

高等学校教材

数学分析讲义

(第四版)

上 册

刘玉琏 傅沛仁

林 玎 苑德馨 刘 宁 编

高等教育出版社

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址:

电 话:(010) 84043279 13801081108

传 真:(010) 64033424

E - mail:dd@hep.com.cn

地 址:北京市东城区沙滩后街55号

邮 编:100009

责任编辑 李 陶

封面设计 刘晓翔

责任绘图 尹 莉

版式设计 张 岚

责任校对 杨雪莲

责任印制

内容提要

本书分上、下两册,是在第三版的基础上修订而成的,但在内容和体例上,未作较大变动。上册内容包括:函数,极限,连续函数,实数的连续性,导数与微分,微分学基本定理及其应用,不定积分,定积分等。

本书阐述细致,范例较多,便于自学,可作为高等师范院校本科教材,也可作为高等理院校函授教材及高等教育自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 上 刘玉琏等编. —4版. —北京:
高等教育出版社,2003.4

ISBN 7 - 04 - 011880 - 7

.数... .刘... .数学分析 - 高等学校 -
教材 .017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 008301 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网 址	http: www.hep.edu.cn
传 真	010 - 64014048		http: www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷

开 本	850 × 1168 大 32	版 次	年 月第 版
印 张	14.25	印 次	年 月第 次印刷
字 数	340 000	定 价	19.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第四版前言

从前几版情况看,使用本书作为数学分析课教材的学校多为高师院校,为了加强基础,在第十章讲多元函数微分学时,首先把函数概念提高一步,给出比较严格的函数定义,并对高中“数学”没有严格定义的基本初等函数用分析的工具给以定义,对其性质予以证明。我们认为,补加这部分内容对培养合格的中学数学教师是有益的。

本书的知识内容、知识范围、知识的深度和广度、知识的难易程度、例题和练习题的选配、与其后继课的衔接等,基本上能满足当前多数兄弟院校对数学分析课的教学需要。因此本书的主体内容基本上不作变动。在保持本书通俗易懂,适于自学,便于讲授的基础上,修错补漏,使其更好地为提高高校的基础课教学质量服务。

因编者年事已高,身体欠佳,特邀请三位有多年的丰富的数学分析教学经验的教师参加协助修订,她们是林玳、苑德馨和刘宁。

本书第四版责任编辑李陶同志对书稿精心审改,为提高本书的质量付出了辛勤劳动,在此谨向他表示衷心感谢。限于编者的水平,谬误在所难免,诚恳期望广大读者和老师们批评指正。

编者

2002年10月于长春

第三版前言

为了使本书的第三版能与《数学分析讲义学习指导书》(刘玉琏等编,高等教育出版社1987年4月第一版)配套使用,此次修订,内容和体例原则上不作大的变动,并保持本书通俗易懂,便于自学的特点。主要的改动有:改正了第二版中的错漏,对内容作了个别的增删,对练习题作了小量调整和精简,对某些文字叙述作了改写或重写。引入了量词符号,从而许多的定义和定理的叙述以及定理的证明都相应作了改动。

此次修订,得到韩山师专林庆瑞,贵阳师专任永复、丁丰朝,泉州师专蔡永芳,晋东南师专李江等老师们的关怀和支持。他们经过多次教学实践,对本书的第二版提出较全面的系统的批评意见和修订建议。这是提高修订质量不可缺少的外部条件。同时也得到我系数学分析教研室吕凤、王大海、苑德馨、赵杰、刘宁、尚淑芳等老师的关怀和帮助。在此谨向他们表示衷心感谢。

高等教育出版社本书责任编辑文小西副编审,对本书的出版和修订始终给予具体的帮助和指导,并细致审定书稿,纠正一些错误和不妥之处,为提高书稿质量付出了艰苦劳动。在此谨向他表示衷心感谢。

尽管本书做了两次修订,但限于编者的水平,谬误仍在所难免。敬希广大读者和老师们再予批评指正。

编者

1991年8月于东北师大

第二版前言

从 1960 年本《讲义》出版以来,收到许多读者的来信,对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸方面提出很多宝贵意见,并建议增配练习题,有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表。这是对我们工作的鼓励和支持,也是提高修订质量不可缺少的条件。借此再版之机,向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订,根据 1980 年 5 月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》,对原《讲义》的内容作了小量的增删。在保持原《讲义》通俗易懂,便于自学的前提下,对体例、格式、叙述等作了较大的修改。力求使原《讲义》的优点得到发展,缺点得到克服。其中函数与极限两章是重新编写的。函数的讲法适应了新大纲的要求;极限的讲法注意了与现行高中《微积分初步》的衔接,既便于自学,又有利于指导中学的极限教学。

此次修订,每节(个别除外)之后都配有一定数量的练习题,对较难的题给了提示,书后附有计算题与判别题的答案。为了满足读者学习《数学分析》的不同要求,在每个练习题(个别除外)中分为甲类题(在符号“ * * * * ”之前)与乙类题(在符号“ * * * * ”之后)。我们认为,高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科,以本《讲义》作为《数学分析》代用教材,只做部分或全部甲类题就够了。高师数学专业四年制本科或函授本科,以本《讲义》作为《数学分析》的教材,除做甲类题外,还要做部分或全部乙类题。如果学生做完全部练习题有困难,教师可选其中某些题作为习题

课上的示范题或习作题。

本《讲义》的内容都是新大纲要求的,故此次修订不排小字。师范专科学校使用本《讲义》,在保证学生学好上册内容的基础上,对下册内容应作必要删减。

此次修订,承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿,提了许多宝贵的意见和建议。对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢。

尽管此次修订我们作了很大努力,但是由于我们水平有限,错误与不妥之处在所难免,敬希广大读者再予批评指正。

编者

1981年7月于东北师大

第一版前言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的。在修改时,吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见。

本《讲义》的内容选取,考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础,注意了数学分析课程本身的系统性,照顾了其它后继课的需要。文字叙述力求通顺,定理证明力求详尽,使其通俗易懂,便于自学。

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析;对一些定理的证明,除了给出分析的严格证明外,注意用几何图形帮助读者理解定理内容,掌握定理的证法。

本《讲义》有些部分用小字排印,它们有的是对某些问题作进一步的说明;有的是教学上的难点;有的是进一步提高不可缺少的内容。初学的读者,可先不阅读小字部分,待逐步掌握数学分析的方法之后,再阅读这部分内容。

由于我们水平有限,错误和不妥之处一定很多,敬希广大读者批评指正。

本《讲义》主要由刘玉琏同志执笔编写,傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作。

吉林师范大学数学系
数学分析教研室

1960年于长春

目 录

常用符号	1
第一章 函数	1
§ 1.1 函数	1
一、函数概念(1) 二、函数的四则运算(5) 三、函数的图像(7)	
四、数列(9) 练习题 1.1(10)	
§ 1.2 四类具有特殊性质的函数.....	12
一、有界函数(12) 二、单调函数(16) 三、奇函数与偶函数(18)	
四、周期函数(19) 练习题 1.2(21)	
§ 1.3 复合函数与反函数	22
一、复合函数(22) 二、反函数(25) 三、初等函数(29)	
练习题 1.3(33)	
第二章 极限.....	35
§ 2.1 数列极限	35
一、极限思想(35) 二、数列 $\frac{(-1)^n}{n}$ 的极限(37) 三、数列极	
限概念(40) 四、例(43) 练习题 2.1(47)	
§ 2.2 收敛数列	48
一、收敛数列的性质(48) 二、收敛数列的四则运算(51)	
三、数列的收敛判别法(56) 四、子数列(64) 练习题 2.2(66)	
§ 2.3 函数极限	69
一、当 $x \rightarrow a$ 时,函数 $f(x)$ 的极限(69) 二、例() (71)	
三、当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限(73) 四、例() (78)	
练习题 2.3(81)	
§ 2.4 函数极限的定理	82

一、函数极限的性质(82)	二、函数极限与数列极限的关系(85)	
三、函数极限存在判别法(88)	四、例(93)	练习题 2.4(95)
§ 2.5 无穷小与无穷大		97
一、无穷小(97)	二、无穷大(98)	三、无穷小的比较(102)
练习题 2.5(105)		
第三章 连续函数		107
§ 3.1 连续函数		107
一、连续函数概念(107)	二、例(109)	三、间断点及其分类(111)
练习题 3.1(113)		
§ 3.2 连续函数的性质		115
一、连续函数的局部性质(115)	二、闭区间连续函数的整体性质(116)	
三、反函数的连续性(120)	四、初等函数的连续性(121)	
练习题 3.2(125)		
第四章 实数的连续性		128
§ 4.1 实数连续性定理		128
一、闭区间套定理(128)	二、确界定理(130)	三、有限覆盖定理(134)
四、聚点定理(136)	五、致密性定理(137)	六、柯西收敛准则(138)
练习题 4.1(140)		
§ 4.2 闭区间连续函数整体性质的证明		141
一、性质的证明(141)	二、一致连续性(144)	练习题 4.2(147)
第五章 导数与微分		150
§ 5.1 导数		150
一、实例(150)	二、导数概念(153)	三、例(155)
练习题 5.1(161)		
§ 5.2 求导法则与导数公式		163
一、导数的四则运算(163)	二、反函数求导法则(168)	三、复合函数求导法则(170)
四、初等函数的导数(175)	练习题 5.2(179)	
§ 5.3 隐函数与参数方程求导法则		181
一、隐函数求导法则(181)	二、参数方程求导法则(186)	
练习题 5.3(187)		
§ 5.4 微分		189
一、微分概念(189)	二、微分的运算法则和公式(193)	三、微分

在近似计算上的应用(194) 练习题 5.4(196)	
§ 5.5 高阶导数与高阶微分	197
一、高阶导数(197) 二、莱布尼茨公式(200) 三、高阶微分(204)	
练习题 5.5(205)	
第六章 微分学基本定理及其应用	207
§ 6.1 中值定理	207
一、罗尔定理(207) 二、拉格朗日定理(210) 三、柯西定理(212)	
四、例(213) 练习题 6.1(216)	
§ 6.2 洛必达法则	218
一、 $\frac{0}{0}$ 型(218) 二、一型(223) 三、其他待定型(225)	
练习题 6.2(229)	
§ 6.3 泰勒公式	230
一、泰勒公式(230) 二、常用的几个展开式(236) 练习题 6.3(238)	
§ 6.4 导数在研究函数上的应用	240
一、函数的单调性(240) 二、函数的极值与最值(245) 三、函数的凸凹性(256)	
四、曲线的渐近线(267) 五、描绘函数图像(271)	
练习题 6.4(276)	
第七章 不定积分	279
§ 7.1 不定积分	279
一、原函数(279) 二、不定积分(281) 练习题 7.1(286)	
§ 7.2 分部积分法与换元积分法	286
一、分部积分法(287) 二、换元积分法(291) 练习题 7.2(300)	
§ 7.3 有理函数的不定积分	302
一、代数的预备知识(302) 二、有理函数的不定积分(305)	
练习题 7.3(310)	
§ 7.4 简单无理函数与三角函数的不定积分	311
一、简单无理函数的不定积分(311) 二、三角函数的不定积分(316)	
练习题 7.4(321)	
第八章 定积分	323
§ 8.1 定积分	323

一、实例(323) 二、定积分概念(327)	
§ 8 2 可积准则	330
一、小和与大和(330) 二、可积准则(333) 三、三类可积函数(336)	
练习题 8. 2(339)	
§ 8 3 定积分的性质	341
一、定积分的性质(341) 二、定积分中值定理(348) 练习题 8. 3(350)	
§ 8 4 定积分的计算	352
一、按照定义计算定积分(352) 二、积分上限函数(354) 三、微积分的基本公式(356) 四、定积分的分部积分法(358) 五、定积分的换元积分法(361) 六、对数函数的积分定义(365) 七、指数函数——对数函数的反函数(370) 练习题 8. 4(372)	
§ 8 5 定积分的应用	376
一、微元法(376) 二、平面区域的面积(378) 三、平面曲线的弧长(384) 四、应用截面面积求体积(390) 五、旋转体的侧面积(395) 六、变力作功(397) 练习题 8. 5(399)	
§ 8 6 定积分的近似计算	401
一、梯形法(402) 二、抛物线法(406) 练习题 8. 6(409)	
附录 希腊字母表	410
练习题答案	412

常用符号

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号“ \in ”表示“属于”；符号“ \notin ”(或“ \notin ”)表示“不属于”，符号“ $P(x)$ ”表示“元素 x 具有性质 P ”。

设 A 是集合， x 是元素。例如：

$x \in A$ ——元素 x 属于 A 。 $x \notin A$ (或 $x \notin A$)——元素 x 不属于 A 。 $\{x | x \in A, P(x)\}$ ——集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体。

2 集合之间

符号“ \supset ”表示“包含”；符号“ $=$ ”表示“相等”；符号“ \emptyset ”表示“空集”；符号“ \cup ”表示“并”或“和”；符号“ \cap ”表示“交”或“乘”；符号“ $-$ ”表示“差”。

设 A 与 B 是两个集合。例如：

$B \subset A$ —— B 的任意元素 x 都是 A 的元素，或 B 是 A 的子集，或 B 被 A 包含。

$B \subset A$ ，且 $A \neq B$ (或 $B \subset A$)—— B 是 A 的真子集。

$A - B = \{x | x \in A, \text{但 } x \notin B\}$ —— B 关于 A 的差集，如图 Q 1(a)。

若 $B \subset A$ ， $\complement_A B = \{x | x \in A, \text{但 } x \notin B\}$ ——由属于 A 而不属于 B 的元素所组成的集合，或 A 中子集 B 的“补集”或“余集”，如图 Q 1(b)。

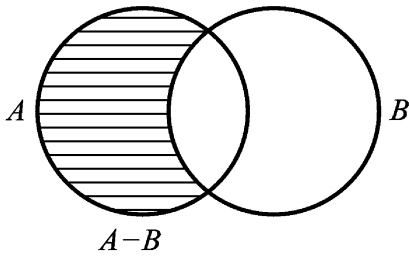


图 0.1(a)

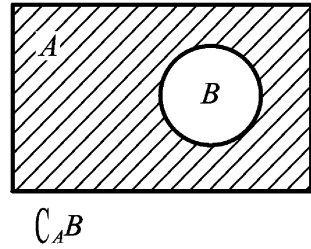


图 0.1(b)

$A \cup B$ —— A 与 B 的并集或和集, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \text{如图 0.2(a).}$$

$A \cap B$ —— A 与 B 的交集或积集, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 同时 } x \in B\}, \text{如图 0.2(b).}$$

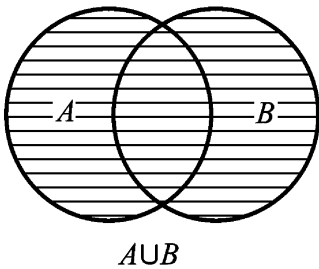


图 0.2(a)

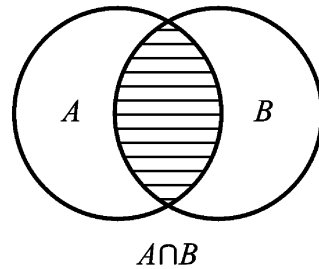


图 0.2(b)

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一列无限多个集合.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{存在某个正整数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{对任意正整数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}.$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数. 全体实数, 即实数集, 表为 R . 我们已知实数集 R 中的数和数轴上的点是一一对应的, 因此也称 R 是实直线. 常将“数 a ”说成“点 a ”, 反之亦然. 本书所说的数集都是实数集 R 的子集. 实数集 R 有些常用的重要子集:

符号“ N_+ ”表示正整数集;符号“ N ”表示自然数集;符号“ Z ”表示整数集;符号“ Q ”表示有理数集,有

$$N_+ \subset N \subset Z \subset Q \subset R.$$

1. 区间 为了书写简练,将各种区间的符号、名称、定义列表如下:($a, b \in R$, 且 $a < b$)

符 号	名 称	定 义
(a, b)	开区间	$\{x \mid a < x < b\}$
$[a, b]$	闭区间	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	半开区间	$\{x \mid a < x \leq b\}$
$[a, b)$	半开区间	$\{x \mid a \leq x < b\}$
$(a, +\infty)$	开区间	$\{x \mid a < x\}$
$[a, +\infty)$	闭区间	$\{x \mid a \leq x\}$
$(-\infty, a)$	开区间	$\{x \mid x < a\}$
$(-\infty, a]$	闭区间	$\{x \mid x \leq a\}$

符号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”,符号 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的通称,读作“无穷大”.在数学分析中不把它们看做数,它们在数轴上也没有位置,一般不与实数作四则运算.但它们与实数有顺序关系, $+\infty$ 表示比一切实数都大, $-\infty$ 表示比一切实数都小,即对任意实数 x ,有 $-\infty < x < +\infty$.无穷开区间 $(-\infty, +\infty)$ 也表示实数集 R .

2 邻域 设 $a \in R$,任意 $\delta > 0$.

数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 表为 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta),$$

称为 a 的 δ 邻域.当不需要注明邻域半径 δ 时,通常是对某个确定的邻域半径 δ ,常将它表为 $U(a)$,简称 a 的邻域.

数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 表为 $U(a, \delta)$,即

$U(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$,
也就是在 a 的邻域 $U(a, \delta)$ 中去掉 a , 称为 a 的去心邻域. 当不需要注明邻域半径 δ 时, 通常是对某个确定的邻域半径 δ_0 , 常将它表为 $U(a)$, 简称 a 的去心邻域.

三、逻辑符号

数学分析的语言是文字叙述和数学符号共同组成的, 其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号. 使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

1. 连词符号

符号“ \Rightarrow ”表示“蕴涵”或“推得”, 或“若……, 则……”.

符号“ \iff ”表示“必要充分”, 或“等价”.

设 A, B 是两个陈述句, 可以是条件, 也可以是命题. 例如:

$A \Rightarrow B$ ——若命题 A 成立, 则命题 B 成立; 或命题 A 蕴涵命题 B ; 称 A 是 B 的充分条件, 同时也称 B 是 A 的必要条件.

$n \in \mathbb{Z}$ 是整数 $n \in \mathbb{Q}$ 是有理数.

$A \iff B$ ——命题 A 与命题 B 等价; 或命题 A 蕴涵命题 B ($A \Rightarrow B$), 同时命题 B 也蕴涵命题 A ($B \Rightarrow A$); 或 $A(B)$ 是 $B(A)$ 的必要充分条件.

$A \iff B \iff$ 任意 $x \in A$, 有 $x \in B$.

2. 量词符号

符号“ \forall ”表示“任意”, 或“任意一个”, 它是将英文字母 A 倒过来.

符号“ \exists ”表示“存在某个”或“能找到”, 它是将英文字母 E 反过来.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例如, 数集 A 有上界、有下界和有界的定义:

数集 A 有上界 $\iff \forall b \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x < b$;

数集 A 有下界 $\iff \forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in A, a < x$;

数集 A 有界 $\iff \exists M > 0, \forall x \in A, |x| \leq M$.

设有命题：“集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$ ”，用符号表为

$$\forall a \in A, P(a).$$

显然，这个命题的否命题是：“集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$ ”，用符号表为

$$\exists a_0 \in A, \text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题。由此可见，否定一个命题，要将原命题中的“ \forall ”改为“ \exists ”，将“ \exists ”改为“ \forall ”，并将性质 P 否定。例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

数集 A 有上界 $\iff \forall b \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x < b$;

数集 A 无上界 $\iff \exists b \in \mathbb{R}, \forall x_0 \in A, b < x_0$.

四、其它符号

符号“ \max ”表示“最大”(它是 maximum(最大)的缩写)。

符号“ \min ”表示“最小”(它是 minimum(最小)的缩写)。

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个实数。例如：

$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ —— n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n 中最大数。

$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ —— n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n 中最小数。

符号 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数。例如：

$$[3.1415\dots] = 3, \quad [-e] = [-2.718\dots] = -3,$$
$$[0] = 0, \quad [5] = 5.$$

符号“ $n!$ ”表示“不超过 n 的所有正整数的连乘积”，读作“ n 的阶乘”，即

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

规定： $0! = 1$ 。