数学分析
下册

华东师范大学数学系 编

高等教育出版社
北京2001

内容简介

本书是教育部"高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪教材和普通高等教育"九五"国家教委重点教材，本书第一版在1987年国家教委举办的全国优秀教材评选中获全国优秀奖。

本书内容包括数项级数、函数列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数、隐函数、多元函数微积分学、流形上微积分学初阶等。

本书可作为高等师范院校或其他类型院校数学专业的教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.下册 华东师范大学数学系编.—3版.—北京:高等教育出版社,2001
ISBN 7-04-009443-6

Ⅰ.数… Ⅱ.华… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第07930号

责任编辑 高尚华 封面设计 张 楠 责任绘图 郝 林
版式设计 马静如 责任校对 康晓燕 责任印制

数学分析 下册 第三版
华东师范大学数学系 编

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街55号 邮政编码 100009
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048
网 址 http: www.hep.edu.cn
http: www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷

开 本 787×960 1 16 版 次 1981年6月第1版
印 张 23.5 年 月第3版
字 数 430 000 印 次 年 月第 次印刷
定 价 19.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

目　　录

第十二章　数 项 级 数

§1　级数的收敛性

读者已经在初等数学中知道：有限个实数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 相加，其结果是一个实数．本章将讨论"无限个实数相加"所可能出现的情形及其特征．例如，在第二章提到《庄子·天下篇》"一尺之棰，日取其半，万世不竭"的例中，把每天截下那一部分的长度"加"起来：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

这就是"无限个数相加"的一个例子．从直观上可以看到，它的和是 1．再如下面由"无限个数相加"的表达式

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$$

中，如果将它写作

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots,$$

其结果无疑是 0，如写作

$$1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots=1+0+0+0+\cdots,$$

其结果则是 1，因此两个结果完全不同．由此提出这样的问题："无限个数相加"是否存在"和"；如果存在，"和"等于什么？可见，"无限个数相加"不能简单地引用有限个数相加的概念，而需建立它本身严格的理论．

定义 1　给定一个数列 $\{u_n\}$，对它的各项依次用"＋"号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称为数项级数或无穷级数（也常简称级数），其中 u_n 称为数项级数（1）的通项．

数项级数（1）也常写作：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 或简单写作 $\sum u_n$．

数项级数（1）的前 n 项之和，记为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n, \tag{2}$$

称它为数项级数（1）的第 n 个部分和，也简称部分和．

定义 2　若数项级数（1）的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S（即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$），则称

数项级数(1)收敛，称 S 为数项级数(1)的和，记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \text{或} \ S = \sum u_n.$$

若$\{S_n\}$是发散数列，则称数项级数(1)发散.

例 1　讨论等比级数(也称为几何级数)

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \tag{3}$$

的收敛性($a\neq 0$).

解　$q\neq 1$ 时，级数(3)的第 n 个部分和

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

因此，

(i) 当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$. 此时级数(3)收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$.

(ii) 当$|q|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，级数(3)发散.

(iii) 当 $q=1$ 时，$S_n = na$，级数发散.

当 $q=-1$ 时，$S_{2k}=0$，$S_{2k+1}=a$，$k=0,1,2,\cdots$，级数发散.

总之，$|q|<1$ 时，级数(3)收敛；$|q|\geq 1$ 时，级数(3)发散.

例 2　讨论数项级数

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots \tag{4}$$

的收敛性.

解　级数(4)的第 n 个部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

因此级数(4)收敛，且

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1.$$

由于级数(1)的收敛或发散(简称敛散性)，是由它的部分和数列$\{S_n\}$来确

定,因而也可把级数(1)作为数列$\{S_n\}$的另一种表现形式.反之,任给一个数列$\{a_n\}$,如果把它看作某一数项级数的部分和数列,则这个数项级数就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots. \tag{5}$$

这时数列$\{a_n\}$与级数(5)具有相同的敛散性,且当$\{a_n\}$收敛时,其极限值就是级数(5)的和.

基于级数与数列的这种关系,读者不难根据数列极限的性质推出下面有关级数的一些定理.

定理 12.1(级数收敛的柯西准则)　级数(1)收敛的充要条件是:任给正数ε,总存在正整数N,使得当$m > N$以及对任意的正整数p,都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \varepsilon. \tag{6}$$

根据定理 12.1,我们立刻可写出级数(1)发散的充要条件:存在某正数ε_0,对任何正整数N,总存在正整数$m_0(>N)$和p_0,有

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0. \tag{7}$$

由定理 12.1 立即可得如下推论,它是级数收敛的一个必要条件.

推论　若级数(1)收敛,则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

例 3　讨论调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的敛散性.

解　这里调和级数显然满足推论的结论,即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

但令$p = m$时,有

$$\begin{aligned}\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{2m} \right| &= \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此,取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$,对任何正整数$N$,只要$m > N$和$p = m$就有(7)式成立.所以调和级数是发散的.

例 4　应用级数收敛的柯西准则证明级数$\sum \frac{1}{n^2}$收敛.

证 由于

$$
\begin{aligned}
&|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}| \\
=&\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2} \\
<&\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)} \\
=&\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p} \\
<&\frac{1}{m},
\end{aligned}
$$

因此,对任给正数 ε,取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$,使当 $m>N$ 及对任意正整数 p,由上式就有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

依定理 12.1 推得级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

定理 12.2 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛,则对任意常数 c,d,级数 $\sum(cu_n+dv_n)$ 亦收敛,且

$$\sum(cu_n+dv_n)=c\sum u_n+d\sum v_n.$$

由定理 12.1,级数 $\sum u_n$ 的敛散性取决于:对任给正数 ε,是否存在充分大的正数 N,使得当 $n>N$ 及对任意正整数 p 恒有(6)式成立.由此可见,一个级数是否收敛与级数前面有限项的取值无关.从而我们可得到以下定理.

定理 12.3 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

由此定理知道,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,其和为 S,则级数

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots \tag{8}$$

也收敛,且其和 $R_n=S-S_n$.(8)式称为级数 $\sum u_n$ 的第 n 个余项(或简称余项),它表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差.

定理 12.4 在收敛级数的项中任意加括号,既不改变级数的收敛性,也不改变它的和.

证 设 $\sum u_n$ 为收敛级数,其和为 S.记

$$
\begin{aligned}
&v_1=u_1+\cdots+u_{n_1},\ v_2=u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2},\cdots,\\
&v_k=u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k},\cdots.
\end{aligned}
$$

现在证明 $\sum u_n$ 加括号后的级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})=\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 也收敛,且其和也是 S.事实上,设 $\{S_n\}$ 为收敛级数 $\sum u_n$ 的部分和数列,则级数 $\sum v_k$ 的部分和

数列$\{S_{n_k}\}$是$\{S_n\}$的一个子列. 由于$\{S_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 故由子列性质,$\{S_{n_k}\}$也收敛,且$\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=S$,即级数$\sum v_k$收敛,且它的和也等于$S$.

注意:从级数加括号后的收敛,不能推断它在未加括号前也收敛. 例如

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

收敛,但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的.

习　　题

1. 证明下列级数的收敛性,并求其和数:

(1) $\dfrac{1}{1\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明:若级数$\sum u_n$发散,$c\neq0$,则$\sum cu_n$也发散.

3. 设级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都发散,试问$\sum(u_n+v_n)$一定发散吗?又若u_n与v_n($n=1,2,\cdots$)都是非负数,则能得出什么结论?

4. 证明:若数列$\{a_n\}$收敛于a,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

5. 证明:若数列$\{b_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$,则

(1) 级数$\sum(b_{n+1}-b_n)$发散;

(2) 当$b_n\neq0$时,级数$\sum\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$.

6. 应用第4,5题的结果求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\dfrac{\sin2^n}{2^n}$;　　(2) $\sum\dfrac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$;　　(4) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

8. 证明级数$\sum u_n$收敛的充要条件是:任给正数ε,存在某正整数N,对一切$n>N$总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon.$$

9. 举例说明:若级数$\sum u_n$对每个固定的p满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

此级数仍可能不收敛.

10. 设级数$\sum u_n$满足:加括号后级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$收敛($n_1=0$),且在同一括号中的$u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$符号相同,证明$\sum u_n$亦收敛.

§2 正项级数

一 正项级数收敛性的一般判别原则

若数项级数各项的符号都相同,则称它为同号级数.对于同号级数,只须研究各项都是由正数组成的级数——称为正项级数.如果级数的各项都是负数,则它乘以-1后就得到一个正项级数,它们具有相同的敛散性.

定理 12.5 正项级数$\sum u_n$收敛的充要条件是:部分和数列$\{S_n\}$有界,即存在某正数M,对一切正整数n有$S_n<M$.

证 由于$u_i>0(i=1,2,\cdots)$,所以$\{S_n\}$是递增数列.而单调数列收敛的充要条件是该数列有界(单调有界定理(定理2.9)).这就证得本定理的结论.

定理 12.6(比较原则) 设$\sum u_n$和$\sum v_n$是两个正项级数,如果存在某正数N,对一切$n>N$都有

$$u_n\le v_n, \tag{1}$$

则

(i) 若级数$\sum v_n$收敛,则级数$\sum u_n$也收敛;

(ii) 若级数$\sum u_n$发散,则级数$\sum v_n$也发散.

证 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性,因此不妨设不等式(1)对一切正整数都成立.

现分别以S_n'和S_n''记级数$\sum u_n$与$\sum v_n$的部分和.由(1)式推得,对一切正整数n,都有

$$S_n'\le S_n'' \tag{2}$$

若$\sum v_n$收敛,即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n''$存在,则由(2)式对一切$n$有$S_n'\le\lim\limits_{n\to\infty}S_n''$,即正项级数$\sum u_n$的部分和数列$\{S_n'\}$有界,由定理12.5级数$\sum u_n$收敛.这就证明了(i);(ii)为(i)的逆否命题,自然成立.

例 1 考察$\sum \frac{1}{n^2-n+1}$的收敛性.

解 由于当 $n\geq 2$ 时,有

$$\frac{1}{n^2-n+1} \leq \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

因为正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛(§1 例 4),故由定理 12.6 和 12.3,级数 $\sum \frac{1}{n^2-n+1}$也收敛.

在实际使用上,比较原则的下述极限形式通常更为方便.

推论 设

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{3}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{4}$$

是两个正项级数,若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \tag{5}$$

则

(i) 当 $0 < l < +\infty$时,级数(3)、(4)同时收敛或同时发散;

(ii) 当 $l = 0$ 且级数(4)收敛时,级数(3)也收敛;

(iii) 当 $l = +\infty$且级数(4)发散时,级数(3)也发散.

证 由(5),对任给正数 ε,存在某正数 N,当 $n > N$ 时,恒有

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \varepsilon$$

或

$$(l-\varepsilon)v_n < u_n < (l+\varepsilon)v_n. \tag{6}$$

由定理 12.6 及(6)式推得,当 $0 < l < +\infty$(这里设 $\varepsilon < l$)时,级数(3)与(4)同时收敛或同时发散.这就证得(i).

对于(ii),当 $l = 0$ 时,由(6)式右半部分及比较原则可得:若级数(4)收敛,则级数(3)也收敛.

对于(iii),若 $l = +\infty$,即对任给的正数 M,存在相应的正数 N,当 $n > N$ 时,都有

$$\frac{u_n}{v_n} > M$$

或

$$u_n > Mv_n.$$

于是由比较原则知道,若级数(4)发散,则级数(3)也发散.

例 2 级数

$$\sum \frac{1}{2^n - n}$$

是收敛的,因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^n - n}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{n}{2^n}} = 1$$

以及等比级数 $\sum \frac{1}{2^n}$ 收敛,所以根据推论,级数 $\sum \frac{1}{2^n - n}$ 也收敛.

例 3 级数

$$\sum \sin\frac{1}{n} = \sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \cdots + \sin\frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的.因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = 1,$$

根据推论以及调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 发散,所以级数 $\sum \sin\frac{1}{n}$ 也发散.

二 比式判别法和根式判别法

根据比较原则,可以利用已知收敛或者发散级数作为比较对象来判别其他级数的敛散性.本段所介绍的两个方法是以等比级数作为比较对象而得到的.

定理 12.7(达朗贝尔判别法,或称比式判别法) 设 $\sum u_n$ 为正项级数,且存在某正整数 N_0 及常数 $q(0 < q < 1)$.

(i) 若对一切 $n > N_0$,成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q, \tag{7}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛.

(ii) 若对一切 $n > N_0$,成立不等式

$$\frac{u_{n+1}}{n_n} \geq 1, \tag{8}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

证 (i) 不妨设不等式(7)对一切 $n \geq 1$ 成立,于是有

$$\frac{u_2}{u_1} \leq q,\ \frac{u_3}{u_2} \leq q, \cdots, \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q, \cdots.$$

把前 $n-1$ 个不等式按项相乘后,得到

$$\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\cdots\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\leq q^{n-1}$$

或者

$$u_n\leq u_1q^{n-1}.$$

由于当 $0<q<1$ 时,等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$ 收敛,根据比较原则及上述不等式可推得级数 $\sum u_n$ 收敛.

(ii) 由于 $n>N_0$ 时成立不等式(8),即有

$$u_{n+1}\geq u_n\geq u_{N_0}.$$

于是当 $n\to\infty$ 时,u_n 的极限不可能为零.由定理 12.1 推论知级数 $\sum u_n$ 是发散的.

推论 1(比式判别法的极限形式)　若 $\sum u_n$ 为正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q,\tag{9}$$

则

(i) 当 $q<1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散.

证　由(9)式,对任意取定的正数 $\varepsilon(<|1-q|)$,存在正数 N,当 $n>N$ 时,都有

$$q-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<q+\varepsilon.$$

当 $q<1$ 时,取 ε 使 $q+\varepsilon<1$,由上述不等式的右半部分及定理 12.7 的(i),推得级数 $\sum u_n$ 是收敛的.

若 $q>1$,则取 ε 使 $q-\varepsilon>1$,由上述不等式的左半部分及定理 12.7 的(ii),推得级数 $\sum u_n$ 是发散的.

若 $q=+\infty$,则存在 N,当 $n>N$ 时有

$$\frac{u_{n+1}}{n_n}>1,$$

所以这时级数 $\sum u_n$ 是发散的.

例 4　级数

$$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\cdots+\frac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot5\cdot9\cdots[1+4(n-1)]}+\cdots,$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3n}{1+4n}=\frac{3}{4}<1,$$

根据推论 1 级数是收敛的.

例 5　讨论级数 $\sum nx^{n-1}(x>0)$ 的敛散性.

解　因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}=x\cdot\frac{n+1}{n}\to x(n\to\infty),$$

根据推论 1,当 $0<x<1$ 时级数收敛;当 $x>1$ 时级数发散;而当 $x=1$ 时,所考察的级数是 $\sum n$,它显然也是发散的.

若(9)中 $q=1$,这时用比式判别法不能对级数的敛散性作出判断,因为它可能是收敛的,也可能是发散的.例如级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum\frac{1}{n}$,它们的比式极限都是

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\to 1\qquad(n\to\infty),$$

但 $\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的(§1 例 4),而 $\sum\frac{1}{n}$ 却是发散的(§1 例 3).

若某级数的(9)式的极限不存在,则可应用上、下极限来判别.

推论 2　设 $\sum u_n$ 为正项级数.

(i) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q<1$,则级数收敛;

(ii) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n-1}}{u_n}=q>1$,则级数发散.

对本推论读者可仿照推论 1 的方法证明.

例 6　研究级数

$$1+b+bc+b^2c+b^2c^2+\cdots+b^nc^{n-1}+b^nc^n+\cdots\tag{10}$$

的敛散性,其中 $0<b<c$.

解　由于

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}b,& n\text{ 为奇数},\\ c,& n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

故有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=c,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=b,$$

于是,当 $c<1$ 时,级数(10)收敛;当 $b>1$ 时,级数(10)发散;但当 $b<1<c$ 时,比式判别法无法判断级数(10)的敛散性.

定理 12.8(柯西判别法,或称根式判别法)　设 $\sum u_n$ 为正项级数,且存在某正数 N_0 及正常数 l,

(i) 若对一切 $n>N_0$,成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n}\leq l<1,\tag{11}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛;