

普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学分析教程

(下册)

常庚哲 史济怀 编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等院校“十五”国家级规划教材，是在1998年江苏教育出版社出版的《数学分析教程》的基础上作了较大的改动而成的，原书在全国同类教材中有非常积极的影响。

本书分上、下两册。下册内容包括：反常积分，Fourier分析，多变量函数的连续性，多变量函数的微分学，隐函数和隐映射定理，曲面的表示与逼近，多重积分，曲线积分，曲面积分，场的数学，含参变量积分等。

本书可供综合性大学和理工院校数学系作为教材使用，也可作为其他科研人员的参考书。

图书在版编目

数学分析教程·下/常庚哲，史济怀编．—北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7 - 04 - 011921 - 8

学校—教材 .017

中国版本图书馆 CIP 数据核字

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网 址	http: www.hep.edu.cn
传 真	010 - 64014048		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			
开 本	787 × 960 1/16	版 次	年 月第 版
印 张	25.75	印 次	年 月第 次印刷
字 数	490 000	定 价	26.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

策划编辑 王 瑜
加工编辑 高尚华 文小西
封面设计 于 涛
责任绘图 朱 静
版式设计 马静如
责任校对 存 怡
责任印制

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址：

电 话：

传 真：

E - mail:

地 址：北京市东城区沙滩后街 55 号

邮 编：100009

目 录

第 11 章	反常积分	1
§ 11.1	非负函数无穷积分的收敛判别法	1
§ 11.2	无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法	5
§ 11.3	瑕积分的收敛判别法	11
第 12 章	Fourier 分析	20
§ 12.1	周期函数的 Fourier 级数	20
§ 12.2	Fourier 级数的收敛定理	28
§ 12.3	Fourier 级数的 Cesàro 求和	40
§ 12.4	平方平均逼近	47
§ 12.5	Fourier 积分和 Fourier 变换	57
第 13 章	多变量函数的连续性	69
§ 13.1	n 维 Euclid 空间	69
§ 13.2	\mathbf{R}^n 中点列的极限	74
§ 13.3	\mathbf{R}^n 中的开集和闭集	77
§ 13.4	列紧集和紧致集	84
§ 13.5	集合的连通性	87
§ 13.6	多变量函数的极限	90
§ 13.7	多变量连续函数	95
§ 13.8	连续映射	102
第 14 章	多变量函数的微分学	107
§ 14.1	方向导数和偏导数	107
§ 14.2	多变量函数的微分	111
§ 14.3	映射的微分	116
§ 14.4	复合求导	119
§ 14.5	拟微分平均值定理	124
§ 14.6	隐函数定理	127
§ 14.7	隐映射定理	135
§ 14.8	逆映射定理	143
§ 14.9	高阶偏导数	148

	§ 14.10 Taylor 公式	154
	§ 14.11 极值	158
	§ 14.12 条件极值	167
第 15 章	曲面的表示与逼近	177
	§ 15.1 曲面的显式方程和隐式方程	177
	§ 15.2 曲面的参数方程	182
	§ 15.3 凸曲面	188
	§ 15.4 Bernstein - Bézier 曲面	192
第 16 章	多重积分	197
	§ 16.1 矩形区域上的积分	198
	§ 16.2 可积函数类	204
	§ 16.3 矩形区域上二重积分的计算	212
	§ 16.4 有界集合上的二重积分	216
	§ 16.5 有界集合上积分的计算	220
	§ 16.6 二重积分换元	226
	§ 16.7 三重积分	235
	§ 16.8 n 重积分	245
	§ 16.9 重积分物理应用举例	253
第 17 章	曲线积分	258
	§ 17.1 第一型曲线积分	258
	§ 17.2 第二型曲线积分	262
	§ 17.3 Green 公式	269
	§ 17.4 等周问题	275
第 18 章	曲面积分	279
	§ 18.1 曲面的面积	279
	§ 18.2 第一型曲面积分	286
	§ 18.3 第二型曲面积分	289
	§ 18.4 Gauss 公式和 Stokes 公式	297
	§ 18.5 微分形式和外微分运算	305
第 19 章	场的数学	311
	§ 19.1 数量场的梯度	311
	§ 19.2 向量场的散度	313
	§ 19.3 向量场的旋度	319
	§ 19.4 有势场和势函数	322
	§ 19.5 正交曲线坐标系中梯度、散度和旋度的表达式	328

第 20 章	含参变量积分	335
§ 20.1	含参变量的常义积分	335
§ 20.2	含参变量反常积分的一致收敛	342
§ 20.3	含参变量反常积分的性质	351
§ 20.4	函数和 B 函数	364
§ 20.5	n 维球的体积和面积	377
附录	问题的解答与提示	380

第 11 章 反常积分

在 § 7.7 中, 我们介绍过两种反常积分——无穷积分和瑕积分, 但对如何判断这两种积分的敛散, 没有作进一步的讨论. 学过无穷级数之后, 再来学习反常积分的收敛判别法, 就会发现两者在许多方面基本上是一样的. 本章的目的是让读者学会判断反常积分敛散的方法, 为讨论含参变量的反常积分作好准备.

§ 11.1 非负函数无穷积分的收敛判别法

在 § 7.7 中定义过, 无穷积分 $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛, 是指 f 在任意有限区间 $a, A]$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

有有限的极限. 如果记

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx,$$

那么 $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛, 就是指 $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ 存在且有限. 于无穷级数中的部分和.

在下面的讨论中, 我们总假定 f 在任意有限区间 $a, A]$ ($A > a$) 不再一一说明.

设 $f \geq 0$, 则积分 $\int_a^A f(x) dx$ 是上限 A 的增函数. 分) $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ 存在的充分必要条件是 $\int_a^A f(x) dx$ 对 A 而言有界. 这样我们就得到

定理 11.1 若 f 是 $a, +\infty)$

$$\int_a^+ f(x) dx$$

收敛的充分必要条件是 $\int_a^A f(x) dx$ 在 $a, +\infty)$

根据这个定理, 就能得到类似于正项级数中的比较判别法.

定理 11.2 设对充分大的 x , 函数 f 和 g 满足不等式

$$0 < f(x) < g(x)$$

那么

1° 若 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛;

2° 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散.

证明和级数中的比较判别法一样.

设 $a > 0$, 则当 $p > 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 收敛; $p \leq 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 发散,

所以经常拿 f 和函数 $\frac{1}{x^p}$ 作比较, 正像在正项级数中经常拿 a_n 和 $\frac{1}{n}$ 作比较一样.

例 1 设 $a > 0$, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x^4}$ 是收敛的. 这是因为

$$\frac{1}{x^2 + x^4} < \frac{1}{x^{4/3}},$$

而积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$ 收敛, 故由比较判别法知道原积分收敛.

定理 11.2 的极限形式更便于应用.

定理 11.3 设 f 和 g 都是 $(a, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

那么

1° 当 $0 < l < +\infty$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 同时敛散;

2° 当 $l = 0$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛;

3° 当 $l = +\infty$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也发散.

证明和级数中相应的定理一样.

例 2 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 - 1} dx$ 是收敛的, 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{x^2}{x^4 - x^2 - 1} \sim \frac{1}{x^2},$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 是收敛的, 由定理 11.3, 原积分收敛.

例 3 研究积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ 的敛散性.

解 由于当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{2x^3},$$

所以原积分收敛.

设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是一收敛的无穷积分, 这里 f 不一定是非负的, $\{A_n\} (A_1 = a)$

a) $\{A_n\}$ 是递增趋于 $+\infty$ 的数列, 那么

$$\int_a^{A_{N+1}} f(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x) dx.$$

让 $N \rightarrow +\infty$, 即得

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x) dx. \quad (1)$$

这就是说, 一个收敛的无穷积分总可以写成上式右端那样的级数. 反过来, 如果存在某个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$ (1)

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛呢? 答案是否定的. 例如积分 $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ 是发散的, 这是因为

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A$$

不存在. 但若取 $A_n = n$, 它是一个趋于 $+\infty$ 的递增数列, 这时级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} \cos x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \cos x dx = 0$$

却是收敛的.

但若 f 是非负的, 那么答案是肯定的.

定理 11.4 设 f 是 $[a, +\infty)$ 上的非负函数, $\{A_n\} (A_1 = a)$ 是递增趋于 $+\infty$ 的数列, 那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 并且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x) dx. \quad (2)$$

收敛, 那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 并且

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x) dx. \quad (3)$$

证明 因为 $\{A_n\}$ 是递增趋于 $+\infty$ 的数列, 对于任意给定的 $A > 0$, 总能找到正整数 N , 使得 $A_N < A < A_{N+1}$. 由于 $f(x) \geq 0$, 所以

$$\int_{A_N}^{A_{N+1}} f(x) dx \leq \int_a^A f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N \int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x) dx.$$

从 2) $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛, 而且 3)

下面是应用这个定理的一个例子.

例 4 证明积分 $\int_0^+ \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x}$ 收敛.

证明 因为被积函数是非负的, 只要证明级数

$$\sum_{n=0}^{(n+1)} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x} \quad (4)$$

收敛即可. 因为 $\sin^2 x$ 是周期 π 的偶函数, 故有

$$\begin{aligned} \int_n^{(n+1)} \frac{x dx}{1+x^6 \sin^2 x} &= \int_n^{(n+1)} \frac{dx}{1+n^6 \sin^2 x} = 2(n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^6 \sin^2 x} \\ &= 2(n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x + (1+n^6) \sin^2 x} \\ &= \frac{2(n+1)}{n^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(n^3 \tan x)}{1+n^3 \tan^2 x} \\ &= \frac{2(n+1)}{n^3} \int_0^+ \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

由此即知级数 4)

从无穷级数收敛的定义立刻可以得到, $\sum_{n=1}^+ a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

自然联想到, $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛的必要条件是不是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$? 这是不对的.

例 4 就是这样一个例子. 这里

$$f(x) = \frac{x}{1+x^6 \sin^2 x}$$

是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 但 $\int_0^+ f(x) dx$ 收敛, 但当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 不仅 $f(x) \rightarrow 0$, 而且是无界的, 因为当 $x = n$ 时, $f(n) = n$.

练习题 11.1

1. 判断下列无穷积分的敛散性:

$$(1) \int_1^+ \frac{x}{1+x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^+ \frac{3x^3 - 2}{x^5 - x^3 + 1} dx;$$

$$(3) \int_1^+ \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(4) \int_e^+ \frac{dx}{x (\log x)^p};$$

$$(5) \int_1^{+\infty} x^{s-1} dx; \quad (6) \int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^p}{1+x^2} dx, p > 0.$$

2. 设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ 存在, 那么必有 $b=0$.

3. 证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x \cos^2 x} > 4$

4. 证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛于 I 的充分必要条件是, 对任一递增趋于 $+\infty$ 的数

列 $\{A_n\} (A_1 = a)$, $\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x) dx$ 都收敛于 I .

5. 设 $a, b > 0$, 证明

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(x^2) dx.$$

利用这公式计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax - \frac{b}{x}} dx$, 其中 $a, b > 0$.

$$\text{已知 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

§ 11.2 无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法

和无穷级数一样, 无穷积分也有相应的 Cauchy 收敛原理. 回忆一下, 在练习题 2.5 的第 9 题中, 我们已经证明过: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

对任意 $\epsilon > 0$, 存在一个正数 A , 只要 $A_1, A_2 > A$, 便有

$$|F(A_2) - F(A_1)| < \epsilon.$$

利用这个事实, 立刻可得

定理 11.5 (Cauchy 收敛原理) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的充分必要条件是, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 只要 $A_1, A_2 > A_0$, 便有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

这个定理说明, 要想使反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 必须而且只需在充分远的、不管多长的区间上, 积分值可以任意小.

根据定理 11.5, 容易证明

定理 11.6 如果积分 $\int_a^+ |f(x)| dx$ 收敛, 那么积分 $\int_a^+ f(x) dx$ 也收敛.

证明 由于 $\int_a^+ |f(x)| dx$ 收敛, 故对 $\epsilon > 0$, 存在 A_0 , 当 $A, A' > A_0$ 时, 就有 $\int_A^{A'} |f(x)| dx < \epsilon$, 所以

$$\left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| \leq \int_A^{A'} |f(x)| dx < \epsilon.$$

仿照无穷级数中的说法, 如果积分 $\int_a^+ |f(x)| dx$ 收敛, 就说积分 $\int_a^+ f(x) dx$ 绝对收敛.

定理 11.6 断言, 绝对收敛的积分一定收敛. 和无穷级数的情形一样, 定理 11.6 的逆定理是不成立的(见下面的例 1)

如果积分 $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛, 而 $\int_a^+ |f(x)| dx$ 发散, 就称积分 $\int_a^+ f(x) dx$ 条件收敛.

利用 Cauchy 收敛原理, 可以得到类似于无穷级数中的 Dirichlet 和 Abel 判别法, 但还需要一个类似于 Abel 引理的结果. 这就是下面的

定理 11.7 (第二积分平均值定理) 若函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, g 在 $[a, b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(\xi) \int_a^b f(x) dx.$$

证明 因为 f 在 $[a, b]$ 上连续, g 是 $[a, b]$ 上的单调函数, 因而 fg 在 $[a, b]$ 上可积.

$$\therefore a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

细分区间 $[a, b]$ 上 fg 在 $[a, b]$ 上可积.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) [g(x) - g(x_{i-1})] dx. \end{aligned} \quad (1)$$

如果用 K 表示 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, Δ_i 表示 g 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅, 那么 1)

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)| [g(x) - g(x_{i-1})] dx \leq K \sum_{i=1}^n \Delta_i x_i.$$

因为 g 在 $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

于是 1)

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \quad (2)$$

若记 $b_i = g(x_{i-1})$ $i = 1, \dots, n$, 则因 g 是非负递减的, 故有

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0, \quad (3)$$

再记 $a_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$, 那么 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i = \int_a^{x_k} f(x) dx$. 由于 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是 $[a, b]$ 上的 M 和 m , 那么

$$m \int_a^{x_k} f(t) dt = F(x_k) \leq M, \quad k = 1, \dots, n, \quad (4)$$

应用 Abel 的分部求和公式 (9.2) (2)

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}) + S_n b_n.$$

利用 3) (4)

$$m \int_a^b f(x)g(x) dx = m \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \leq M b_1 = M g(a).$$

在上式中命 $\epsilon > 0$, 由 2)

$$m \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M g(a) + \epsilon$$

由 F 的连续性, 根据连续函数的介值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(\xi) \int_a^b f(x) dx.$$

如果 g 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $g(\xi) = g(\eta)$ $\eta \in [a, b]$

使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(\eta) \int_a^b f(x) dx.$$

如果 g 在 $[a, b]$ 上单调,

定理 11.8 (推广的第二积分平均值定理) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, g 在 $[a, b]$ 中单调, 则必存在 $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(\xi) \int_a^b f(x) dx + g(b) \int_a^b f(x) dx. \quad (5)$$

证明 不妨设 g 在 $[a, b]$ 上单调增加, 令 $\eta = g(\xi)$ $\xi \in [a, b]$

命

$$x) = g(x) - g(b)$$

那么 在 $[a, b]$ 11.7 知道, 存在 $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot (g(x) - g(b)) dx = (g(a) - g(b)) \int_a^b f(x) dx,$$

即

$$\int_a^b f(x) \cdot (g(x) - g(b)) dx = (g(a) - g(b)) \int_a^b f(x) dx.$$

由此即得 5)

$$\text{如果 } g \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, 则 } \int_a^b f(x) \cdot (g(x) - g(b)) dx = (g(a) - g(b)) \int_a^b f(x) dx \quad 11.7 \text{ 可}$$

得 5)

第二积分平均值定理的好处是把两个函数乘积的积分化为一个函数的积分来处理. 下面的 Dirichlet 和 Abel 判别法正是利用了这样一个好处.

定理 11.9 (Dirichlet 判别法) 如果 f 和 g 满足下面两个条件:

$$1^\circ \int_a^A f(x) dx \text{ 在 } [a, +\infty) \text{ 上有界}$$

$$2^\circ g \text{ 在 } [a, +\infty) \text{ 上单调且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$$

收敛.

证明 应用推广的第二积分平均中值定理, 有

$$\int_a^A f(x) g(x) dx = g(A) \int_a^A f(x) dx + g(a) \int_a^A f(x) dx,$$

其中 $[a, A]$

$$\left| \int_a^A f(x) g(x) dx \right| \leq |g(A)| \left| \int_a^A f(x) dx \right| + |g(a)| \left| \int_a^A f(x) dx \right|. \quad (6)$$

由条件 1° , 存在常数 M , 使得

$$\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq M, \quad A \in [a, +\infty)$$

因而

$$\left| \int_a^A f(x) dx \right| = \left| \int_a^A f(x) dx - \int_a^A f(x) dx \right| \leq 2M,$$

$$\left| \int_a^A f(x) dx \right| = \left| \int_a^A f(x) dx - \int_a^A f(x) dx \right| \leq 2M.$$

由条件 2°, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $A_0 > 0$, 当 $A, A > A_0$ 时, 有

$$|g(A)| < \epsilon, \quad |g(A)| < \epsilon.$$

所以只要 $A, A > A_0$, 由 6)

$$\left| \int_A^A f(x)g(x) dx \right| < 4M,$$

因而由 Cauchy 收敛原理, 积分 $\int_a^+ f(x)g(x) dx$ 收敛.

例 1 证明积分 $\int_1^+ \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, 积分 $\int_1^+ \frac{|\sin x|}{x} dx$ 发散.

证明 因为对任意 $A > 1$,

$$\left| \int_1^A \sin x dx \right| = |\cos A - \cos 1| < 2.$$

且 $\frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时递减趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法, $\int_1^+ \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛. 因为

$$\frac{|\sin x|}{x} - \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

用和上面一样的方法知道 $\int_1^+ \frac{\cos x}{x} dx$ 收敛, 但 $\int_1^+ \frac{1}{x} dx$ 发散, 所以 $\int_1^+ \frac{|\sin x|}{x} dx$ 发散.

积分 $\int_1^+ \frac{\sin x}{x} dx$ 是一个条件收敛的例子.

定理 11.10 (Abel 判别法) 如果 f 和 g 满足下面两个条件:

1° 积分 $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛;

2° g 在 $(a, +\infty)$

那么积分

$$\int_a^+ f(x)g(x) dx$$

收敛.

证明 因为 $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛, 所以对任意 $\epsilon > 0$, 存在 A_0 , 只要 $A, A > A_0$,

便有 $\left| \int_A^A f(x) dx \right| < \epsilon$. 由于 g 在 $(a, +\infty)$ 有 $|g(x)| \leq M, x \in [a, +\infty)$

$$\begin{aligned} \left| \int_A^A f(x)g(x) dx \right| &\leq |g(A)| \left| \int_A^A f(x) dx \right| \\ &\leq |g(A)| \epsilon \\ &\leq M \epsilon \\ &= 2M \epsilon. \end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛原理即知 $\int_a^+ (f(x) - g(x)) dx$ 收敛.

练习题 11.2

1. 研究下列积分的敛散性:

$$(1) \int_0^+ \frac{x \cos x}{1+x} dx;$$

$$(2) \int_0^+ \frac{\sin(a+2)x}{1+x} dx, \quad a > 0;$$

$$(3) \int_1^+ \frac{\cos^2 x}{x} dx;$$

$$(4) \int_0^+ \sin(x) dx, \quad a > 1.$$

2. 研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性:

$$(1) \int_0^+ \frac{x \sin x}{1+x} dx;$$

$$(2) \int_1^+ \frac{\cos(1-2x)}{x^3 - x^2 + 1} dx;$$

$$(3) \int_0^+ \frac{\sin x}{x^3 - x^2 + x + 1} dx;$$

$$(4) \int_2^+ \frac{\sin x}{x \log x} dx.$$

3. 设 f 为非负减函数, 且 $\int_a^+ f(x) dx$ 收敛. 证明当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. 设 f 在 $(a, +\infty)$

0. 试用 Dirichlet 判别法证明, 积分

$$\int_a^+ f(x) dx \text{ 和 } \int_a^+ f(x) \sin^2 x dx$$

同时敛散.

问题 11.2

1. 设 $0 < \frac{1}{2}$, 证明积分

$$\int_1^+ \frac{\sin x}{x + \sin x} dx$$