数学分析典型方法

王向东　戎海武
徐海祥　杨灵娥　编著

河南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析典型方法/王向东等编著.—开封:河南大学出版社,2002.6
ISBN 7-81041-819-X

Ⅰ.**数**…　Ⅱ.**王**…　Ⅲ.**数学分析-分析方法**　Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP **数据核字**(2002)**第** 029741 **号**

书　　名　数学分析典型方法
作　　者　王向东　戎海武　徐海祥　杨灵娥

责任编辑　程　庆　　　　**责任校对　文　严**
封面设计　刘广祥　　　　**责任印制　苗　卉**

出　版　河南大学出版社
地址:河南省开封市明伦街 85 **号**　　**邮编**:475001
电话:0378—2864669(**事业部**)　0378—2825001(**营销部**)
网址:www.hupress.com　E—mail:bangong@hupress.com
经　销　河南省新华书店
排　版　河南大学出版社印务公司
印　刷　郑州毛庄印刷厂
版　次　2002 **年** 6 **月第** 1 **版**　　**印　次**　2002 **年** 6 **月第** 1 **次印刷**
开　本　787mm×1092mm　1/16　　**印　张**　15
字　数　356 **千字**　　**印　数**　1—1000 **册**

ISBN 7—81041—819—X/O·127　　**定　价**:18.00 **元**

(本书如有印装质量问题请与河南大学出版社营销部联系调换)

前　言

在浩瀚的数学文献中，有一类是重要定理的新证明. 高斯在科学研究上的一大特点是对某一个定理多次给予不同的证明，以求最简和严谨. 他说："绝不能以为获得一个证明以后，研究便告结束，或把寻找另外的证明当作多余的奢侈品."

我们有这样的经验，新的方法常常能获得出乎我们意料的——新的或更重要的结果.

经常有这样的情况出现：一个定理有若干证法，然而这些证法却不一定都能用来证明一个与它类似的命题，其中很可能只有一种证法能证明这个类似的命题. 如果我们只满足于一种证法，那么这个类似的命题有时就不易被证明.

对于学生和正在准备某种考试的读者来说，通过一题多解，既能广泛地综合运用基础知识，提高基本技能，又能更有效地发展逻辑思维，提高全面分析问题的能力.

解决一个数学问题有时与警察破案是类似的. 为了破获一宗案件，警察需要进行一系列的调查和分析，寻找与案件有关联的一切人和事，破案的线索大多在有关的人和事中找到. 本书的一个突出的特点是，把有关联的问题给以适当的编排. 我们把一种方法所能证明的命题，以及一个定理的特殊情况和推广形式编排在一起，以使读者更容易产生联想、怀疑和猜想，更容易觅得解题的线索和过程.

本书可作为高等院校数学系开设"分析方法"这门课程的教材. 此外，本书对于数学系学生、准备报考硕士学位研究生的读者和数学工作者都有一定的参考价值.

由于我们学识浅薄，所以错误之处定然不少，我们恳切希望读者指正.

作　者

2001 年 3 月

目　　录

第一章　序列与级数

1．证明：

(i) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$；

(ii) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$；

(iii) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$，　$x_n\geqslant 0, y_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots$；

(iv) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$，　$x_n\geqslant 0, y_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots$.

证法一　我们仅证(i)，其余类似. 首先注意到，若由序列$\{x_n\}$选出子序列$\{x_{k_n}\}$，则$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$. 不妨设

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(x_{r_n}+y_{r_n}),\quad \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n}=\lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}.$$

则
$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty} x_{r_n}+\varliminf_{n\to\infty} y_{r_n}=\lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}+\varliminf_{n\to\infty} y_{r_n}\leqslant\lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}+\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

因为$\{x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}}\}$为收敛序列$\{x_{r_n}+y_{r_n}\}$的子序列，所以

$$\lim_{n\to\infty}(x_{r_n}+y_{r_n})=\lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}}).$$

又因序列$\{x_{m_{r_n}}\}$收敛，所以序列$\{y_{m_{r_n}}\}$也收敛，故$\varliminf\limits_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}=\lim\limits_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}$. 所得不等式可改写为以下的形式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n\leqslant\lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}+\lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}=\lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}})=\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n),$$

不等式(i)的左端部分成立.

注意到$\varliminf\limits_{n\to\infty}(-y_n)=-\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$，得

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)-\varlimsup_{n\to\infty} y_n&=\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)+\varliminf_{n\to\infty}(-y_n)\\&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}[(x_n+y_n)+(-y_n)]=\varliminf_{n\to\infty} x_n,\end{aligned}$$

因此即得不等式(i)的右端部分.

证法二　我们只证(i)式的左端部分，其余类似. 首先注意到$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{m\geqslant n} x_m$，所以我们只要证明

$$\inf_{m\geqslant n} x_m+\inf_{m\geqslant n} y_m\leqslant\inf_{m\geqslant n}(x_m+y_m)$$

即可. 设$\inf\limits_{m\geqslant n} x_m=\alpha$，$\inf\limits_{m\geqslant n} y_m=\beta$，则 $x_m\geqslant\alpha$，$y_m\geqslant\beta$，$x_m+y_m\geqslant\alpha+\beta$，所以取关于 $m\geqslant n$ 的下确界得

$$\inf_{m\geqslant n}(x_m+y_m)\geqslant\alpha+\beta.$$

2．设给定一个序列$\{a_n\}$，使得序列 $b_n=pa_n+qa_{n+1}(n=1,2\cdots)$是收敛的. 如果$|p|<|q|$，试证序列$\{a_n\}$收敛.

证法一　由于$|p|<|q|$，故 $q\neq 0$. 记$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=(p+q)a$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时

$$|b_n-(p+q)a|<\varepsilon.$$

由
$$\varepsilon > |b_n-(p+q)a| = |p(a_n-a)+q(a_{n+1}-a)|$$
$$\geqslant |q||a_{n+1}-a| - |p||a_n-a|,$$
得
$$|a_{n+1}-a| < \frac{\varepsilon}{|q|} + \left|\frac{p}{q}\right| |a_n-a|.$$
记$\frac{\varepsilon}{|q|}=\delta$, $\left|\frac{p}{q}\right|=\lambda$,重复使用上述方法得到
$$|a_{n+2}-a| < \delta+\lambda|a_{n+1}-a| < \delta+\lambda(\delta+\lambda|a_n-a|) = \delta(1+\lambda)+\lambda^2|a_n-a|,$$
……
$$|a_{n+m}-a| < \delta(1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-1})+\lambda^m|a_n-a| < \frac{\delta}{1-\lambda}+\lambda^m|a_n-a|.$$
固定 n,取 m 足够大使得 $\lambda^m|a_n-a|<\varepsilon$,因而存在自然数 K,对一切 $k>K$,都有
$$|a_k-a| < \left[\frac{1}{|q|(1-\lambda)}+1\right]\varepsilon,$$
所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证法二 由于$|p|<|q|$,故 $p+q\neq 0$, $q\neq 0$. 记
$$\lim_{n\to\infty} b_n = b,\quad \alpha_n = \frac{b}{p+q}-a_n,\quad \beta_n = \frac{b-b_n}{q},\quad n=1,2,\cdots,\quad \lambda = -\frac{p}{q},$$
则
$$\alpha_{n+1} = \beta_n+\lambda\alpha_n = \beta_n+\lambda(\beta_{n-1}+\lambda\alpha_{n-1}) = \beta_n+\lambda\beta_{n-1}+\lambda^2\alpha_{n-1}$$
$$=\cdots\cdots$$
$$=\beta_n+\lambda\beta_{n-1}+\lambda^2\beta_{n-2}+\cdots+\lambda^{n-1}\beta_1+\lambda^n\alpha_1$$
$$=\frac{\beta_n\delta^n+\beta_{n-1}\delta^{n-1}+\cdots+\beta_1\delta+\alpha_1}{\delta^n},$$
这里 $\delta=\frac{1}{\lambda}$. 于是
$$|\alpha_{n+1}| \leqslant \frac{|\beta_n||\delta|^n+|\beta_{n-1}||\delta|^{n-1}+\cdots+|\beta_1||\delta|+|\alpha_1|}{|\delta|^n}.$$
因$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-b_n}{q}=0$,故由施笃兹(Stolz)定理有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\beta_n||\delta|^n+|\beta_{n-1}||\delta|^{n-1}+\cdots+|\beta_1||\delta|+|\alpha_1|}{|\delta|^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|\beta_{n+1}||\delta|^{n+1}}{|\delta|^{n+1}-|\delta|^n} = \lim_{n\to\infty}|\beta_{n+1}|\frac{|\delta|}{|\delta|-1}=0.$$
所以$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{n+1}=0$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,从而
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{p+q}-\alpha_n\right) = \frac{b}{p+q}.$$

证法三 因$|p|<|q|$,故 $p+q\neq 0$, $q\neq 0$. 设
$$a_n = \frac{b}{p+q}+\alpha_n,\quad b_n = b+\beta_n,\quad n=1,2,\cdots,$$
其中 $\beta_n\to 0\ (n\to\infty)$,则有 $q\alpha_{n+1}=\beta_n-p\alpha_n$, $n=1,2\cdots$,从而
$$|q||\alpha_{n+1}| \leqslant |\beta_n|+|p||\alpha_n|,\quad n=1,2,\cdots. \tag{1}$$

记$\dfrac{|p|}{|q|}=\lambda$,并不妨设$\dfrac{|\beta_n|}{|q|}<1$,$n=1,2,\cdots$,由上式得

$$\begin{aligned}|\alpha_{n+1}|&<1+\lambda|\alpha_n|<1+\lambda(1+\lambda|\alpha_{n-1}|)=1+\lambda+\lambda^2|\alpha_{n-1}|\\&<\cdots<1+\lambda+\cdots+\lambda^{n-1}+\lambda^n|\alpha_1|<\frac{1}{1-\lambda}+\lambda^n|\alpha_1|,\end{aligned}$$

因而由$\lambda<1$易知$\{\alpha_n\}$有界. 令$\varlimsup\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|=\alpha<+\infty$,在(1)式两边取上极限得到

$$|q|\alpha\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(|\beta_n|+|p||\alpha_n|)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}|\beta_n|+\varlimsup_{n\to\infty}|p||\alpha_n|=|p|\alpha,$$

故由$|p|<|q|$和$0\leqslant\alpha<+\infty$,即得$\alpha=0$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,因此

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{p+q}+\alpha_n\right)=\frac{b}{p+q}.$$

3. 已知第 n 项是 s_n+2s_{n+1} 的序列收敛,证明序列$\{s_n\}$也收敛.

本题是命题 2 当 $p=1,q=2$ 时的特例,下面再给出一种证明.

证明 假设$\lim\limits_{n\to\infty}(s_n+2s_{n+1})=3L$,则

$$\lim_{n\to\infty}[(s_n-L)+2(s_{n+1}-L)]=0.$$

记 $t_n=s_n-L$,则$\lim\limits_{n\to\infty}(t_n+2t_{n+1})=0$. 以下证明$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$ 即可. 设 $\varepsilon>0$,选取自然数 k,使得对所有 $n\geqslant k$ 有$|t_n+2t_{n+1}|<\varepsilon$. 对 p 用数学归纳法易得

$$t_k-(-2)^pt_{k+p}=\sum_{i=0}^{p-1}(-2)^i(t_{k+i}+2t_{k+i+1}).$$

因此当 $p\geqslant1$ 时

$$|t_k-(-2)^pt_{k+p}|\leqslant\sum_{i=0}^{p-1}2^i|t_{k+i}+2t_{k+i+1}|<2^p\varepsilon.$$

用 2^p 除以上式两端得$\left|t_{k+p}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^pt_k\right|<\varepsilon$,于是

$$|t_{k+p}|<\varepsilon+\frac{|t_k|}{2^p},\quad\varlimsup_{p\to\infty}|t_{k+p}|\leqslant\varepsilon,\quad\varlimsup_{n\to\infty}|t_n|\leqslant\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的正数,故$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$.

4. 设 θ_n 由以下方程所定义:

$$\theta_n^3+2\theta_n+\frac{1}{n}=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

试求$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n$.

解法一 对所有的 n,必有$|\theta_n|<1$. 若不然,存在某个 N 满足$|\theta_N|\geqslant1$,则

$$|\theta_N^3+2\theta_N|=|\theta_N||\theta_N^2+2|\geqslant\theta_N^2+2>2.$$

但由 θ_n 的定义,有$|\theta_N^3+2\theta_N|=\dfrac{1}{N}$,矛盾. 下面证$\{\theta_n\}$是单调递增的. 因为

$$\theta_{n+1}^3-\theta_n^3+2(\theta_{n+1}-\theta_n)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=0,$$

$$(\theta_{n+1}-\theta_n)(\theta_{n+1}^2+\theta_{n+1}\theta_n+\theta_n^2+2)=\frac{1}{n(n+1)},$$

而由$-1<\theta_n\theta_{n+1}<1$ 可以推得 $1<2+\theta_n\theta_{n+1}<3$,从而得到 $\theta_{n+1}-\theta_n>0$,$n=1,2,\cdots$. 所以

$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\theta$ 存在. 在关系式 $\theta_n^3+2\theta_n+\dfrac{1}{n}=0$ 的两端令 $n\to\infty$ 取极限,得 $\theta^3+2\theta=0$,所以 $\theta=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$.

解法二 由解法一可知 $|\theta_n|<1$,从而

$$|\theta_n|=\frac{1}{2}|\theta_n^3+\frac{1}{n}|\leqslant\frac{1}{2}\left(|\theta_n|+\frac{1}{n}\right).$$

设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\theta_n|=\theta$,由上式即得 $\theta\leqslant\dfrac{1}{2}\theta$,但 $0\leqslant\theta<+\infty$,所以 $\theta=0$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$.

解法三 由 θ_n 的定义,有

$$|\theta_n|=\left|-\frac{1}{n(\theta_n^2+2)}\right|\leqslant\frac{1}{n},\quad n=1,2\cdots,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$.

解法四 设 $f(x)=x^3+2x+\dfrac{1}{n}$,则 $f'(x)=3x^2+2>0$,说明 $f(x)$ 严格单调递增. 而

$$f(0)=\frac{1}{n}>0,\quad f\left(-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n}<0,$$

由连续函数的介值定理知方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(-\dfrac{1}{n},0\right)$ 有一实根,再由 $f(x)$ 的单调性知此根惟一. 由于 $f(\theta_n)=0$,故 $-\dfrac{1}{n}<\theta_n<0$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=0$.

5. 序列 $\{y_n\}$ 是由序列 $\{\alpha_n\}$ 的关系式所给定:

$$y_0=x_0,\quad y_n=x_n-\alpha x_{n-1},\quad n=1,2,\cdots,$$

这里 $|\alpha|<1$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设 $a_1=2,a_n=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}+\dfrac{1}{n},n=2,3,\cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 存在,并求出这个极限值.

证法一 因为

$$na_n=\frac{n+1}{2}a_{n-1}+1=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)a_{n-1}}{2}+1,$$

所以若令 $na_n=A_n$,则上式成为

$$A_n=\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\frac{A_{n-1}}{2}+1. \tag{1}$$

由数学归纳法可得 $A_n\leqslant2+\dfrac{30}{n},n=1,2,\cdots$. 事实上,$A_1=2$, $A_2=4$, $A_3=5$, $A_4=\dfrac{31}{6}$, $A_5=\dfrac{39}{8}$,故当 $1\leqslant n\leqslant5$ 时 $A_n\leqslant2+\dfrac{30}{n}$. 设 $A_n\leqslant2+\dfrac{30}{n},n\geqslant5$,则易得

$$A_{n+1}=\left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{A_n}{2}+1\leqslant\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{15}{n}\right)+1\leqslant2+\frac{30}{n+1}.$$

另一方面,根据(1)式,由 $A_1\geqslant2,A_2\geqslant2,\cdots$,依次类推可得 $A_n\geqslant2,n=1,2,\cdots$. 于是

$$2\leqslant A_n\leqslant2+\frac{30}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=2$，即$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=2$.

证法二 记 $na_n=A_n$，则

$$A_1=2,\quad A_{n+1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)A_n+1,\quad n=1,2,\cdots.$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ 存在，在上式中令 $n\to\infty$取极限得 $A=2$.

容易验算 $A_1<60$，$A_2<60$，$A_3<60$，设 $A_n<60$，$n\geqslant 3$，则

$$A_{n+1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)A_n+1<\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot 60+1=51<60.$$

因为
$$A_{n+1}-2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)(A_n-2)+\frac{2}{n},$$

所以
$$\varlimsup_{n\to\infty}|A_{n+1}-2|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\cdot\varlimsup_{n\to\infty}|A_n-2|=\frac{1}{2}\varlimsup_{n\to\infty}|A_n-2|.$$

又因 $0\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}|A_n-2|<+\infty$，故$\varlimsup\limits_{n\to\infty}|A_n-2|=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=2$.

7. 若序列$\{x_n\}$收敛，序列$\{u_n\}$定义如下：

$$u_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

则$\{u_n\}$也收敛于同一极限.

证法一 由假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 存在，故对任意给定的正数 ε，存在 N，使得当 $n>N$ 时

$$|x_n-x|<\varepsilon.$$

从而
$$\begin{aligned}|u_n-x|&=\frac{|(x_1-x)+(x_2-x)+\cdots+(x_n-x)|}{n}\\&<\frac{|x_1-x|+|x_2-x|+\cdots+|x_N-x|}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon.\end{aligned}$$

固定 ε 和 N，令 $n\to\infty$ 对上式取上极限得$\varlimsup\limits_{n\to\infty}|u_n-x|\leqslant\varepsilon$. 因为 $\varepsilon>0$ 可以任意小，所以 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}|u_n-x|=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x$.

证法二 因为$\{x_n\}$收敛，所以对于任意给定的正数 ε，存在 N，当 $n>m>N$ 时

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

故当 $n>N$ 时

$$\begin{aligned}|n(u_{n+1}-u_n)|&=\frac{|(x_{n+1}-x_1)+(x_{n+1}-x_2)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)|}{n+1}\\&\leqslant\frac{|x_{n+1}-x_1|+|x_{n+1}-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_N|}{n+1}+\frac{n-N}{n+1}\varepsilon.\end{aligned}$$

因为$\{x_n\}$收敛，从而有界. 由上式可得$\varlimsup\limits_{n\to\infty}|n(u_{n+1}-u_n)|\leqslant\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}n(u_{n+1}-u_n)=0$. 易知

$$x_{n+1}=n(u_{n+1}-u_n)+u_{n+1},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. 设 $f(x)$是闭区间$[a,b]$上的不减函数，但不必连续. 如果 $f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$，试证必有 $a\leqslant x_0\leqslant b$ 存在，使 $f(x_0)=x_0$.

证法一 考察数集 $F=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,f(x)\geqslant x\}$. 显然 $a\in F$. 令 $x_0=\sup F$，则 $a\leqslant x_0\leqslant$

b. 下证 $f(x_0)=x_0$.

事实上,当 $x\in F$ 时有 $x\leqslant x_0$,从而 $f(x)\leqslant f(x_0)$. 又因 $x\leqslant f(x)$,故 $x\leqslant f(x_0)$,因此 $f(x_0)$是 F 的一个上界,从而 $x_0\leqslant f(x_0)$. 另一方面,从 $a\leqslant x_0\leqslant f(x_0)\leqslant f(b)\leqslant b$ 知 $f(x_0)\leqslant f[f(x_0)]$,故 $f(x_0)\in F$. 因此 $f(x_0)\leqslant x_0$,于是 $f(x_0)=x_0$.

证法二　由题设易知,把$[a.b]$平分,必有其中一半为$[a_1,b_1]$,使得 $f(a_1)\geqslant a_1$, $f(b_1)\leqslant b_1$. 把$[a_1,b_1]$平分,必有其中一半为$[a_2,b_2]$,使得 $f(a_2)\geqslant a_2$, $f(b_2)\leqslant b_2$. 如此继续下去,可得$[a_n,b_n]$$(n=1,2,\cdots)$适合:

(i) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$,　$n=1,2,\cdots$;

(ii) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0$,　$n\to\infty$;

(iii) $f(a_n)\geqslant a_n$,　$f(b_n)\leqslant b_n$,　$n=1,2\cdots$.

由(i)和(ii)知有 $x_0\in[a,b]$,使得 $a_n\leqslant x_0\leqslant b_n$, $n=1,2,\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$. 又

$$a_n\leqslant f(a_n)\leqslant f(x_0)\leqslant f(b_n)\leqslant b_n,$$

所以
$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=x_0.$$

9. 设 $f(x)$在(a,b)内为二次连续可微,且 $f''(\xi)\neq 0$,其中 $\xi\in(a,b)$. 证明在(a,b)内可找到两个两值 x_1 和 x_2,满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

证法一　不妨设 $f''(\xi)>0$,由 $f''(x)$连续性知存在 ξ 的一个邻域$(\xi-\delta,\xi+\delta)$,在此邻域内 $f''(x)>0$,则 $y=f(x)$在此邻域内为凹函数,即有

$$f(x)>f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi),\quad x\in(\xi-\delta,\xi+\delta),\quad x\neq\xi.$$

作函数
$$g(x)=f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi),$$

它在$[\xi-\delta',\xi+\delta']$$(\delta'<\delta)$上连续,$g(x)\geqslant 0$,且等号只当 $x=\xi$ 时成立. 记

$$M_1=\max_{x\in[\xi-\delta',\xi]}g(x),\quad M_2=\max_{x\in[\xi,\xi+\delta']}g(x),\quad M=\min\{M_1,M_2\}.$$

$g(x)$在$[\xi,\xi+\delta']$和$[\xi-\delta',\xi]$上均可分别取$[0,M]$上的一切值,特别地,可以找到 $x_1\in[\xi,\xi+\delta']$, $x_2\in[\xi-\delta',\xi]$,使

$$\begin{aligned}\frac{M}{2}&=g(x_1)=f(x_1)-f(\xi)-f'(\xi)(x_1-\xi)\\&=g(x_2)=f(x_2)-f(\xi)-f'(\xi)(x_2-\xi),\end{aligned}$$

所以
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

证法二　不妨设 $f''(\xi)>0$. 易知存在 ξ 的一个邻域$(\xi-\delta,\xi+\delta)$, $f(x)$在此邻域内为凹函数,故有

$$\frac{f(\xi)-f(\xi-\delta)}{\delta}<f'(\xi)<\frac{f(\xi+\delta)-f(\xi)}{\delta}.$$

设 $A(\xi-\delta,f(\xi-\delta))$, $B(\xi,f(\xi))$, $C(\xi+\delta,f(\xi+\delta))$, AC, AB, BC 和点 B 的切线 BT 的斜率分别是 k_0, k_1, k_2 和 k,易知 $k_1<k<k_2$.

下面分三种情况:

(i) 若 $k_0=k$,则取 $x_1=\xi-\delta, x_2=\xi+\delta$ 即得证.

(ii) 若 $k_0>k$,则 $k_1<k<k_0$. 记 $x_1=\xi-\delta, k(x)=\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}, \xi<x<\xi+\delta$. 由于 $k(x)$ 连续,且 $k(\xi)<k, k(\xi+\delta)>k$,故存在 $\xi<x_2<\xi+\delta$,使得 $k(x_2)=k$,即

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

(iii) 若 $k_0<k$,则 $k_0<k<k_2$. 记 $x_2=\xi+\delta, k(x)=\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \xi-\delta<x<\xi$. 与(ii)同理可知存在 $\xi-\delta<x_1<\xi$,使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

在数学分析中,我们常常研究某一个确定数集的最大(小)值或上(下)确界,对于序列则考察它的上(下)极限. 例如,命题 2 证法三,命题 6 证法二,命题 8 证法一,命题 9 证法一等. 这是一种值得我们注意的方法.

10. 设 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为非负数,$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = b$,试证 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} \leqslant \dfrac{b^2}{4}$.

证明 记 $b_k=\max\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$. 若 $k=1$,则

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} \leqslant b_1 \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} = b_1(b-b_1) = b_1 b - b_1^2.$$

若 $k>1$,则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} &= \sum_{i=1}^{k-1} b_i b_{i+1} + \sum_{i=k}^{n-1} b_i b_{i+1} \leqslant b_k \sum_{i=1}^{k-1} b_i + b_k \sum_{i=k}^{n-1} b_{i+1} \\ &= b_k\left(\sum_{i=1}^{k-1} b_i + \sum_{i=k}^{n-1} b_{i+1}\right) = b_k(b-b_k) = b_k b - b_k^2.\end{aligned}$$

因此对于 $k\geqslant 1$,均有

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{i+1} \leqslant b_k b - b_k^2 = \frac{b^2}{4} - \left(\frac{b}{2}-b_k\right)^2 \leqslant \frac{b^2}{4}.$$

11. 设非负序列 $\{x_n\}$ 单调不减,$\alpha>0$,则存在序列 $\{x_n^*\}$ 满足:$x_n^* \leqslant x_n$,$\left\{\dfrac{x_n^*}{n^\alpha}\right\}$ 单调不增,$\{x_n^*\}$ 单调不减.

证明 令 $x_n^* = n^\alpha \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \dfrac{x_i}{i^\alpha}$,则

$$x_n^* = n^\alpha \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{x_i}{i^\alpha} \leqslant n^\alpha \frac{x_n}{n^\alpha} = x_n. \tag{1}$$

因为 $\dfrac{x_n^*}{n^\alpha} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \dfrac{x_i}{i^\alpha}$,所以 $\left\{\dfrac{x_n^*}{n^\alpha}\right\}$ 单调不增. 下面证明 $\{x_n^*\}$ 单调不减,分两种种情况:

(i) 设 $p>n$,若 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \dfrac{x_i}{i^\alpha} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant p} \dfrac{x_i}{i^\alpha}$,则

$$x_n^*=n^\alpha \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{x_i}{i^\alpha}=n^\alpha \min_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{x_i}{i^\alpha}<p^\alpha \min_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{x_i}{i^\alpha}=x_p^*.$$

(ii) 设 $p>n$,若 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{x_i}{i^\alpha}>\min\limits_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{x_i}{i^\alpha}$,则

$$\min_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{x_i}{i^\alpha}=\min\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{x_i}{i^\alpha},\min_{n\leqslant i\leqslant p}\frac{x_i}{i^\alpha}\right\}=\min_{n\leqslant i\leqslant p}\frac{x_i}{i^\alpha},$$

及

$$x_p^*=p^\alpha \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{x_i}{i^\alpha}=p^\alpha \min_{n\leqslant i\leqslant p}\frac{x_i}{i^\alpha}=\min_{n\leqslant i\leqslant p}\left(\frac{p}{i}\right)^\alpha x_i. \tag{2}$$

因为当 $n\leqslant i\leqslant p$ 时有 $\left(\frac{p}{i}\right)^\alpha\geqslant 1$ 及 $x_i\geqslant x_n$,所以 $\left(\frac{p}{i}\right)^\alpha x_i\geqslant x_n$,从而

$$\min_{n\leqslant i\leqslant p}\left(\frac{p}{i}\right)^\alpha x_i\geqslant x_n. \tag{3}$$

由(1)～(3)式知 $x_p^*\geqslant x_n\geqslant x_n^*$,所以当 $p>n$ 时,$x_p^*\geqslant x_n^*$,故$\{x_n^*\}$单调不减.

12. 设非负数列$\{x_n\}$单调不减,并且

$$x_{n+m}\leqslant x_n+x_m,\quad n,m=1,2,\cdots, \tag{1}$$

则存在序列$\{x_n^*\}$满足 $x_n^*\leqslant x_n<2x_n^*$.

证明 设 $\alpha\geqslant 1$,$x_n^*=n^\alpha \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{x_i}{i^\alpha}$,则由命题 11,有 $x_n^*\leqslant x_n$. 今证明 $x_n<2x_n^*$. 设 $n>i$,令 $q=\left[\frac{n}{i}\right]$,则 $\frac{n}{i}<q+1$,$n<i(q+1)$. 因 x_n 不减,所以 $x_n\leqslant x_{i(q+1)}$. 又由(1)式得

$$x_{i(q+1)}\leqslant(q+1)x_i=\left(\left[\frac{n}{i}\right]+1\right)x_i,$$

故

$$x_n\leqslant\left(\left[\frac{n}{i}\right]+1\right)x_i.$$

当 $x>1$ 时,$[x]+1\leqslant x+1<2x$,所以 $x_n<2\cdot\frac{n}{i}x_i$. 因为 $\alpha\geqslant 1$,所以 $x_n<2\left(\frac{n}{i}\right)^\alpha x_i$,故当 $n>i$ 时有

$$\frac{x_n}{2n^\alpha}<\frac{x_i}{i^\alpha},\quad x_n^*=n^\alpha \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{x_i}{i^\alpha}>n^\alpha \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{x_n}{2n^\alpha}=\frac{x_n}{2},$$

即 $x_n<2x_n^*$.

13. 设 a_1,b_1,c_1 均为正数,其和等于 1,对于 $n=1,2,\cdots$定义

$$a_{n+1}=a_n^2+2b_nc_n,\quad b_{n+1}=b_n^2+2c_na_n,\quad c_{n+1}=c_n^2+2a_nb_n.$$

证明当 $n\to\infty$时,a_n,b_n,c_n 的极限存在,并且求出这些极限值.

证明 容易证明对任何的 n,$a_n+b_n+c_n=1$. 定义

$$E_n=\max\{a_n,b_n,c_n\},\quad F_n=\min\{a_n,b_n,c_n\}.$$

下面证明:

$$F_n\leqslant F_{n+1}\leqslant E_{n+1}\leqslant E_n,\quad n=1,2,\cdots, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(E_n-F_n)=0. \tag{2}$$

为证明(1)式,假定对某个 n 有 $a_n\geqslant b_n\geqslant c_n$. 下列 三式

$$a_{n+1}=a_n^2+b_nc_n+b_nc_n,\quad b_{n+1}=a_nc_n+b_n^2+a_nc_n,\quad c_{n+1}=a_nb_n+a_nb_n+c_n^2$$

的每式中，其右边部分均不大于 $a_n^2+a_nb_n+a_nc_n=a_n$，且又不小于 $a_nc_n+b_nc_n+c_n^2=c_n$. 因此有 $E_{n+1}\leqslant E_n$ 和 $F_{n+1}\geqslant F_n$，(1)式得证.

为了证明(2)，仍假定对某个 n 有 $a_n\geqslant b_n\geqslant c_n$. 令 $a_n-b_n=\alpha\geqslant 0$，$b_n-c_n=\beta\geqslant 0$，$a_n-c_n=\delta=\alpha+\beta\geqslant 0$，则

$$|a_{n+1}-b_{n+1}|=|a_n-b_n||a_n+b_n-2c_n|=\alpha(\delta+\beta)=(\delta-\beta)(\delta+\beta)\leqslant\delta^2,$$
$$|a_{n+1}-c_{n+1}|=|a_n-c_n||a_n+c_n-2b_n|=\delta|\alpha-\beta|\leqslant\delta(\alpha+\beta)=\delta^2,$$
$$|c_{n+1}-b_{n+1}|=|b_n-c_n||2a_n-b_n-c_n|=\beta(\alpha+\delta)=(\delta-\alpha)(\delta+\alpha)\leqslant\delta^2.$$

这组不等式表明对所有的 n 有

$$E_{n+1}-F_{n+1}\leqslant(E_n-F_n)^2.$$

所以对所有的 n 成立

$$E_{n+1}-F_{n+1}\leqslant(E_1-F_1)^{2^n}.$$

因为 $E_1<1$ 和 $F_1>0$，故 $E_1-F_1<1$，从而得到(2)式.

由(1)和(2)式知，E_n 和 F_n 收敛于同一极限 A，从而 a_n，b_n 和 c_n 也收敛于同一极限 A. 由 $a_n+b_n+c_n=1$，得 $A=\dfrac{1}{3}$.

14. 设 $a_0=a$，$b_0=b$，$c_0=c$ 均为正数，对于 $n=1,2,\cdots$，定义

$$a_n=\sqrt{b_{n-1}c_{n-1}},\quad b_n=\sqrt{a_{n-1}c_{n-1}},\quad c_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

证明当 $n\to\infty$ 时，a_n，b_n，c_n 的极限存在，并且求出这些极限值.

证明 不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $c_1\leqslant b_1\leqslant a_1$. 若 $b_0=b\leqslant b_1$，则由

$$b_n=\sqrt{a_{n-1}c_{n-1}}=\sqrt{\sqrt{b_{n-2}c_{n-2}}\sqrt{a_{n-2}b_{n-2}}}=\sqrt{b_{n-1}b_{n-2}},\quad n=2,3\cdots,$$

得

$$b_0\leqslant b_2\leqslant b_1,$$
$$b_0\leqslant b_2\leqslant b_3\leqslant b_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$b_0\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_{2n}\leqslant b_{2n-1}\leqslant\cdots\leqslant b_3\leqslant b_1. \tag{1}$$

又

$$\frac{b_{2n}}{b_{2n-1}}=\frac{\sqrt{b_{2n-1}b_{2n-2}}}{b_{2n-1}}=\sqrt{\frac{b_{2n-2}}{b_{2n-1}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{b_{2n-4}}{b_{2n-3}}}}=\cdots=\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{\frac{1}{2^{2n-2}}}\to 1,n\to\infty. \tag{2}$$

由(1)和(2)式知，$\lim\limits_{n\to\infty}b_{2n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_{2n-1}$ 均存在且相等，故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在. 又

$$\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}}}=\cdots=\begin{cases}\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right)^{\frac{1}{2^n}}, & n\text{ 为偶数}\\[2ex] \left(\dfrac{a_1}{b_1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 再由

$$a_nb_nc_n=\sqrt{b_{n-1}c_{n-1}}\sqrt{c_{n-1}a_{n-1}}\sqrt{b_{n-1}a_{n-1}}=a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}=\cdots=abc,$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\sqrt[3]{abc}.$$

15. 设 $\{x_n\}$ 是有界序列，正项序列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n\to+\infty$，$n\to\infty$. 若

$$\lambda x_n+(1-\lambda)\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\to x,\quad n\to\infty$$

其中 $\lambda>0$，则 $x_n\to x(n\to\infty)$.

证明 记 $y_n=\dfrac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$，那么

(i) 若存在 n，使 $x_n<y_n$，则 $y_n<y_{n-1}$. 事实上，由 $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$，有

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n>x_n(a_1+a_2+\cdots+a_n),$$

因此
$$a_nx_n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})<a_n(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}).$$

在上式两端加上 $(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{n-1}x_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$ 得

$$(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$$
$$<(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{a-1}x_{n-1}),$$

即得 $y_n<y_{n-1}$.

(ii) 若存在 n，使 $x_n>y_n$，则 $y_n>y_{n-1}$. 现在证明 $\{y_n\}$ 收敛. 假设 $\{y_n\}$ 不收敛，由 $\{x_n\}$ 有界知，存在 δ,η 满足

$$\varliminf_{n\to\infty}y_n<\eta<\delta<\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

依上、下根限的定义，有自然数 p 和 $q(q>p)$，使 $y_p<\eta,y_q>\delta$. 如果 $x_q<y_q$，则由(i)知 $y_{q-1}>y_q>\delta$，若还有 $x_{q-1}<y_{q-1}$，那么

$$y_{q-2}>y_{q-1}>y_q>\delta.$$

因为 $y_p<\eta<\delta$，所以在 $p+1,p+2,\cdots,q-1,q$ 中必定有某一个自然数 k，使 $x_k<y_k$ 不成立. 设最大的一个是 m，于是

$$x_m\geqslant y_m>y_{m+1}>\cdots>y_q>\delta,$$
$$\lambda x_m+(1-\lambda)y_m=y_m+\lambda(x_m-y_m)\geqslant y_m>\delta.$$

由上、下极限的性质，满足上述条件的数对 (p,q) 有无穷多个，所以满足上式的 m 也有无穷多个.

同理可证，有无穷多个 k 满足 $\lambda x_k+(1-\lambda)y_k<\eta$，故 $\{\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\}$ 的极限不存在. 这与题设矛盾，所以 $\{y_n\}$ 收敛. 又因 $\{\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\}$ 收敛，所以 $\{x_n\}$ 也收敛，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

16. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\lambda(a_{n+1}-a_n)+(1-\lambda)\dfrac{a_n}{n}\right]=l$，其中 $\lambda>0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=l.$$

证明 设 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，$c_n=\lambda(a_{n+1}-a_n)+(1-\lambda)\dfrac{a_n}{n}$，于是

$$a_n=nb_n,\quad c_n=\lambda[(n+1)b_{n+1}-nb_n]+(1-\lambda)b_n,$$

整理后得
$$\lambda(n+1)(b_{n+1}-b_n)=c_n-b_n. \tag{1}$$

上式两端取绝对值，得

$$\lambda(n+1)|b_{n+1}-b_n|=|c_n-b_n|.$$

取正整数 n_0 使得 $n_0\lambda>1$，那么

$$|b_{n+1}-b_n|\leqslant|c_n-b_n|,\quad n\geqslant n_0. \tag{2}$$

因 $c_n\to l(n\to\infty)$，故对于任给的函数 ε，存在正整数 $N>n_0$，使得 $n\geqslant N$ 时 $l-\varepsilon<c_n<l+\varepsilon$. 由

(1)式知，c_n 与 b_{n+1} 在数轴上位于 b_n 的同侧，结合(2)式便知 b_{n+1} 位于 b_n 与 c_n 之间. 因此若 $l-\varepsilon<b_N<l+\varepsilon$，则 b_{N+1} 位于$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$中，因 $n\geqslant N$ 时 c_n 都位于$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$中，故 $n\geqslant N$ 时 b_n 也位于$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$中，即

$$l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon,\quad n\geqslant N.$$

但如果 $b_N\geqslant l+\varepsilon$，则 $b_N\geqslant b_{N+1}\geqslant c_N$(等号不同时成立). 由于 $n\geqslant N$ 时，b_{n+1} 位于 b_n 和 c_n 之间，因此这时必有且只有两种情况：

(i) $b_N\geqslant b_{N+1}\geqslant\cdots\geqslant b_{N+m}\geqslant\cdots\geqslant l+\varepsilon$；

(ii) 存在某个大于 N 的正整数 k 使得 $l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon,\quad n\geqslant k$.

易知(i)不可能成立，否则 b_n 也存在极限 b，且 $b>l$，这时，

$$a_{n+1}-a_n\to\frac{1}{\lambda}[l-(1-\lambda)b]\neq b,\quad n\to\infty.$$

但由施笃兹定理知

$$b=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{\lambda}[l-(1-\lambda)b],$$

矛盾. 因此当 $b_N\geqslant l+\varepsilon$ 时，(ii)必成立. 同理当 $b_N\leqslant l-\varepsilon$ 时，也存在正整数 $M>N$，使得

$$l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon,\quad n\geqslant M.$$

综合上述讨论知，对于所给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 M，使得 $n\geqslant M$ 时恒有 $l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon$. 因此，$b_n\to l(n\to\infty)$，同时得出

$$\lim_{n\to\infty}\lambda(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}c_n-\lim_{n\to\infty}(1-\lambda)b_n=\lambda l.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=l.$$

17. 若函数 $f(x)$在(a,b)内单调有界，则对于任意的 $x_0\in(a,b)$，必存在 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

证明 设 $f(x)$在(a,b)内单调递增(递减的情形类似可证). 由假设 $f(x)$在(a,b)内有界，所以 $\mu=\sup\{f(x)\mid x\in(a,x_0)\}$存在. 依上确界的定义，对于任意的 $x\in(a,x_0)$，都有 $f(x)\leqslant\mu$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $x_1\in(a,x_0)$，使 $\mu-\varepsilon<f(x_1)$，因 $f(x)$单调递增，所以当$x_1<x<x_0$时，

$$\mu-\varepsilon<f(x)\leqslant\mu<\mu+\varepsilon.$$

取 $\delta=x_0-x_1$，于是当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有$|f(x)-\mu|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\mu$. 类似可以证明

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\inf\{f(x)\mid x\in(x_0,b)\}.$$

18. 设函数 f 在$[a,b]$上连续，求证：存在一个函数 ψ 在$(0,\infty)$上具有下述性质：

(i) ψ 在$(0,+\infty)$上单调递增，且当 $t\geqslant b-a$ 时，$\psi(t)=$常数；

(ii) 对任意的 $x',x''\in[a,b]$，有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant\psi(|x'-x''|)$；

(iii) $\lim\limits_{t\to0^+}\psi(t)=0$.

证明 (i) 由于 f 在$[a,b]$上连续，所以有 $M>0$，使$|f(x)|\leqslant M(a\leqslant x\leqslant b)$，那么对于$[a,b]$中任何两点 x_1,x_2 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)|+|f(x_2)|\leqslant 2M.$$

因此对任意的 $t>0$，数集

$$E(t)=\{\rho \mid \rho=|f(x_1)-f(x_2)|, x_1,x_2\in[a,b], |x_1-x_2|\leqslant t\}$$

有界. 定义 $\psi(t)=\sup\{E(t)\}$，$0<t<+\infty$，显然 $\psi(t)\geqslant 0$. 任取 $t_1,t_2\in(0,+\infty)$，$t_1<t_2$，由 $\psi(t)$ 的定义可知 $\psi(t_1)\leqslant\psi(t_2)$，所以 $\psi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 当 $t\geqslant b-a$ 时，

$$\begin{aligned}&\{\rho \mid \rho=|f(x_1)-f(x_2)|, x_1,x_2\in[a,b], |x_1-x_2|\leqslant t\}\\ &=\{\rho \mid \rho=|f(x_1)-f(x_2)|, x_1,x_2\in[a,b], |x_1-x_2|\leqslant b-a\},\end{aligned}$$

所以当 $t\geqslant b-a$ 时，$\psi(t)=\psi(b-a)$.

(ii) 任取 $x',x''\in[a,b]$，由于

$$|f(x')-f(x'')|\in\{\rho \mid \rho=|f(x_1)-f(x_2)|, x_1,x_2\in[a,b], |x_1-x_2|\leqslant|x'-x''|\},$$

所以 $$|f(x')-f(x'')|\leqslant\psi(|x'-x''|).$$

(iii) 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，所以它在 $[a,b]$ 上一致连续. 对于任意的 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，使得 $[a,b]$ 上的任何两点 x_1,x_2，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\psi(t)$ 的定义，得 $\psi(\delta)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 由于 $\psi(t)$ 是单调递增的，所以当 $0<t<\delta$ 时，有

$$0\leqslant\psi(t)\leqslant\psi(\delta)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{t\to 0^+}\psi(t)=0$.

19. 设 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，则下列两个条件是等价的：

(i) 对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，当 $\varepsilon\leqslant|x-y|<\varepsilon+\delta(\varepsilon)$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

(ii) 存在一个从 $[0,+\infty)$ 到 $[0,+\infty)$ 的函数 w，对于任意的 $s>0$，$w(s)>s$，w 在 $(0,+\infty)$ 内右下半连续并且

$$w(|f(x)-f(y)|)\leqslant|x-y|,\quad \forall x,y\in(-\infty,+\infty).$$

注 称 $f(x)$ 在 x_0 点右下半连续，如果任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，只要 $x_0<x<x_0+\delta$，恒有 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$.

证明 (i)⇒(ii). 设 $\varepsilon>0$，由(i)知 f 是压缩的，即 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ 对于不同的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 成立. 因此

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\quad |x-y|<\delta(\varepsilon). \tag{1}$$

定义 $$w(0)=0,\quad w(\varepsilon)=\sup\{\delta(\varepsilon) \mid \delta(\varepsilon)\text{满足(1)式}\},$$

那么 w 是 $[0,+\infty)$ 到 $[0,+\infty)$ 的增函数，任意 $s>0$，$w(s)>s$，并且 w 是右下半连续的. 下面我们仅需证明

$$w(|f(x)-f(y)|)\leqslant|x-y|,\quad x,y\in(-\infty,+\infty).$$

假设不然，则 $w(|f(x)-f(y)|)>|x-y|$ 对于某两个 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 成立. 这样

$$\varepsilon\equiv|f(x)-f(y)|>0,\quad |x-y|<\omega(\varepsilon).$$

由 w 的选择，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，矛盾.

(ii)⇒(i). 设 $\varepsilon>0$. 因为 w 在 ε 处右下半连续，所以存在 $\delta_1(\varepsilon)>0$，满足

$$\frac{\varepsilon+w(\varepsilon)}{2}<w(s),\quad \varepsilon\leqslant s<\varepsilon+\delta_1(\varepsilon).$$

记
$$\delta(\varepsilon)=\min\left\{\delta_1(\varepsilon),\frac{w(\varepsilon)-\varepsilon}{2}\right\}.$$

假设 $\varepsilon\leqslant|x-y|<\varepsilon+\delta(\varepsilon)$,我们仅须证明$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 否则,由 f 的压缩性,

$$\varepsilon\leqslant|f(x)-f(y)|<\varepsilon+\delta(\varepsilon)\leqslant\varepsilon+\delta_1(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon+w(\varepsilon)}{2}&<w(|f(x)-f(y)|)\leqslant|x-y|\\&<\varepsilon+\delta(\varepsilon)\leqslant\varepsilon+\frac{w(\varepsilon)-\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon+w(\varepsilon)}{2},\end{aligned}$$

矛盾.

20. 设 $\varphi(x)$是定义在(a,b)内的实函数. 若对(a,b)内的任二点 x_1,x_2,都有

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2},\tag{1}$$

则称 $\varphi(x)$为(a,b)内的凸函数,简称 $\varphi(x)$为凸. 试证明:若 $\varphi(x)$为连续凸函数,则对任意的 $\alpha\in[0,1]$,都有

$$\varphi[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\leqslant\alpha\varphi(x_1)+(1-\alpha)\varphi(x_2).\tag{2}$$

证明 设不等式(2)不是对所有的 $\alpha\in(0,1)$都成立,那么在$[0,1]$上的连续函数

$$f(\alpha)=\varphi[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]-\alpha\varphi(x_1)-(1-\alpha)\varphi(x_2)$$

的最大值 M_0 将是正的. 令

$$\alpha_0=\inf\{\alpha\mid\alpha\in[0,1],f(\alpha)=M_0\},$$

则易知 $\alpha_0\in(0,1)$. 取 $\delta>0$,使区间$[\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta]$含于$[0,1]$内,于是点

$$x_1^*=(\alpha_0-\delta)x_1+(1-\alpha_0+\delta)x_2,\quad x_2^*=(\alpha_0+\delta)x_1+(1-\alpha_0-\delta)x_2$$

位于 x_1 与 x_2 之间. 由不等式(1)有

$$\varphi\left(\frac{x_1^*+x_2^*}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\varphi(x_1^*)+\varphi(x_2^*)).$$

用 f 来表示,就得

$$f(\alpha_0)\leqslant\frac{1}{2}(f(\alpha_0-\delta)+f(\alpha_0+\delta))<M_0,$$

这与 $f(\alpha_0)=M_0$ 矛盾.

21. 设 f 和 g 是在区间$(-\infty,+\infty)$上定义的实函数,并且对所有的 x 和 y 满足等式

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

试证:若对所有的 x 有$|f(x)|\leqslant1$,并且 $f(x)$不恒等于零,则对所有的 y,也有$|g(y)|\leqslant1$.

证明 假设存在一个 y_0 使$|g(y_0)|=1+r,r>0$. 记 $M=\sup|f(x)|$,由题设条件可得

$$\begin{aligned}2|f(x)||g(y_0)|&=|f(x+y_0)+f(x-y_0)|\\&\leqslant|f(x+y_0)|+|f(x-y_0)|\leqslant2M.\end{aligned}$$

于是
$$|f(x)|\leqslant\frac{M}{|g(y_0)|}=\frac{M}{1+r},$$

这与 $M=\sup|f(x)|$矛盾.

22. 若存在 c,使得