高等学校教材

数学分析讲义

(第四版)

上　　册

刘玉琏　傅沛仁
林　玎　苑德馨　刘　宁　编

高等教育出版社

郑 重 声 明

责任编辑　李　陶

封面设计　刘晓翔

责任绘图　尹　莉

版式设计　张　岚

责任校对　杨雪莲

责任印制

内容提要

本书分上、下两册，是在第三版的基础上修订而成的，但在内容和体例上，未作较大变动。上册内容包括：函数，极限，连续函数，实数的连续性，导数与微分，微分学基本定理及其应用，不定积分，定积分等。

本书阐述细致，范例较多，便于自学，可作为高等师范院校本科教材，也可作为高等理科院校函授教材及高等教育自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义．上 刘玉琏等编．—4 版．—北京：高等教育出版社，2003.4

ISBN 7-04-011880-7

Ⅰ.数… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 008301 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	

开　　本	850×1168　大 32	版　　次	年　月第　版
印　　张	14.25	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	340 000	定　　价	19.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

第四版前言

从前几版情况看,使用本书作为数学分析课教材的学校多为高师院校,为了加强基础,在第十章讲多元函数微分学时,首先把函数概念提高一步,给出比较严格的函数定义,并对高中"数学"没有严格定义的基本初等函数用分析的工具给以定义,对其性质予以证明。我们认为,补加这部分内容对培养合格的中学数学教师是有益的。

本书的知识内容、知识范围、知识的深度和广度、知识的难易程度、例题和练习题的选配、与其后继课的衔接等,基本上能满足当前多数兄弟院校对数学分析课的教学需要。因此本书的主体内容基本上不作变动。在保持本书通俗易懂,适于自学,便于讲授的基础上,修错补漏,使其更好地为提高高校的基础课教学质量服务。

因编者年事已高,身体欠佳,特邀请三位有多年的丰富的数学分析教学经验的教师参加协助修订,她们是林玎、苑德馨和刘宁。

本书第四版责任编辑李陶同志对书稿精心审改,为提高本书的质量付出了辛勤劳动,在此谨向他表示衷心感谢。限于编者的水平,谬误在所难免,诚恳期望广大读者和老师们批评指正。

编者

2002 年 10 月于长春

第三版前言

为了使本书的第三版能与《数学分析讲义学习指导书》(刘玉琏等编,高等教育出版社 1987 年 4 月第一版)配套使用,此次修订,内容和体例原则上不作大的变动,并保持本书通俗易懂,便于自学的特点。主要的改动有:改正了第二版中的错漏,对内容作了个别的增删,对练习题作了小量调整和精简,对某些文字叙述作了改写或重写。引入了量词符号,从而许多的定义和定理的叙述以及定理的证明都相应作了改动。

此次修订,得到韩山师专林庆瑞,贵阳师专任永复、丁丰朝,泉州师专蔡永芳,晋东南师专李江等老师们的关怀和支持。他们经过多次教学实践,对本书的第二版提出较全面的系统的批评意见和修订建议。这是提高修订质量不可缺少的外部条件。同时也得到我系数学分析教研室吕凤、王大海、苑德馨、赵杰、刘宁、尚淑芳等老师的关怀和帮助。在此谨向他们表示衷心感谢。

高等教育出版社本书的责任编辑文小西副编审,对本书的出版和修订始终给予具体的帮助和指导,并细致审定书稿,纠正一些错误和不妥之处,为提高书稿质量付出了艰苦劳动。在此谨向他表示衷心感谢。

尽管本书做了两次修订,但限于编者的水平,谬误仍在所难免。敬希广大读者和老师们再予批评指正。

编者

1991 年 8 月于东北师大

第二版前言

从 1960 年本《讲义》出版以来，收到许多读者的来信，对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸方面提出很多宝贵意见，并建议增配练习题，有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表。这是对我们工作的鼓励和支持，也是提高修订质量不可缺少的条件。借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订，根据 1980 年 5 月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》，对原《讲义》的内容作了小量的增删。在保持原《讲义》通俗易懂，便于自学的前提下，对体例、格式、叙述等作了较大的修改。力求使原《讲义》的优点得到发展，缺点得到克服。其中函数与极限两章是重新编写的。函数的讲法适应了新大纲的要求；极限的讲法注意了与现行高中《微积分初步》的衔接，既便于自学，又有利于指导中学的极限教学。

此次修订，每节(个别除外)之后都配有一定数量的练习题，对较难的题给了提示，书后附有计算题与判别题的答案。为了满足读者学习《数学分析》的不同要求，在每个练习题(个别除外)中分为甲类题(在符号"＊ ＊ ＊ ＊"之前)与乙类题(在符号"＊ ＊ ＊ ＊"之后)。我们认为，高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科，以本《讲义》作为《数学分析》代用教材，只做部分或全部甲类题就够了。高师数学专业四年制本科或函授本科，以本《讲义》作为《数学分析》的教材，除做甲类题外，还要做部分或全部乙类题。如果学生做完全部练习题有困难，教师可选其中某些题作为习题

课上的示范题或习作题。

本《讲义》的内容都是新大纲要求的，故此次修订不排小字。师范专科学校使用本《讲义》，在保证学生学好上册内容的基础上，对下册内容应作必要删减。

此次修订，承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿，提了许多宝贵的意见和建议。对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢。

尽管此次修订我们作了很大努力，但是由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬希广大读者再予批评指正。

编者

1981年7月于东北师大

第一版前言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的。在修改时,吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见。

本《讲义》的内容选取,考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础,注意了数学分析课程本身的系统性,照顾了其它后继课的需要。文字叙述力求通顺,定理证明力求详明,使其通俗易懂,便于自学。

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析;对一些定理的证明,除了给出分析的严格证明外,注意用几何图形帮助读者理解定理内容,掌握定理的证法。

本《讲义》有些部分用小字排印,它们有的是对某些问题作进一步的说明;有的是教学上的难点;有的是进一步提高不可缺少的内容。初学的读者,可先不阅读小字部分,待逐步掌握数学分析的方法之后,再阅读这部分内容。

由于我们水平有限,错误和不妥之处一定很多,敬希广大读者批评指正。

本《讲义》主要由刘玉琏同志执笔编写,傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作。

吉林师范大学数学系

数学分析教研室

1960 年于长春

目　　录

常用符号

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号“$\in$”表示“属于”；符号“ú”（或“$\notin$”）表示“不属于”，符号“$P(x)$”表示“元素 x 具有性质 P”。

设 A 是集合，x 是元素．例如：

$x \in A$——元素 x 属于 A．xú A（或 $x \notin A$）——元素 x 不属于 A．$\{x \mid x \in A, P(x)\}$——集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体．

2. 集合之间

符号“ ”表示“包含”；符号“$=$”表示“相等”；符号“$\varnothing$”表示“空集”；符号“$\cup$”表示“并”或“和”；符号“$\cap$”表示“交”或“乘”；符号“$-$”表示“差”．

设 A 与 B 是两个集合．例如：

B A——B 的任意元素 x 都是 A 的元素，或 B 是 A 的子集，或 B 被 A 包含．

B A，且 $A \neq B$（或 B A）——B 是 A 的真子集．

$A - B = \{x \mid x \in A$，但 xú B$\}$——B 关于 A 的差集，如图 0.1(a)．

若 B A，$\complement_A B = \{x \mid x \in A$，但 xú B$\}$——由属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合，或 A 中子集 B 的“补集”或“余集”，如图 0.1(b)．

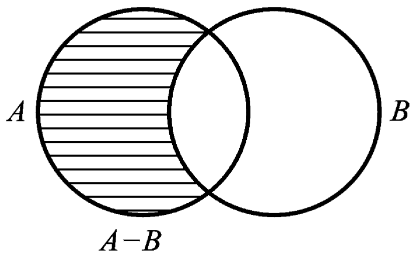

图 0.1(a)

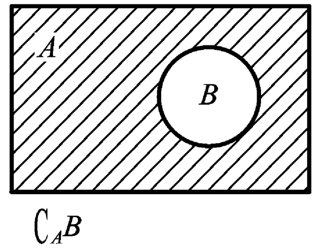

图 0.1(b)

$A\cup B$—— A 与 B 的并集或和集,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\},\text{如图 0.2(a)}.$$

$A\cap B$—— A 与 B 的交集或积集,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 同时 }x\in B\},\text{如图 0.2(b)}.$$

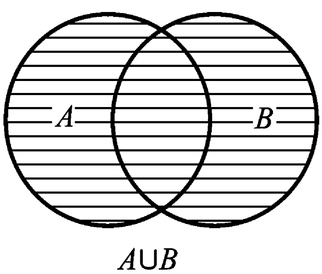

图 0.2(a)

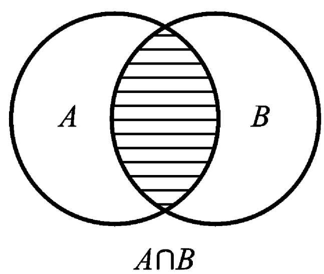

图 0.2(b)

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一列无限多个集合.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid\text{存在某个正整数 }k,\text{有 }x\in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid\text{对任意正整数 }k,\text{有 }x\in A_k\}.$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数.全体实数,即实数集,表为 R.我们已知实数集 R 中的数和数轴上的点是一一对应的,因此也称 R 是实直线.常将“数 a”说成“点 a”,反之亦然.本书所说的数集都是实数集 R 的子集.实数集 R 有些常用的重要子集:

符号“N_+”表示正整数集;符号“N”表示自然数集;符号“Z”表示整数集;符号“Q”表示有理数集,有

$$N_+ \quad N \quad Z \quad Q \quad R.$$

1. 区间　为了书写简练.将各种区间的符号、名称、定义列表如下:($a,b\in R$,且 $a<b$)

符　　号	名　　称		定　　义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\le x\le b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x\mid a<x\le b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\le x<b\}$
$(a,+\infty)$	无穷区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid a\le x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\le a\}$

符号$+\infty$和$-\infty$分别读作“正无穷大”和“负无穷大”,符号∞是$+\infty$和$-\infty$的通称,读作“无穷大”.在数学分析中不把它们看做数,它们在数轴上也没有位置,一般不与实数作四则运算.但它们与实数有顺序关系,$+\infty$表示比一切实数都大,$-\infty$表示比一切实数都小,即对任意实数 x,有 $-\infty<x<+\infty$.无穷开区间$(-\infty,+\infty)$也表示实数集 R.

2. 邻域　设 $a\in R$,任意 $\delta>0$.

数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$表为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

称为 a 的 δ 邻域.当不需要注明邻域半径 δ 时,通常是对某个确定的邻域半径 δ,常将它表为 $U(a)$,简称 a 的邻域.

数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$表为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a,称为 a 的 δ 去心邻域.当不需要注明邻域半径 δ 时,通常是对某个确定的邻域半径 δ,常将它表为 $U(a)$,简称 a 的去心邻域.

三、逻辑符号

数学分析的语言是文字叙述和数学符号共同组成的,其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号.使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确.数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势.本书将普遍使用这些符号.

1. 连词符号

符号“　”表示“蕴涵”或“推得”,或“若……,则……”.

符号“$\Longleftrightarrow$”表示“必要充分”,或“等价”.

设 A, B 是两个陈述句,可以是条件,也可以是命题.例如:

A　B——若命题 A 成立,则命题 B 成立;或命题 A 蕴涵命题 B;称 A 是 B 的充分条件,同时也称 B 是 A 的必要条件.

n 是整数　n 是有理数.

$A \Longleftrightarrow B$——命题 A 与命题 B 等价;或命题 A 蕴涵命题 B (A　B),同时命题 B 也蕴涵命题 A (B　A);或 A(B) 是 B(A) 的必要充分条件.

A　B $\Longleftrightarrow$ 任意 $x \in A$,有 $x \in B$.

2. 量词符号

符号“"”表示“任意”,或“任意一个”,它是将英文字母 A 倒过来.

符号“v”表示“存在某个”或“能找到”,它是将英文字母 E 反过来.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确.例如,数集 A 有上界、有下界和有界的定义:

数集 A 有上界$\Longleftrightarrow$v $b\in R$," $x\in A$,有 $x\le b$;

数集 A 有下界$\Longleftrightarrow$v $a\in R$," $x\in A$,有 $a\le x$;

数集 A 有界$\Longleftrightarrow$v $M>0$," $x\in A$,有$|x|\le M$.

设有命题:"集合 A 中任意元素 a 都有性质 P(a)",用符号表为

$$\text{"}\ a\in A,\text{有 } P(a).$$

显然,这个命题的否命题是:"集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$",用符号表为

$$\text{v}\ a_0\in A,\text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题.由此可见,否定一个命题,要将原命题中的" " "改为"v ",将"v "改为" " ",并将性质 P 否定.例如,数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题,用符号表示就是:

数集 A 有上界$\Longleftrightarrow$v $b\in R$," $x\in A$,有 $x\le b$;

数集 A 无上界$\Longleftrightarrow$" $b\in R$,v $x_0\in A$,有 $b<x_0$.

四、其它符号

符号"max"表示"最大"(它是 maximum(最大)的缩写).

符号"min"表示"最小"(它是 minimum(最小)的缩写).

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个实数.例如:

$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$—— n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大数.

$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$—— n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最小数.

符号[a]表示不超过 a 的最大整数.例如:

$[\pi]=[3.141\,5\cdots]=3,\quad [-e]=[-2.718\cdots]=-3,$

$[0]=0,\quad [5]=5.$

符号"n!"表示"不超过 n 的所有正整数的连乘积",读作"n 的阶乘",即

$n!=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1.\quad 7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1.$

规定:$0!=1$.