\to[0,1],$$
$$x\mapsto\sqrt{x},\qquad\qquad x\mapsto x^2.$$

虽然 $g[f(x)]=x(\forall x\in[0,1])$,但是

$$f[g(x)]=|x|\quad(\forall x\in[-1,1]).$$

由此可见,f 非满射,g 也非单射.

(2) 所给条件表明,f,g 为双射.因此 f 和 g 的反函数都存在.$f[g(y)]=y(\forall y\in Y)$意味着 $g(y)$是方程

$$f(x)=y \tag{2.3}$$

的解.又因为 f 是单射,所以 $g(y)$是方程(2.3)的惟一解.按定义即有 $g=f^{-1}$.同理 $f=g^{-1}$.

练 习 题 1.2

1.2.1　设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$. (1) 求证: $f(x)$是奇函数;(2) 求证: $|f(x)|\leq 2$;(3) 求$(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次}})(x)$.

1.2.2　设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上定义,$a>0$, $b>0$.求证:

(1) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调下降,则 $f(a+b)\leq f(a)+f(b)$;

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调上升,则 $f(a+b)\geq f(a)+f(b)$.

1.2.3　利用上题证明: 当 $a>0$, $b>0$ 时,有

(1) 当 $p>0$ 时,$(a+b)^p\geq a^p+b^p$;

(2) 当 $0<p<1$ 时,$(a+b)^p\leq a^p+b^p$.

1.2.4　设 $f(x)$在 $\mathbb{R}$ 上定义,且 $f(f(x))\equiv x$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com