数学分析讲义学习辅导书

（第二版）

上　　册

刘玉琏　杨奎元　刘　伟　吕　凤　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义学习辅导书．上/刘玉琏等编．—2 版．北京：高等教育出版社，2003.12

ISBN 7-04-012939-6

Ⅰ.数… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 088104 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
		版　　次	1987 年 4 月第 1 版
开　　本	850×1168　1/32		年　月第 2 版
印　　张	13.25	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	330 000	定　　价	16.70 元

策划编辑　李　蕊
责任编辑　文小西
封面设计　刘晓翔
责任绘图　宗小梅
版式设计　张　岚
责任校对　杨雪莲
责任印制

再 版 前 言

本书是与刘玉琏等编写的《数学分析讲义》(第四版,高等教育出版社 2003 年出版)配套的学习辅导书.

此次修订书名改为《数学分析讲义学习辅导书》,以突出辅导之意. 修订时对原书第一版的编写框架没有改变,每个大节还是按原有的五部分组成,第一部分基本内容和第二部分学习要求没有变化,对第三部分答疑辅导和第四部分补充例题,有加有减,加多减少,更适合自学和教学的需要. 考虑到有些读者可能没有《数学分析讲义练习题选解》,为了帮助这部分的读者克服做练习题时的困难,仍保留第五部分练习题解法提要.

本书此次修订的责任编辑仍是第一版的责任编辑文小西先生. 由于《数学分析讲义》已作了修订,《讲义》中的定理序号和例题、练习题的序号都有所变化,编者在修订时对此没有作相应改动,甚至有多处遗漏或遗忘,责任编辑在审阅中都一一作了订正,个别问题处理不妥之处也一并指出,编者都相应作了修改或重写. 文小西先生为提高书稿的质量花费了大量的时间和精力,鼎力相助,在此对他的辛勤劳动表示深切的感谢.

敬希广大读者批评指正.

编者

2003 年 8 月　于长春

前　　言

本书是与刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》(高等教育出版社 1981 年第二版,以下简称《讲义》)配套的学习指导书.

由于《讲义》受教学内容、教学时数、文字数量等限制，因而概念的剖析，定理的意义，重要的反例，典型的例题，分析的方法等诸多问题不可能在《讲义》中一一详述. 我们认为，使用《讲义》学习数学分析的读者，特别是自学读者，仅有《讲义》是不够的，还应该有与《讲义》配套的学习指导书，以弥补《讲义》之不足. 基于这个认识，我们编写了这本辅导性的数学分析学习指导书，以期有利于读者理解《讲义》的内容，掌握分析的方法，提高论证问题的能力. 它既是自学读者和函授学员的辅导书，又是日校学生的指导书，也可作为数学分析习题课的教学参考书.

本书是按照《讲义》的体例逐节对应编写的. 每节由五个部分组成：

一、基本内容　以简要文字阐明该节的基本内容，有的并指出重点、难点，及其在本章和本书中的地位和作用等.

二、学习要求　参照教学大纲和该节的内容，从理论、计算、方法、能力等方面向读者提出具体要求.

三、答疑辅导　采用生问师答的方法编写. 共回答了 208 个问题(上册 121 个问题,下册 87 个问题)，每节数量不等. 问题涉及很多方面：诸如概念实质，定理意义，等价命题，重要反例，分析方法，定理对比，等等.

四、补充例题　在《讲义》已给例题的基础上又补充了 283 个例题(上册 155 题,下册 128 题). 它们是从大量题中筛选出来的，力求在解法上有一定的典型性，在内容上有些补充和提高，并注

意选取不同类型的题目和分析中常用的技巧．一般每节选出两个例题，对其解题思路，论证方法，例题意义等作了简要的说明，有的在说明之后给出几个用同法可解的类似题，供读者练习．我们认为，读者学习一些典型例题的论证方法和解题技巧是必要的，它有利于读者在模仿中提高，在模仿中创新．

五、练习题解法提要　选择了该节练习题中较难的题或有意义的题给出了解法提要．希读者在提要的启发和引导下独立完成该节的练习题．

每节的练习题就是很好的“自我测验题”．为了读者在稍高的水准上自我检查学习成绩，在每章之后又增补了“自我测验题”．一般是 10～15 题，个别难题注上了星号“*”．每册书的最后附有“自我测验题的解答”，供读者答完题后参照评定．读者要认真思考，力争独立完成，从而提高自己论证问题的能力．只有经过反复思考，百思不得其解时，再参看解答．不能全部正确答完“自我测验题”的读者也不要丧失学习信心，因为对不同基础和不同水平的读者有不同的学习要求．

本书稿承蒙四川大学秦卫平副教授和高等教育出版社本书的责任编辑文小西同志认真审改，纠正了一些错误和不妥之处，并提出了宝贵的修改意见和建议．他们为提高本书的质量付出了辛勤的劳动，在此向他们表示衷心感谢．

编写本书，我们为自己确定了较高的标准，但是由于水平不高和能力有限，实感力不从心，不妥之处甚至错误仍在所难免，恳请读者和从事数学分析课教学的老师们不吝赐教，敬希提出具体的修改意见和建议．顺致谢意．

编者

1985.5. 于长春东北师大数学系

目　　录

第一章　函　　数

§1.1　函　　数

一、基本内容

本节有四段.

第一段讲函数概念.

《讲义》第一章将“对应关系 f 称为函数”，那么两个对应关系(函数)f 与 g 的四则运算是什么意思呢？这就是第二段回答的内容. 从而应用函数的四则运算能够构造新的函数.

几何直观是学习和研究数学的方法之一. 第三段给出的“函数的图像”，既有利于直观理解函数概念，又能从函数的几何性态直观看到函数的性质. 顺便介绍几个有用的函数：整数函数 $y=[x]$，小数函数 $y=\{x\}$，符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$，狄利克雷函数 $y=D(x)$.

第四段给出了一类特殊的定义在自然数集 $\mathbf{N}_+$ 上的函数——数列. 它是第二章讲数列极限的必备知识.

二、学习要求

函数是高等数学最重要最基础的概念之一. 要求：

1. 深刻理解函数定义.（何谓函数？怎样确定函数的定义域？何谓函数值域？）

2. 知道函数的四则运算.（函数的四则运算，为什么要定义？是怎样定义的？）

3. 会描绘简单函数的图像．(何谓函数的图像？它有什么特征？知道函数 $y=[x]$，$y=\{x\}$，$y=\operatorname{sgn} x$ 的意义及其图像．)

三、答疑辅导

问 1. 现在的函数概念与中学所学的函数概念有何不同？

答 随着数学知识的不断扩大、不断发展，函数概念越来越走向严格化．我们在中学学过两个函数概念．一是初中《代数》的函数定义，二是高中《数学》的函数定义．

初中《代数》第三册给出的函数定义是：

> “设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y，如果对于 x 的每个值，y 都有唯一的值与它对应，那么就说 x 是自变量，y 是 x 的函数．”

初中学生的数学知识尚少，学习初中《代数》中这个描述性的函数定义是合适的，虽然这个函数定义比较粗糙，但是它包含了函数的最本质的“对应”这个数学思想．这里只要求学生能初步理解函数的朴素思想即可，不追求脱离学生实际的严谨性，而应用“变量 x 与 y”更易于初中学生联想许多具体的函数模型．变量 x 所取得的值都是实数 R 或 R 的子集．高中《数学》第一册(上)指出：“自变量 x 取值的集合叫做函数的定义域，和自变量 x 的值对应的 y 的值叫做函数值．”何谓“对应”？这里没有给出数学定义，只能按照中文意思形象化的理解．何谓函数？这里说得很清楚，“y 是 x 的函数”．再由高中《数学》中的函数值的定义，那里将函数和函数值等同起来．事实上，函数与函数值应该有区别，这是两个不同的概念，是不能混淆的．这是中学数学中函数定义的缺陷．

高中《数学》中的函数定义分两步走，首先给出比函数概念更广泛的映射定义．这是中学数学研究的对象决定的，它需要更广泛的映射定义．中学数学的映射一般有四种形式：数集到数集的映射，数集到点集的映射，几何图形的集合到数集的映射，点集

到点集的映射．高中《数学》第一册(上)映射的定义是这样的：

> “设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任意元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，那么这样的对应(包括集合 A，B 以及 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作
> $$f: A\to B.”$$
> “给定一个集合 A 到集合 B 的映射，且 $a\in A$，$b\in B$，如果元素 a 和元素 b 对应，那么，我们把元素 b 叫做元素 a 的像，元素 a 叫做元素 b 的原像．
>
> 将 a 的像 b，表为 $b=f(a)$．”

高中《数学》第一册(上)1.1 一开始就介绍集合概念，其中主要目的是为了定义映射．这里的集合 A 与 B 是一般的集合，不限于实数集 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 的子集，可以是任意对象的集合．例如，复数集合，平面点集合，向量集合，多项式集合，某班级学生的集合，等等．

何谓映射？映射的定义说得很清楚：“这样的对应(包括 A，B 以及由 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射”．由此可见，一个映射是由 A，B，f 所组成：

A——被映射的集合，也叫做定义域；

B——被映射入的集合；

f——对应法则，按照 f，$\forall x\in A$，有唯一 $y\in B$ 和它对应．

有的书将 A，B，f 称为映射的三要素，其中 A，B 的地位是不同的．集合 A 的元素要取遍 A，像集 $f(A)$不一定是 B，可能是 B 的真子集．反之，B 的元素在 A 中可能没有原像，或者有一个，甚至是无限多个原像．

高中《数学》第一册(上)给出映射之后接着给出了函数的定义：

> 设有映射 $f: A\to B$．“如果 A，B 都是非空数集，那么 A 到 B 的映射 $f: A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数，记作
> $$y=f(x),$$

其中 $x \in A$，$y \in B$，原像集合 A 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域，像的集合 C（$C \subseteq B$）叫做函数 $y = f(x)$ 的值域．函数符号 $y = f(x)$ 表示‘ y 是 x 的函数’，有时简记作函数 $f(x)$．”

上面对映射定义所作的说明，自然也适合于函数的定义．

高中《数学》中的函数定义更符合客观实际，反映了客观事物运动变化的本质，突出了“对应法则”，严格区分了函数和函数值．从这个意义上说，这个函数定义比初中《代数》那个函数定义发展了，前进了．这个函数定义与《讲义》第一章所讲的函数定义相同．

但是，从现代数学来说，这个函数定义仍有不足之处，这个函数借助于“对应法则”定义的，那么何谓“对应法则”呢？在这之前没有给出“对应法则”的严格数学定义．这里实际上是将对应法则和函数（映射）等同起来，也就是应用与函数（映射）等价的对应法则定义了函数．正是由于对应法则没有严格定义，就会出现下面的问题：

设有两个函数：

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{与} \quad g(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x^2},$$

它们的定义域都是$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，值域都是$(0, +\infty)$，即它们的定义域和值域都相同．从运算来说，前者对应法则 f，只有乘除运算，后者对应法则 g 除了乘除运算外，尚有三角运算，二者有不同的运算，那么这两个函数的对应法则是否是相同呢？即对应法则是否与运算有关呢？

从这个意义上说，高中《数学》应用尚未被定义的“对应法则”定义函数（映射）是有缺陷的．现代数学可形式上回避“对应法则”．给出比较严格的函数（映射）定义，这就是本《讲义》第十章所引入的函数定义．请读者学习第十章时再学习用笛卡儿乘积集的特殊的子集定义函数．

问 2．确定用解析式表示的函数的定义域有哪些原则？

答　确定(求)函数的定义域有如下的原则：

1）偶次根式的函数，其根号下的值非负.

2）分式函数，其分母的值不能是零.

3）奇函数或偶函数，其定义域是关于原点对称的数集.

4）函数 $y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域是原来函数 $y=f(x)$的值域.

5）有限个函数的四则运算得到的新函数，它的定义域是这有限个函数定义域的交集.

6）对数函数的真数值必须是正数.

7）复合函数 $z=f[\varphi(x)]$的定义域总是里层函数 $y=\varphi(x)$定义域的子集，在其上的函数值，$y=\varphi(x)$都属于外层函数 $z=f(y)$的定义域.

8）具有物理、几何等实际意义的函数，它的定义域总是解析式表示的该函数定义域的子集. 该子集由实际意义决定.

四、补充例题

例 1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$；(2) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

解

(1) $$\begin{cases}16-x^2>0,\\ x-1>0,\\ x-1\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<4,\\ x>1,\\ x\neq 2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<x<4,\\ 1<x<2,\\ 2<x<+\infty,\end{cases}$$

于是，函数的定义域是$(1,2)\cup(2,4)$.

(2) $$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\\ 2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ x(2-x)\geqslant 0,\\ 2x>1,\\ 2x\neq 2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ \begin{cases}x\geqslant 0,\text{同时 } x\leqslant 2,\\ x\leqslant 0,\text{同时 } x\geqslant 2,\end{cases}\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1.\end{cases}$$

于是函数的定义域是$\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

例 2. 设$f(x)=\frac{x+|x|}{2}$，描绘函数$y=f(1-x)f(1+x)$的图像.

解　$f(x)=\frac{x+|x|}{2}=\begin{cases}x, & 当\ x>0,\\ 0, & 当\ x\leqslant 0.\end{cases}$

$$f(1-x)=\begin{cases}1-x, & 当\ x<1,\\ 0, & 当\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

$$f(1+x)=\begin{cases}1+x, & 当\ x>-1,\\ 0, & 当\ x\leqslant -1.\end{cases}$$

于是

$$y=f(1-x)f(1+x)=\begin{cases}(1-x)(1+x)=1-x^2, & 当\ -1<x<1,\\ 0, & 当\ |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

函数$y=f(1-x)f(1+x)$的图像如图 1.1.

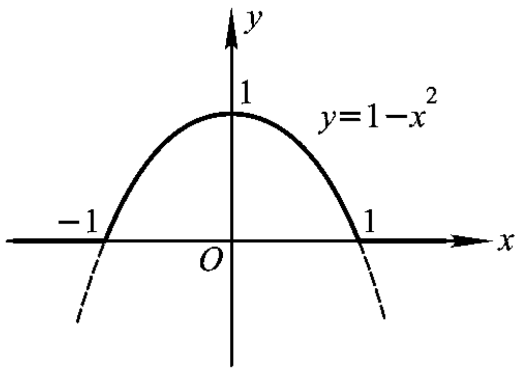

图　1.1

例 3. 设对任意x，$y\in\mathbf{R}$，有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

且$f(x)\geqslant 0$，$f(0)=c$. 证明：对任意$x\in\mathbf{R}$，有$f(x)=c$.

证法　首先证明，对任意$x\in\mathbf{R}$，有$f(x)\geqslant c$，用反证法. 其次再证明，对任意$x\in\mathbf{R}$，有$f(x)=c$.

证明　假设存在某一点$a\in\mathbf{R}$，有

$$f(a)<c=f(0).\ 设\ f(0)-f(a)=h>0.$$

在给定的不等式中，令$x=0$，$y=2a$，有

$$2f(a)\geqslant f(0)+f(2a)$$

或

$$f(2a)\leqslant f(0)-2[f(0)-f(a)]=f(0)-2h.$$

同法(令$x=a$，$y=3a$)，有

$$f(3a)\leqslant 2f(2a)-f(a)\leqslant 2[f(0)-2h]-f(a)$$
$$=f(0)-4h+f(0)-f(a)=f(0)-3h.$$

……

用归纳法证明，对任意自然数 n，有

$$f(na)\leqslant f(0)-nh.$$

因为 $h>0$，当 n 充分大时，$f(na)<0$，与已知条件矛盾，即对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\geqslant c$.

在给定的不等式中，对任意 $x\in\mathbf{R}$，取 $y=-x$，有

$$2f(0)=2c\geqslant f(x)+f(-x).$$

因为 $f(x)\geqslant c$ 与 $f(-x)\geqslant c$，所以 $f(x)=f(-x)=c$（可用反证法证明），即对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)=c$.

说明　由给定的不等式知，在任意区间 $[a,b]\subset\mathbf{R}$ 上，函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$ 的函数值 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 大于或等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 两个端点 a 与 b 的函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的算术平均值 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$. 这表明函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像只有两种情况：函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是一条直线或是向上鼓鼓的一条曲线，并向下无限延伸，即当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$. 再由给定的条件 $f(x)\geqslant 0$ 知，后者不能出现，因此它只能是一条平行于 x 轴的直线，即 $f(x)=c=f(0)$.

五、练习题 1.1 解法提要

5. 确定下列函数的定义域：

(5) $y=\frac{1}{|x|-x}$.

解法　$|x|-x\neq 0$，即 $|x|\neq x$.

(7) $y=\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解法　$\sin\frac{\pi}{x}>0$，即　$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$，$k=0$，$\pm 1$，

± 2，$\cdots$.

6. 正方形的周长集合 L 与其面积集合 A 之间的对应是否是函数？三角形的周长集合 l 与其面积集合 S 之间的对应是否是函数？为什么？

解法　给定正方形的周长 $a \in L$，其正方形的一个边长 $\frac{a}{4}$ 唯一确定，从而它的面积 $\left(\frac{a}{4}\right)^2 \in A$ 也唯一确定.

给定三角形的周长 $b \in l$，其三角形的底与高不是唯一确定，从而它的面积也不是唯一确定.

7. 下列函数是否相等，为什么？

(2) $f(x) = 2\lg x$　与　$\varphi(x) = \lg x^2$.

解法　它们的定义域不相同，所以不相等.

(4) $f(x) = \frac{\pi}{2}x$　与　$\varphi(x) = x(\arcsin x + \arccos x)$.

解法　它们的定义域不相同，所以不相等.

10. 证明：若 $\varphi(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$，则 $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

证法　应用对数性质：$\ln M + \ln N = \ln MN$.

11. 如果等边三角形的面积为 1，联结这个三角形各边的中点得到一个小三角形，又联结这个小三角形的各边中点得到一个更小的三角形，如此无限继续下去，求出这些三角形面积的数列.

解法　设三角形的面积数列是 $\{S_n\}$. 已知 $S_1 = 1$. 由图 1.2，知

$$S_2 = \frac{1}{4}S_1 = \frac{1}{4}, \cdots.$$

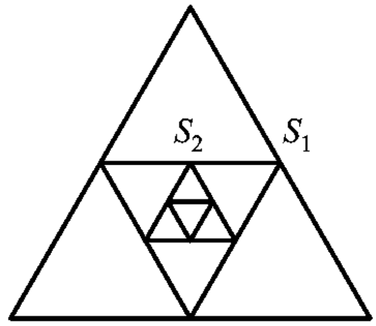

图　1.2

16. 已知函数 $y_1 = f(x)$，$y_2 = g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图像(在区间 $[a,b]$ 上可随

意画两条曲线使其相交)，描绘下列函数的图像：

(1) $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$；

(2) $y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$.

解法　(1)
$$y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}=\begin{cases}f(x)，当 f(x)\geqslant g(x)\\ g(x)，当 f(x)<g(x)\end{cases}=\max\{f(x),g(x)\}.$$

(2)
$$y=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}=\begin{cases}g(x)，当 f(x)\geqslant g(x)\\ f(x)，当 f(x)<g(x)\end{cases}=\min\{f(x),g(x)\}.$$

其中符号 $\max\{a,b\}$ 表示取 a，b 中的最大值，$\min\{a,b\}$ 表示取 a，b 中的最小值.

设函数 $y_1=f(x)$ 与 $y_2=g(x)$ 的图像如图 1.3. 请画出函数 $\max\{f(x),g(x)\}$ 与 $\min\{f(x),g(x)\}$ 的图像.

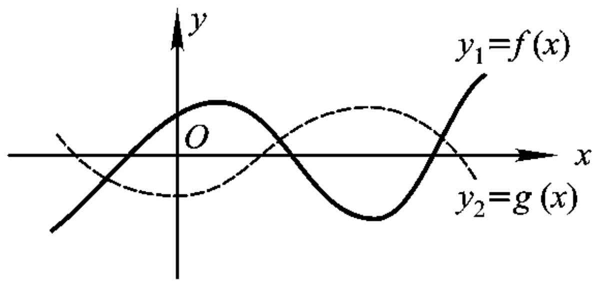

图　1.3

§1.2　四类具有特殊性质的函数

一、基本内容

本节有四段.

函数的类型是多种多样的，函数的样子是千姿百态的. 我们首先从中选出经常遇到的四种特殊的函数. 本节每段给出一种特殊的函数，顺次是，有界函数(包括无界函数)，单调函数，奇偶