

# 数学分析讲义学习辅导书

(第二版)

上册

刘玉琏 杨奎元 刘伟 吕凤 编



高等教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义学习辅导书. 上/刘玉琏等编. —2版.  
北京: 高等教育出版社, 2003.12

ISBN 7-04-012939-6

I. 数... II. 刘... III. 数学分析-高等学校-教  
学参考资料 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 088104 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-82028899		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			
		版 次	1987年4月第1版
开 本	850×1168 1/32		年 月第2版
印 张	13.25	印 次	年 月第 次印刷
字 数	330 000	定 价	16.70元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

策划编辑	李蕊
责任编辑	文小西
封面设计	刘晓翔
责任绘图	宗小梅
版式设计	张岚
责任校对	杨雪莲
责任印制	

# 再 版 前 言

本书是与刘玉琏等编写的《数学分析讲义》(第四版,高等教育出版社 2003 年出版)配套的学习辅导书.

此次修订书名改为《数学分析讲义学习辅导书》,以突出辅导之意.修订时对原书第一版的编写框架没有改变,每个大节还是按原有的五部分组成,第一部分基本内容和第二部分学习要求没有变化,对第三部分答疑辅导和第四部分补充例题,有加有减,加多减少,更适合自学和教学的需要.考虑到有些读者可能没有《数学分析讲义练习题选解》,为了帮助这部分的读者克服做练习题时的困难,仍保留第五部分练习题解法提要.

本书此次修订的责任编辑仍是第一版的责任编辑文小西先生.由于《数学分析讲义》已作了修订,《讲义》中的定理序号和例题、练习题的序号都有所变化,编者在修订时对此没有作相应改动,甚至有多处遗漏或遗忘,责任编辑在审阅中都一一作了订正,个别问题处理不妥之处也一并指出,编者都相应作了修改或重写.文小西先生为提高书稿的质量花费了大量的时间和精力,鼎力相助,在此对他的辛勤劳动表示深切的感谢.

敬希广大读者批评指正.

编者

2003 年 8 月 于长春

# 前 言

本书是与刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》(高等教育出版社 1981 年第二版,以下简称《讲义》)配套的学习指导书。

由于《讲义》受教学内容、教学时数、文字数量等限制,因而概念的剖析,定理的意义,重要的反例,典型的例题,分析的方法等诸多问题不可能在《讲义》中一一详述。我们认为,使用《讲义》学习数学分析的读者,特别是自学读者,仅有《讲义》是不够的,还应该有与《讲义》配套的学习指导书,以弥补《讲义》之不足。基于这个认识,我们编写了这本辅导性的数学分析学习指导书,以期有利于读者理解《讲义》的内容,掌握分析的方法,提高论证问题的能力。它既是自学读者和函授学员的辅导书,又是日校学生的指导书,也可作为数学分析习题课的教学参考书。

本书是按照《讲义》的体例逐节对应编写的。每节由五个部分组成:

一、基本内容 以简要文字阐明该节的基本内容,有的并指出重点、难点,及其在本章和本书中的地位 and 作用等。

二、学习要求 参照教学大纲和该节的内容,从理论、计算、方法、能力等方面向读者提出具体要求。

三、答疑辅导 采用生问师答的方法编写。共回答了 208 个问题(上册 121 个问题,下册 87 个问题),每节数量不等。问题涉及很多方面:诸如概念实质,定理意义,等价命题,重要反例,分析方法,定理对比,等等。

四、补充例题 在《讲义》已给例题的基础上又补充了 283 个例题(上册 155 题,下册 128 题)。它们是从大量题中筛选出来的,力求在解法上有一定的典型性,在内容上有些补充和提高,并注

意选取不同类型的题目和分析中常用的技巧。一般每节选出两个例题，对其解题思路，论证方法，例题意义等作了简要的说明，有的在说明之后给出几个用同法可解的类似题，供读者练习。我们认为，读者学习一些典型例题的论证方法和解题技巧是必要的，它有利于读者在模仿中提高，在模仿中创新。

五、练习题解法提要 选择了该节练习题中较难的题或有意义的题给出解法提要。希读者在提要的启发和引导下独立完成该节的练习题。

每节的练习题就是很好的“自我测验题”。为了读者在稍高的水准上自我检查学习成绩，在每章之后又增补了“自我测验题”。一般是10~15题，个别难题注上了星号“\*”。每册书的最后附有“自我测验题的解答”，供读者答完题后参照评定。读者要认真思考，力争独立完成，从而提高自己论证问题的能力。只有经过反复思考，百思不得其解时，再参看解答。不能全部正确答完“自我测验题”的读者也不要丧失学习信心，因为对不同基础和不同水平的读者有不同的学习要求。

本书稿承蒙四川大学秦卫平副教授和高等教育出版社本书的责任编辑文小西同志认真审改，纠正了一些错误和不妥之处，并提出了宝贵的修改意见和建议。他们为提高本书的质量付出了辛勤的劳动，在此向他们表示衷心感谢。

编写本书，我们为自己确定了较高的标准，但是由于水平不高和能力有限，实感力不从心，不妥之处甚至错误仍在所难免，恳请读者和从事数学分析课教学的老师们不吝赐教，敬希提出具体的修改意见和建议。顺致谢意。

编者

1985.5. 于长春东北师大数学系

# 目 录

第一章 函数 .....	1
§ 1.1 函数 .....	1
§ 1.2 四类具有特殊性质的函数 .....	9
§ 1.3 复合函数与反函数 .....	18
第一章自我测验题 .....	27
第二章 极限 .....	29
§ 2.1 数列极限 .....	29
§ 2.2 收敛数列 .....	39
§ 2.3 函数极限 .....	58
§ 2.4 函数极限的定理 .....	66
§ 2.5 无穷小与无穷大 .....	82
第二章自我测验题 .....	91
第三章 连续函数 .....	94
§ 3.1 连续函数 .....	94
§ 3.2 连续函数的性质 .....	105
第三章自我测验题 .....	119
第四章 实数的连续性 .....	122
§ 4.1 实数连续性定理 .....	122
§ 4.2 闭区间上连续函数整体性质的证明 .....	133
第四章自我测验题 .....	144
第五章 导数与微分 .....	146
§ 5.1 导数 .....	146
§ 5.2 求导法则与导数公式 .....	160
§ 5.3 隐函数与参数方程求导法则 .....	172

---

§ 5.4 微分 .....	178
§ 5.5 高阶导数与高阶微分 .....	183
第五章自我测验题 .....	194
第六章 微分学基本定理及其应用 .....	197
§ 6.1 中值定理 .....	197
§ 6.2 洛必达法则 .....	214
§ 6.3 泰勒公式 .....	222
§ 6.4 导数在研究函数上的应用 .....	235
第六章自我测验题 .....	250
第七章 不定积分 .....	253
§ 7.1 不定积分 .....	253
§ 7.2 分部积分法与换元积分法 .....	257
§ 7.3 有理函数的不定积分 .....	268
§ 7.4 简单无理函数与三角函数的不定积分 .....	276
第七章自我测验题 .....	284
第八章 定积分 .....	285
§ 8.1 定积分 .....	285
§ 8.2 可积准则 .....	288
§ 8.3 定积分的性质 .....	307
§ 8.4 定积分的计算 .....	319
§ 8.5 定积分的应用 .....	341
§ 8.6 定积分的近似计算(略) .....	355
第八章自我测验题 .....	355
自我测验题解答 .....	358

# 第六章 微分学基本定理及其应用

## § 6.1 中值定理

### ▶▶ 一、基本内容

本节有四段.

第一、二、三段分别给出了罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理. 这三个定理统称为中值定理. 第四段给出了应用中值定理证明的五个例题.

中值定理是微分学的理论基础, 是本章的重点.

### ▶▶ 二、学习要求

中值定理是应用导数研究函数性质的重要工具, 因此它是数学分析的重要定理. 要求:

1. 深刻理解中值定理, 特别是拉格朗日中值定理的分析意义和几何意义.
2. 会证明中值定理 特别是学会作辅助函数证明问题的方法.
3. 知道导(函)数的特性: 连续性与介值性以及导函数不能有第一类不连续点. (即《讲义》的例 4 与例 5)
4. 初步具有应用中值定理论证问题( 练习题 6.1 的证明题) 的能力.

### ▶▶ 三、答疑辅导

问 1. 中值定理有什么意义?

答 罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理都具有“中值”性，它们统称为中值定理或更明确地称为微分中值定理。一般来说，应用导数研究函数的性质都要直接或间接地借助于中值定理，特别是拉格朗日定理。因此中值定理是沟通函数及其导数之间的桥梁，是应用导数的局部性研究函数在区间上整体性的重要工具。例如，第四段的例 1：

如果  $\forall x \in (a, b)$ ，有  $f'(x) = 0$ ，则  $f(x) = C$  (常数)。此例就是已知导数的性质 ( $\forall x \in (a, b)$ ， $f'(x) = 0$ ) 研究函数的性质 ( $f(x) = C$ )，因此要应用拉格朗日中值定理。

依此原则，练习题 6.1 中的多数练习题都要直接地应用拉格朗日中值定理。

由此可见，中值定理，特别是拉格朗日中值定理，在数学分析中处于十分重要的地位。

罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理的关系是后者包含前者，即柯西定理的特殊情况 ( $g(x) = x$ ) 就是拉格朗日定理，而拉格朗日定理的特殊情况 ( $f(a) = f(b)$ ) 就是罗尔定理。

问 2. 为什么不将中值定理的“函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  连续和在开区间  $(a, b)$  内可导”这两个条件换成“函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导”这一个条件呢？这样替换，中值定理的叙述不是更简便吗？

答 “函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导”这一条确实包含了“函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续和在开区间  $(a, b)$  内可导”这两条。这样替换，中值定理的叙述也确实简便了。可是“函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导”这一条不仅包含了“这两条”，而且比“这两条”对函数  $f(x)$  的要求更高，即要求函数  $f(x)$  在  $a$  存在右导数和在  $b$  存在左导数，从而满足中值定理条件的函数要比原来少了。例如，函数

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

在闭区间  $[-1, 1]$  上连续，在开区间  $(-1, 1)$  内可导，且  $f(1) =$

$f(-1)=0$ . 满足罗尔定理的条件. 于是, 在  $(-1, 1)$  内至少存在一点  $c$ , 使

$$f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = 0.$$

显然,  $c=0 \in (-1, 1)$ . 但是, 函数  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  在闭区间  $[-1, 1]$  上并不可导. 因为导数  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$  在  $x = \pm 1$  都不存在. 由此可见, 如果将罗尔定理的条件换成: 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导, 且  $f(a) = f(b)$ , 那么对函数  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  在闭区间  $[-1, 1]$  上就不能应用罗尔定理. 这样就缩小了中值定理能适用的函数范围. 因此, 中值定理的条件不能这样替换.

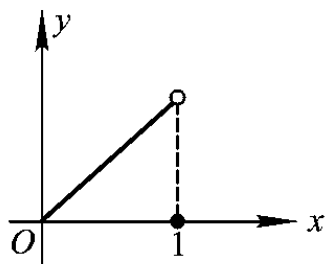
中值定理的两个条件: “函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续和在开区间  $(a, b)$  内可导” 彼此有关. 函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导, 当然函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 它被包含在 “函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续” 之中. 但是, 函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导, 不能代替函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 而函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续更不能代替函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导. 为了使这两个条件互相独立, 可改为 “函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导和函数  $f(x)$  在  $a$  右连续在  $b$  左连续”. 这样叙述, 虽然这两个条件是互相独立的, 但是行文很累赘. 为了叙述上的对称和便于记忆, 不追求条件之间的独立性, 数学分析中关于微分中值定理的条件仍叙述为 “函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续和在开区间  $(a, b)$  内可导”.

问 3. 罗尔定理有三个条件, 缺少其中一个条件罗尔定理是否成立? 如果不成立, 能否说这三个条件是罗尔定理的必要条件?

答 罗尔定理有三个条件, 缺少其中一个条件罗尔定理就可能不成立. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1. \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

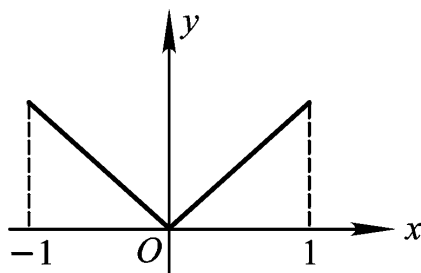
在  $[0, 1]$  上不连续(如图 6.1(a))



(a)

$$f(x) = |x|, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

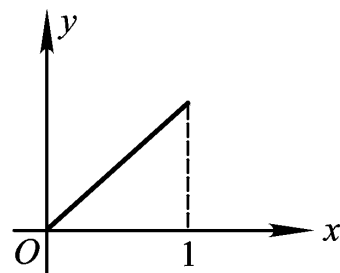
在  $(-1, 1)$  内不可导(如图 6.1(b))



(b)

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$f(0) \neq f(1)$ . (如图 6.1(c))



(c)

图 6.1

从这三个函数的图像可见，罗尔定理都不成立。

尽管如此，但是不能说这三个条件是罗尔定理的必要条件。

例如，函数

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & |x| < 1, \\ 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

在闭区间  $[-2, 2]$  上不连续，在开区间  $(-2, 2)$  内不可导， $g(2) \neq g(-2)$ ，即罗尔定理的三个条件都不成立，但是，在开区间  $(-2, 2)$  内存在一点  $x = 0$ ，满足

$$g'(0) = 0.$$

这个事实说明，罗尔定理的三个条件都是充分条件。

问 4. 函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上满足罗尔定理的条件，在  $[a, b]$  内能否有无限多个  $c$ ，使  $f'(c) = 0$ ？

答 可能。例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$$

在  $[-1, 1]$  上满足罗尔定理的条件。

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin^2 \frac{1}{x} - 2x^2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$$

在  $(-1, 1)$  内存在无限多个  $c_n = \frac{1}{2n\pi}$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 使  
 $f'(c_n) = 0$ .

问 5. 拉格朗日定理的结果有哪些不同的形式?

答 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上满足拉格朗日定理的条件,  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ .

1) 当  $x_1 < x_2$  或  $x_2 < x_1$  时, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

或

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

其中  $c$  位于  $x_1$  与  $x_2$  之间.

2) 当  $x_1 < x_2$  或  $x_2 < x_1$  时, 差数  $c - x_1$  与  $x_2 - x_1$  同号. 令

$$\theta = \frac{c - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{或} \quad c = x_1 + \theta(x_2 - x_1), \quad 0 < \theta < 1,$$

有  $f(x_2) - f(x_1) = f'[x_1 + \theta(x_2 - x_1)](x_2 - x_1), \quad 0 < \theta < 1$ .

3) 当  $x_1 < x_2$  或  $x_2 < x_1$  时, 令

$$h = x_2 - x_1, \quad x_1 = x,$$

则  $x_2 = x + h$ , 有

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

问 6. 柯西中值定理的几何意义是什么?

答 柯西中值定理的几何意义类似拉格朗日中值定理的几何意义.

将函数  $y = f(t)$  与  $x = g(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , 看作是以  $t$  为参数的参数方程. 当函数  $y = f(t)$  与  $x = g(t)$  在  $[a, b]$  上满足柯西定理的条件时, 参数方程  $y = f(t)$  与  $x = g(t)$  的图像是  $xy$  坐标平

面上的一条(光滑)曲线  $C$ , 从点  $A[g(a), f(a)]$  连续变化到终点  $B[g(b), f(b)]$  (如图 6.2). 由解析几何知, 差商

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

表示连接曲线  $C$  的始点  $A$  与终点  $B$  的割线斜率, 导数之商

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b,$$

表示当参数  $t = c$  时, 曲线  $C$  上某点  $D[g(c), f(c)]$  的切线斜率. 柯西定理的几何意义是, 曲

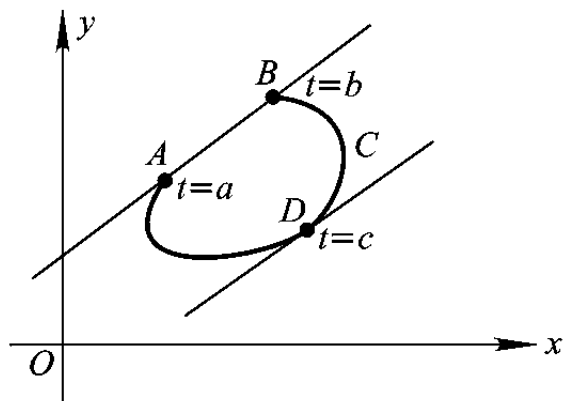


图 6.2

线  $C$  上至少存在一点  $D[g(c), f(c)]$ , 该点的切线平行于连接两点  $A$  与  $B$  的割线或它们的斜率相等, 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

问 7. 为什么说: 导函数没有第一类间断点?

答 本节的例 5 指出, 一个函数在区间上存在导函数, 则导函数具有介值性. 事实上, 如果导函数存在第一类间断点, 则导函数就不具有介值性, 这与例 5 矛盾. 导函数没有第一类间断点, 是否可能有第二类间断点呢? 这是可能的. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$$

在  $\mathbf{R}$  上连续, 且

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$$

$f'(x)$  在  $\mathbf{R}$  上不连续,  $x = 0$  是  $f'(x)$  的第二类间断点.

不难看到, 导函数  $f'(x)$  在不包含点 0 的任何区间上都存在, 且具有介值性.

## 四、补充例题

例 1. 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $a \geq 0$ , 则在  $(a, b)$  内存在三点  $x_1, x_2, x_3$ , 有

$$f'(x_1) = (b+a) \frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ba + a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

证法 应用柯西中值定理. 分别选取  $g(x) = x$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ . 注意  $a \geq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ .

证明 取  $g(x) = x$ . 有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1), \quad x_1 \in (a, b);$$

取  $g(x) = x^2$ ,  $g'(x) = 2x$ , 有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2}, \quad x_2 \in (a, b),$$

或 
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (b + a) \frac{f'(x_2)}{2x_2}, \quad x_2 \in (a, b);$$

取  $g(x) = x^3$ ,  $g'(x) = 3x^2$ , 有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}, \quad x_3 \in (a, b),$$

或 
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (b^2 + ba + a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}, \quad x_3 \in (a, b).$$

于是, 在  $(a, b)$  内存在三点  $x_1, x_2, x_3$ , 有

$$f'(x_1) = (b + a) \frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2 + ba + a^2) \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

例 2. 证明: 若函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内非负, 存在三阶导数, 且方程  $f(x) = 0$  有两个相异实根, 则存在  $c \in (a, b)$ , 使  $f'''(c) = 0$ .

证法 设方程  $f(x) = 0$  有两个相异实根  $x_1$  与  $x_2 \in (a, b)$  ( $x_1 < x_2$ ), 有  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ , 可证还存在  $\xi \in (x_1, x_2)$ , 使

$f'(\xi)=0$ . 再应用罗尔定理, 可证得结果.

证明 已知函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内非负, 而方程  $f(x)=0$  有两个相异的实根  $x_1$  与  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 即  $f(x_1)=f(x_2)=0$ , 则  $x_1$  与  $x_2$  必是函数  $f(x)$  的局部极小点. 根据费马定理, 有

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0.$$

根据罗尔定理, 存在  $\xi \in (x_1, x_2)$ , 使  $f'(\xi)=0$ .

根据罗尔定理, 存在  $\xi_1 \in (x_1, \xi)$  与  $\xi_2 \in (\xi, x_2)$ , 使

$$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0.$$

再根据罗尔定理, 存在  $c \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ , 使

$$f'''(c)=0.$$

例 3. 证明: 勒让德  $n$  次多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

存在  $n$  个不同的零点, 皆位于区间  $(-1, 1)$  之中.

证法 首先讨论  $2n$  次多项式  $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$ . 它在  $[-1, 1]$  上满足罗尔定理的条件 ( $Q_{2n}(1) = Q_{2n}(-1) = 0$ ), 根据罗尔定理,  $Q'_{2n}(x)$  在  $(-1, 1)$  内存在一个零点. 然后逐阶求导, 逐

次应用罗尔定理, 直到  $\frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ .

证明 设  $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$ . 有  $Q_{2n}(1) = Q_{2n}(-1) = 0$ . 根据罗尔定理, 存在  $c^{(1)} \in (-1, 1)$ , 使  $Q'_{2n}(c^{(1)}) = 0$ .

已知  $Q'_{2n}(1) = Q'_{2n}(-1) = 0$  (见《讲义》§ 5.5 例 9). 根据罗尔定理, 存在  $c_1^{(2)} \in (-1, c^{(1)})$  与  $c_2^{(2)} \in (c^{(1)}, 1)$ , 使

$$Q''_{2n}(c_1^{(2)}) = Q''_{2n}(c_2^{(2)}) = 0,$$

即  $Q''_{2n}(x)$  在  $(-1, 1)$  之中有两个零点  $c_1^{(2)}$  与  $c_2^{(2)}$ .

已知  $Q''_{2n}(1) = Q''_{2n}(-1) = 0$ . 根据罗尔定理, ……

一直到  $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} Q_{2n}(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n$ . 方程  $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n = 0$

在  $(-1, 1)$  之中有  $n-1$  个实根  $c_1^{(n-1)}, c_2^{(n-1)}, \dots, c_{n-1}^{(n-1)}$ , 且

$$-1 < c_1^{(n-1)} < c_2^{(n-1)} < \dots < c_{n-1}^{(n-1)} < 1,$$

$$\text{即 } \left. \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} Q_{2n}(x) \right|_{x=c_k^{(n-1)}} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

又已知  $\left. \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} Q_{2n}(x) \right|_{x=\pm 1} = 0$  (见《讲义》§ 5.5 例 9), 根据罗尔定理, 存在  $c_k^{(n)} \in (c_{k-1}^{(n-1)}, c_k^{(n-1)})$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , (其中  $c_0^{(n-1)} = -1$ ,  $c_n^{(n-1)} = 1$ ) 使

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x) \right|_{x=c_k^{(n)}} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

即勒让德  $n$  次多项式  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  存在  $n$  个不同的零点, 皆位于区间  $(-1, 1)$  之中.

说明 不难证明(见 § 5.5. 例 9),  $-1$  与  $1$  是  $2n$  次多项式  $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$  任意  $k$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ) 阶导数  $\frac{d^k}{dx^k} Q_{2n}(x)$  的零点. 然后对  $Q_{2n}(x)$  逐阶求导数, 根据罗尔定理, 一阶导数  $\frac{d}{dx} Q_{2n}(x)$  在  $(-1, 1)$  内有一个零点, 二阶导数  $\frac{d^2}{dx^2} Q_{2n}(x)$  在  $(-1, 1)$  内有两个零点, 且不相同, 一直求到  $n$  阶导数  $\frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$ , 它在  $(-1, 1)$  内存在  $n$  个零点, 且互不相同.

例 4. 证明: 若函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上可导, 且极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  都存在, 则极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

证法一 应用拉格朗日中值定理.

证明 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = A$ , 有

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi_x), \quad x < \xi_x < x+1.$$

已知极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi_x)$ . 于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi_x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A - A = 0, \end{aligned}$$