

高等学校教材

数学分析讲义

(第四版)

下 册

刘玉琏 傅沛仁

林 玎 苑德馨 刘 宁 编

高等教育出版社

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址:

电 话:(010) 84043279 13801081108

传 真:(010) 64033424

E - mail:dd@hep.com.cn

地 址:北京市东城区沙滩后街55号

邮 编:100009

责任编辑	李 陶
封面设计	刘晓翔
责任绘图	郝 林
版式设计	张 岚
责任校对	王 雨
责任印制	

内容简介

本书分上、下两册,是在第三版的基础上修订而成的。在内容和体例上,未作较大变动。因为使用本书的多为高等师范院校,为了加强基础,在第十章讲多元函数微分学时,首先把函数概念提高一步,给出比较严格的函数定义,并对高中“数学”没有严格定义的基本初等函数用分析的工具给以定义,对其性质予以证明。

本书阐述细致,范例较多,便于自学,可作为高等师范院校本科教材,也可作为高等理院校函授教材及高等教育自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义.下 刘玉琏等编.—4版.—北京:
高等教育出版社,2003.4
ISBN 7 - 04 - 011881 - 5

.数... .刘... .数学分析 - 高等学校 - 教材 .017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 013755 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网 址	http: www.hep.edu.cn
传 真	010 - 64014048		http: www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷

开 本	850 × 1168	1 32	版 次	年 月第 版
印 张	14.125		印 次	年 月第 次印刷
字 数	360 000		定 价	19.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目 录

第九章 级数	(1)
§ 9.1 数值级数	(1)
一、收敛与发散概念(1) 二、收敛级数的性质(5) 练习题 9.1(一) (9) 三、同号级数(11) 四、变号级数(21) 练习题 9.1(二)(31) 五、绝对收敛级数的性质(34) 练习题 9.1(三)(40)	
§ 9.2 函数级数	(41)
一、函数级数的收敛域(41) 二、一致收敛概念(43) 三、一致收 敛判别法(48) 四、函数列的一致收敛(55) 练习题 9.2(一)(58) 五、和函数的分析性质(62) 练习题 9.2(二)(68)	
§ 9.3 幂级数	(70)
一、幂级数的收敛域(70) 二、幂级数和函数的分析性质(75) 三、泰勒级数(81) 四、初等函数的幂级数展开(84) 五、幂级数 的应用(88) 六、指数函数与三角函数的幂级数定义(92) 练习 题 9.3(97)	
§ 9.4 傅里叶级数	(100)
一、傅里叶级数(100) 二、两个引理(103) 三、收敛定理(106) 四、奇偶函数的傅里叶级数(113) 五、以 $2l$ 为周期的函数的傅里 叶级数(118) 练习题 9.4(121)	
第十章 多元函数微分学	(124)
§ 10.1 多元函数	(124)
一、 n 维欧氏空间(124) 二、 \mathbb{R}^2 的连续性(130) 三、多元函数 概念(135) 练习题 10.1(139)	
§ 10.2 二元函数的极限与连续	(141)
一、二元函数的极限(141) 二、二元函数的连续性(147) 练习题	

10.2(152)	
§ 10.3. 多元函数微分法	(155)
一、偏导数(155) 二、全微分(159) 三、可微的几何意义(164)	
四、复合函数微分法(167) 五、方向导数(171) 练习题 10.3(173)	
§ 10.4. 二元函数的泰勒公式	(175)
一、高阶偏导数(175) 二、二元函数的泰勒公式(181) 三、二元函数的极值(185) 练习题 10.4(194)	
第十一章 隐函数	(198)
§ 11.1. 隐函数的存在性	(198)
一、隐函数概念(198) 二、一个方程确定的隐函数(201) 三、方程组确定的隐函数(207) 练习题 11.1(216)	
§ 11.2. 函数行列式	(218)
一、函数行列式(218) 二、函数行列式的性质(220) 三、函数行列式的几何性质(222) 练习题 11.2(224)	
§ 11.3. 条件极值	(225)
一、条件极值与拉格朗日乘数法(225) 二、例(232) 练习题 11.3(236)	
§ 11.4. 隐函数存在定理在几何方面的应用	(237)
一、空间曲线的切线与法平面(237) 二、曲面的切平面与法线(241) 练习题 11.4(244)	
第十二章 反常积分与含参变量的积分	(246)
§ 12.1. 无穷积分	(246)
一、无穷积分收敛与发散概念(246) 二、无穷积分与级数(250)	
三、无穷积分的性质(252) 四、无穷积分的敛散性判别法(255) 练习题 12.1(262)	
§ 12.2. 瑕积分	(263)
一、瑕积分收敛与发散概念(263) 二、瑕积分的敛散性判别法(267) 练习题 12.2(272)	
§ 12.3. 含参变量的积分	(273)
一、含参变量的有限积分(273) 二、例() (278) 三、含参变量的无穷积分(284) 四、例() (293) 五、函数与 B 函数(296)	

六、例()(300) 练习题 12.3(303)

第十三章 重积分 (307)

§ 13. 1. 二重积分 (307)

一、曲顶柱体的体积(307) 二、二重积分概念(309) 三、二重积分的性质(313) 练习题 13. 1(一)(315) 四、二重积分的计算(316) 五、二重积分的换元(325) 六、曲面的面积(331) 练习题 13. 1(二)(337)

§ 13. 2. 三重积分 (340)

一、三重积分概念(340) 二、三重积分的计算(342) 三、三重积分的换元(345) 四、简单应用(352) 练习题 13. 2(355)

第十四章 曲线积分与曲面积分 (358)

§ 14. 1. 曲线积分 (358)

一、第一型曲线积分(358) 二、第二型曲线积分(364) 三、第一型曲线积分与第二型曲线积分的关系(372) 四、格林公式(375) 五、曲线积分与路线无关的条件(382) 练习题 14. 1(389)

§ 14. 2. 曲面积分 (392)

一、第一型曲面积分(392) 二、第二型曲面积分(395) 三、奥 - 高公式(402) 四、斯托克斯公式(406) 练习题 14. 2(413)

§ 14. 3. 场论初步 (416)

一、梯度(416) 二、散度(419) 三、旋度(423) 四、微分算子(429) 练习题 14. 3(430)

练习题答案 (432)

第九章 级数

级数分为数值级数与函数级数.函数级数是表示函数,特别是表示非初等函数的一个重要的数学工具.例如,有的微分方程的解不是初等函数,但其解却可表为函数级数.函数级数又是研究函数(初等函数与非初等函数)性质的一个重要手段.因此,函数级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用.数值级数是函数级数的特殊情况,它又是函数级数的基础.本章首先讨论数值级数的基本理论.

§ 9. 1. 数值级数

一、收敛与发散概念

设有数列 $\{ u_n \}$, 即

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来, 即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad \text{或} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (2)$$

称为数值级数, 简称级数, 其中 u_n 称为级数(2)的第 n 项或通项.

级数(2)是无限多个数的和.我们只会计算有限个数的和, 不仅不会计算无限多个数的和, 甚至都不知道何谓无限多个数的和.因此, 无限多个数的和是一个未知的新概念.这个新概念也不是孤立的, 它与我们已知的有限个数的和联系着.不难想到, 由有限个

数的和转化到“无限多个数的和”应借助极限这个工具来实现。

设级数(2)前 n 项的和是 S_n , 即

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{或} \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

称为级数(2)的 n 项部分和. 显然, 对给定级数(2), 其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是, 级数(2)对应着一个已知的部分和数列 $\{S_n\}$.

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = S,$$

则称级数(2)收敛, S 是级数(2)的和, 表为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数(2)发散, 此时级数(2)没有和.

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 而 $S - S_n$ 表为 r_n , 即

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots,$$

称为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项余和, 简称余和. 显然, 级数收敛, 总有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0.$$

由此可见, 级数的敛散性(收敛与发散)是借助于它的部分和数列的敛散性定义的. 反之, 数列的敛散性也可归结为级数的敛散性. 事实上, 设有数列 $\{S_n\}$. 令

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \dots, a_n = S_n - S_{n-1}, n = 2, 3, \dots$$

显然, $S_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \dots + (S_n - S_{n-1})$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

即数列 $\{S_n\}$ 的敛散性可归结为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

因此,研究收敛级数及其和数只不过是研究收敛数列及其极限的一种新形式.因为级数是有限和的推广,有鲜明的直观性,所以,这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复,它使我们处理不同形式的极限具有更大的灵活性,并提供了新的数学工具.

例 1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

的敛散性,其中 $a \neq 0$, r 是公比.

解 1) 当 $|r| < 1$ 时,已知几何级数的 n 项部分和

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

() 当 $|r| < 1$ 时,存在极限,且

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

因此,当 $|r| < 1$ 时,几何级数收敛,其和是 $\frac{a}{1 - r}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

() 当 $|r| > 1$ 时,不存在极限,且

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{a - ar^n}{1 - r} = \dots$$

因此,当 $|r| > 1$ 时,几何级数发散.

2) 当 $|r| = 1$ 时,有两种情况:

() 当 $r = 1$ 时,几何级数是 $(a \neq 0)$

$$a + a + a + \dots + a + \dots$$

$$S_n = a + a + \dots + a = na.$$

见 § 2.1 例 4, 当 $|r| < 1$ 时, $\lim_n r^n = 0$.

$$\lim_n S_n = \lim_n na = \quad ,$$

即部分和数列 $\{ S_n \}$ 发散.

() 当 $r = -1$ 时, 几何级数是

$$a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1} a + \dots$$

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 是偶数,} \\ a, & n \text{ 是奇数,} \end{cases}$$

即部分和数列 $\{ S_n \}$ 发散.

于是, 当 $|r| = 1$ 时, 几何级数发散.

综上所述, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, 当 $|r| < 1$ 时收敛, 其和是

$\frac{a}{1-r}$; 当 $|r| \geq 1$ 时发散.

例 2 证明, 级数

$$\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \dots$$

收敛, 并求其和.

证明 通项 u_n 可改写为

$$u_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right)$$

级数的 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5}$$

于是, 级数收敛, 其和是 $\frac{1}{5}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}.$$

例 3 证明,调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

是发散的.

证明 设调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的 n 项部分和是 S_n , 即

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

由 § 2.2 例 11, 已知数列 $\{S_n\}$ 发散, 从而, 调和级数发散.

注 由上册练习题 2.2 第 19 题知

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = c \text{ (欧拉常数)}.$$

或
$$\lim_n \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

即当 n 时, 调和级数的部分和 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 与 $\ln n$ 是等价无穷大, 即部分和 S_n 发散到正无穷大的速度十分缓慢. 与 $\ln n$ 相当. 欧拉曾计算过,

$$S_{1\,000} = 7.48\dots, \quad S_{1\,000\,000} = 14.39\dots \text{ 等等}.$$

二、收敛级数的性质

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛是等价的, 所以部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛的必要充分条件也就是级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件. 已知数列 $\{S_n\}$ 的柯西收敛准则:

数列 $\{S_n\}$ 收敛 $\iff \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}_+, \text{ 有}$
 $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon.$

设 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和, 有

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}.$$

于是, 有下面级数的柯西收敛准则:

定理 1. (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\iff \forall \epsilon > 0,$

$\forall N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}_+,$ 有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \epsilon.$$

柯西收敛准则在理论上十分重要, 但用它来判别一个具体级数的敛散性, 却往往很麻烦, 甚至很困难.

根据定理 1 的必要性, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 即 $\forall \epsilon > 0,$

$\forall N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N,$ 取 $p = 1,$ 有 $|u_{n+1}| < \epsilon.$ 于是, 有

推论 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$

推论 1 的等价命题是, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如, 级数

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \dots + \frac{n}{100 \cdot n + 1} + \dots$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100 \cdot n + 1} = \frac{1}{100} \neq 0,$ 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100 \cdot n + 1}$ 发散.

注 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件, 而不是充

分条件, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散. 例如, 调和级数 (见

例 3)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

有 $\lim_n u_n = \lim_n \frac{1}{n} = 0$, 而调和级数 $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ 却是发散的.

定理 1 指出, 级数 $\sum_{n=1} u_n$ 收敛等价于级数 $\sum_{n=1} u_n$ 的充分远 (即 $n > N$) 的任意片段 (即 " $p > N$, $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}$) 的绝对值可以任意小. 由此可见, 级数 $\sum_{n=1} u_n$ 的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关, 而与级数 $\sum_{n=1} u_n$ 前面有限项无关. 于是, 又有

推论 2 若去掉、增添或改变级数 $\sum_{n=1} u_n$ 的有限项, 则不改变级数 $\sum_{n=1} u_n$ 的敛散性.

例如, 去掉发散级数 $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ 的前面 100 项, 而新级数

$$\sum_{n=101} \frac{1}{n} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{100+m} + \dots$$

仍是发散的.

根据数列极限运算定理可得级数运算定理:

定理 2 若级数 $\sum_{n=1} u_n$ 收敛, 其和是 S , 则级数

$$\sum_{n=1} cu_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots$$

也收敛, 其和是 cS , 其中 c 是常数 ($c \neq 0$).

证明 设级数 $\sum_{n=1} u_n$ 与 $\sum_{n=1} cu_n$ 的 n 项部分和分别是 S_n 与 σ_n , 有

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = cS_n.$$

已知 $\lim_n S_n = S$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = cS,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 其和是 cS .

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足数(非零)的分配律.

定理 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 则不改变级数每项的位置, 按原有的顺序将某些项结合在一起, 构成的新级数

$$\begin{aligned} & (u_1 + \dots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2}) + \dots \\ & + (u_{n_{k-1}+1} + \dots + u_{n_k}) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

也收敛, 其和也是 S .

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和是 S_n , 新级数(3)的 k 项部分和是 σ_k , 有

$$\begin{aligned} \sigma_k &= (u_1 + \dots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \dots + u_{n_2}) + \dots \\ &+ (u_{n_{k-1}+1} + \dots + u_{n_k}) \\ &= u_1 + u_2 + \dots + u_{n_k} = S_{n_k}, \end{aligned}$$

即新级数(3)的部分和数列 $\{\sigma_k\}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 根据 § 2.2 定理 9, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = S$. 于是, 新级数(3)收敛, 其和也是 S .

定理 3 告诉我们, 像有限和一样, 对任何一个收敛级数项与项之间不改变次序任意加括号, 不会改变级数的收敛性, 也不改变它

每个括号内的和数作为新级数的一项, 新级数的第 k 项是

$$(u_{n_{k-1}+1} + \dots + u_{n_k}).$$

的和数,即收敛级数满足结合律.

注 对有限和来说,不但能随意加括号,而且可以随意去掉括号.但在级数中就不能随便去掉(无限多个)括号.例如,级数

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots$$

收敛于 0,但去掉括号之后的级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

却是发散的.通俗地说,收敛级数项与项之间可以任意加括号,但不能任意去掉括号.

定理 4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,其和分别是 A 与 B ,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

也收敛,其和是 $A \pm B$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 的 n 项部分和分别是 A_n , B_n 与 C_n ,有

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

已知 $\lim_n A_n = A$ 与 $\lim_n B_n = B$,有

$$\lim_n C_n = \lim_n A_n \pm \lim_n B_n = A \pm B,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛,其和是 $A \pm B$.

练习题 9.1(一)

1. 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

2. 证明:若 m 是固定的正整数,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right).$$

3. 证明:若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

4. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 反之是否成立?

5. 证明:若 $\{a_n\}$ 是整数数列, 且 $0 < a_n < 9$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 收敛, 其和是 $0.a_1 a_2 \dots a_n \dots$.

6. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且

$$c_n = a_n + b_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. (提示:应用级数的柯西收敛准则.)

7. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 发散.

8. 证明:若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

9. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (提示:证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 的两个子数列 $\{S_{2n}\}$ 与 $\{S_{2n-1}\}$ 有相同的极限.)

10. 证明:若数列 $\{na_n\}$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

11. 证明:若 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

12. 证明:若将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 依次若干项结合得新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛, 其中 $A_k = a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$, 且 A_k 的项有相同的符号, 则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且两个收敛级数的和相等.

三、同号级数

同号级数是指级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

的每一项 u_n 的符号都是非负或都是非正. 若 $u_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数; 若 $u_n < 0 (n = 1, 2, \dots)$, 称级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是负项级数.

将负项级数每项乘以 -1 , 负项级数就变成了正项级数, 根据定理 2, 负项级数与正项级数具有相同的敛散性. 于是, 讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性. 因此, 下面只讨论正项级数敛散性及其敛散性的判别法.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 则此级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加, 即

$$S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$$

根据 § 2.2 公理, 有判别正项级数收敛性的定理:

定理 5. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 \iff 它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 4 证明: 正项级数