数学分析

上册(第三版)

华东师范大学数学系 编

高等教育出版社

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果,是面向21世纪课程教材,普通高等教育"九五"国家教委重点教材.内容包括实数集和函数,数列极限,函数极限,连续性,导数和微分,微分中值定理及其应用,实数完备性,不定积分,定积分及其应用,反常积分等,附录为微积分学简史,实数理论,积分表.

本书可作为高等师范院校或其他类型学校数学专业的教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.上册/华东师范大学数学系编.—3版.
北京:高等教育出版社,2000
ISBN 7-04-009137-2

Ⅰ.数… Ⅱ.华… Ⅲ.数学分析—高等学校—教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第75486号

数学分析 上册 第三版
华东师范大学数学系 编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×960 1/16	版　　次	1981年4月第1版 年 月第 版
印　　张	22		
字　　数	400 000	印　　次	年 月第 次印刷
		定　　价	18.70元

责任编辑　高尚华
封面设计　张　楠
责任绘图　郝　林
版式设计　马静如
责任校对　马桂兰
责任印制

第三版前言

华东师范大学数学系编写的《数学分析》上、下册经过国家教委组织的专家评审,列入“九五”教委级重点教材;并承高等学校数学和力学指导委员会基础数学教学指导组对教材修订提出具体指导意见,我系数学分析编写组对本书在第二版使用基础上进行修订.

此次修订前我们广泛征求了各使用院校的意见,召开了使用教材情况的座谈会,许多具有丰富教学经验的教师对本教材修改提供了许多积极、中肯的意见.在此基础上,我们在现行数学分析教学大纲的范围内对一些内容进行适当调整和增删;同时考虑到近代数学分析教材发展潮流,适度地反映这方面的进展情况,以适应对21世纪新教材的需求.

关于实数理论,不少同类教材由小数出发叙述实数理论,这种方式比较容易理解,并且与中学数学教学衔接得比较紧密.我们在第一章中采用由小数引进实数的方法,并由此证明确界原理,希望这样处理有利于读者掌握这一实数基本原理.

在单变量微分学中,除按传统方式由速度和曲线的切线引入导数概念外,同时也由极值问题引入稳定点概念,并使微分中值定理与其应用结合得更为紧密.

积分理论方面,在引入定积分基本概念后,提前出现牛顿—莱布尼茨公式,这样能较早接触定积分计算.对于可积分条件先作直观描述,并用来证明某些函数类的可积性,难度较大的可积性三个充要条件放到该章最后一节,可根据需要选用.根据使用院校意见,反常积分和含参量积分各自独立成章.

二重积分的变量变换公式在较强的条件下,利用格林公式进行证明;一般条件下的重积分变换公式采用连续模一致逼近的方法导出,对希望了解一般条件下严格证明的读者可能有益,这个证明放在重积分最后一节.

在欧美、俄罗斯数学分析教材中对向量值函数微分学和外微分形式相当重视,在应用数学中也日见其重要性.在前二版有关内容的基础上,我们使用迭代法证明反函数定理,并由此证明隐函数定理及求导法,使得相应内容比较容易接受;外积运用了浅近的解释,使其与重积分变量变换公式相联系.上述两部分内容以“流形上微积分学初阶”为题构成第二十三章内容,供选学用.

对于加“*”的章节,教学中可灵活选用,也可作为读者进一步阅读的内容或作为选修课的内容,以使本书适合多种层次的需求.

附录Ⅰ　微积分学简史.由张奠宙教授作了修订,读者可从此附录了解微积分学发展的线索.

附录Ⅱ　实数理论.采用戴德金分划由有理数集的分划叙述实数完备性比较直观、优美,仍是附录的重要组成部分.但用小数讲述实数理论与实用更靠近,在附录最后添加"无限小数四则运算的定义"与正文相呼应.

附录Ⅲ　积分表.

在这次修订中,我们审查了全部习题,适当进行了调整和补充,希望能更好符合教学的需要.

这次修订由吴良森任主编.

上册第一、二、三、四、七章由宋国栋编写;第五、六章由庞学诚编写;第八、九、十、十一章由毛羽辉编写,上册由毛羽辉负责编写组织及修改.

下册第十二、十三、十四、十五章由胡善文编写;第十六、十七、十八、二十三章由吴良森编写;第十九、二十、二十一、二十二章由魏国强编写,下册由魏国强负责编写组织.

最后由吴良森统一整理.庞学诚、魏国强分别审阅了上、下册的稿件.

程其襄教授、陈昌平教授、张奠宙教授阅读了第二十三章主要内容的初稿,并提出了宝贵的意见,对他们的鼓励和支持深表感谢.

郑英元教授对修订提了许多积极的建议.

高等学校数学和力学指导委员会成员,吉林大学孙善利教授对本书修改提供了宝贵的意见.

陕西师范大学、华南师范大学、南京师范大学、江西师范大学、广西师范大学、常熟高等专科学校等院校数学系对教材修改也都提出过仔细的意见,在此致以深切的谢意.

华东理工大学谢国瑞教授和交通大学孙薇荣教授仔细审阅了本书上册的稿件,高等教育出版社高尚华编审审阅了下册的稿件,提出许多宝贵意见,在此表示感谢.

第三版中还会有许多不足之处,恳切希望读者批评指正.

编者

1999 年 9 月

再 版 的 话

本书自 1980 年出版发行以来,由于它在取材、体系、可读性诸方面较为切合我国教学实际,而被许多兄弟院校所采用,并于 1987 年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获全国优秀奖 .近几年,许多学校在数学教学改革中,更新了一些课程,对数学分析提出了许多新的要求 .基于这些情况,我们在这次再版中,除订正初版中的某些疏漏外,在不影响本书原有体系、格局的前提下,对某些内容作了适当的增删和调整,使全书内容更充实,结构更合理,且有更大的选择性,以期适应各类学校师生的需要 .

修改的主要内容有:

在第一章精简某些与中学数学相重复的函数概念,增加实数集有关的一些内容,如有界集,确界和确界原理等 .

在极限理论方面,把出发点改为“ 确界原理 ”(原来是“ 单调有界原理 ”),并在第二章用它证明单调有界定理,第四章用它证明实指数幂的性质,最后在第八章完成对实数完备性的几个等价命题的证明,相应地,在附录Ⅱ实数理论中,也改用戴德金分划说定义实数,并证明了确界原理(原来采用柯西列定义实数,虽有不少优点,但不够直观,不易理解) .此外,子列概念提前到第二章,第八章“ 极限与连续性(续) ”(原为第七章)在内容和次序上也稍作调整 .

对于微分学,在单元部分,把原来的第六章中值定理与导数应用分为两章 .在新的第六章“ 微分学基本定理与不定式极限 ”增加了导数极限定理与达布定理(小字排印),用以揭示导函数的性质;在新的第七章“ 运用导数研究函数性态 ”加强了日益显得重要的凸函数概念 .在多元部分,除对原有内容作不同程度精简外,主要增加了第十九章“ 向量函数微分学 ”,以便在更一般形式上讨论多元函数理论,使读者对经典导数概念的认识得以深化 .这一章目前暂作选学材料,期望今后能逐步用向量函数的方式取代传统内容成为多元函数微分学的主体 .

在积分学方面,于定积分中补充了第二积分中值定理(小字排印) .压缩了反常积分与含参量积分的内容,并把它分别并入定积分与重积分各章中 .为便于重积分部分的教学,在内容与结构上也稍作调整,其中第二十章主要讲述二、三重积分的概念、计算与应用,在第二十一章除对二重积分中某些问题作进一步讨论外,还介绍了 n 重积分(小字排印)和含参量非正常积分 .此外,我们删去了“ 反常重积分 ”与“ 外微分与一般斯托克斯公式 ”两节 .

关于级数部分,在新版中删去了对傅里叶级数一致收敛性的进一步讨论.

张奠宙教授为本书写了"微积分学简史"(附录Ⅰ).我们认为,知道一点微积分的来龙去脉,对每一位数学教育工作者来说是必要和有益的.

在这次修订中,我们重新审查了本书的全部习题,并进行了调整与补充,以便更加符合教学的需要.各节横线以上的习题仍然是必做题,每册书末都附有计算题答案.

在新版中,用记号 表示命题证明或例题求解的结束.上册增加了附录Ⅲ"积分表",每册末尾增设了名词和人名索引,以供读者检索.

这次修订工作由程其襄、郑英元、毛羽辉和宋国栋等四人完成,程其襄教授任主编,郑英元负责全书的统一整理工作.高等教育出版社郑洪深同志为本书的初版和再版做了许多深入细致的工作.我系数学分析教学组成员对本书的修订工作提出过许多积极的建议.本书自出版以来深得广大读者的关心与支持.在此,我们一并致以深切的谢意,并希望读者对本书给予批评与指正.

编　者

上册:1987 年 12 月完成初稿,1990 年 2 月完成修改稿.

下册:1988 年 6 月完成初稿,1990 年 6 月完成修改稿.

编者的话（初版）

本书是根据1977年高等学校理科数学教材大纲讨论会所制定的《数学分析》大纲编写的.全书分上、下两册,可作为高等师范院校数学系教学用书,以及其他高等院校有关专业的教学参考书.

关于本书的使用兹作以下一些说明:在极限问题的处理上,虽一开始就采用ε-δ定义,但若干较难的理论证明则放到微分学之后.实数理论作为附录放在上册的末尾.有关集合的基本概念,目前尚未在中学里全面普及,仍在附录Ⅰ中作了简要的介绍.本书有部分内容用小号字排印,在实际教学中可视情况选用.本书各节都附有适量的习题,并把它们分为基本题与选作题两类,中间用一道横线分开,横线之后的习题和各章的总练习题,读者可在教师指导下挑选一部分进行练习.书末并附有计算题的答案.

本书由程其襄教授主编,编写组写出初稿后,经程其襄、周彭年、郑英元修改定稿(郑英元执笔整理).先后参加本书编写工作的有:陈昌平、陈美廉、徐钧涛、曹伟杰、杨庆中、黄丽萍、张奠宙、宋国栋等同志.此外,林克伦、华煜铣、顾鹤荣等同志也参加过一些工作.

北京师范大学、武汉大学担任本书主审,先后参加审稿的单位有:上海师范学院、安徽师范大学、吉林师范大学、曲阜师范学院、西藏师范学院、陕西师范大学、贵阳师范学院、徐州师范学院、新乡师范学院以及四川师范学院、华中师范学院、华南师范学院、江西师范学院、昆明师范学院、南京师范学院等.甘肃师范大学的同志也对本书上册提出过仔细的修改意见.在审查过程中,大家对原稿提出了许多宝贵的意见和建议,我们曾根据这些意见作过许多重大的修改,特此表示衷心的感谢.

由于我们水平有限,恳切希望读者对本书的缺点错误给予批评指正.

编者

1979.11

又及,本书最后定稿时,曾照一九八〇年五月在上海举行的高等学校理科数学教材编审委员会审订的《数学分析》大纲作了修订.

编者

1980.9

目　　录

第一章　实数集与函数

第二章　数 列 极 限

第三章　函 数 极 限

第四章　函数的连续性

第五章　导数和微分

第六章 微分中值定理及其应用

第七章 实数的完备性

第八章 不定积分

第九章 定积分

第十章　定积分的应用

第十一章　反 常 积 分

第一章　实数集与函数

§1　实　　数

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数 .为此,我们先简要叙述实数的有关概念 .

一　实数及其性质

在中学数学课程中,我们知道实数由有理数与无理数两部分组成 .有理数可用分数形式$\frac{p}{q}$(p、q 为整数, $q\neq 0$)表示,也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示;而无限十进不循环小数则称为无理数 .有理数和无理数统称为实数 .

为了以下讨论的需要,我们把有限小数(包括整数)也表示为无限小数 .对此我们作如下规定:对于正有限小数(包括正整数) x,当 $x = a_0 .a_1 a_2 \cdots a_n$ 时,其中 $0\leq a_i \leq 9$, $i = 1,2,\cdots, n$, $a_n\neq 0$, a_0 为非负整数,记

$$x = a_0 .a_1 a_2 \cdots (a_n - 1)999\,9\cdots,$$

而当 $x = a_0$ 为正整数时,则记

$$x = (a_0 - 1) .999\,9\cdots,$$

例如 2 .001 记为 2.000 999 9…;对于负有限小数(包括负整数) y,则先将 $-y$ 表示为无限小数,再在所得无限小数之前加负号,例如 -8 记为 $-7.999\,9\cdots$;又规定数 0 表示为 0.000 0… .于是,任何实数都可用一个确定的无限小数来表示 .

我们已经熟知比较两个有理数大小的方法 .现定义两个实数的大小关系 .

定义 1　给定两个非负实数

$$x = a_0 .a_1 a_2 \cdots a_n \cdots, \quad y = b_0 .b_1 b_2 \cdots b_n \cdots,$$

其中 a_0, b_0 为非负整数, a_k, b_k ($k = 1,2,\cdots$)为整数, $0\leq a_k \leq 9$, $0\leq b_k \leq 9$.若有

$$a_k = b_k,\ k = 0,1,2,\cdots,$$

则称 x 与 y 相等,记为 $x = y$;若 $a_0 > b_0$ 或存在非负整数 l,使得

$$a_k = b_k (k = 0,1,2,\cdots, l) \text{ 而 } a_{l+1} > b_{l+1},$$

则称 x 大于 y 或 y 小于 x,分别记为 $x > y$ 或 $y < x$.

对于负实数 x, y,若按上述规定分别有 $-x=-y$ 与 $-x>-y$,则分别称 $x=y$ 与 $x<y$(或 $y>x$).另外,自然规定任何非负实数大于任何负实数.

以下给出通过有限小数来比较两个实数大小的等价条件.为此,先给出如下定义.

定义 2 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数.称有理数

$$x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为实数 x 的n位不足近似,而有理数

$$\overline{x_n}=x_n+\frac{1}{10^n}$$

称为 x 的n位过剩近似, $n=0,1,2,\cdots$.

对于负实数 $x=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,其 n 位不足近似与过剩近似分别规定为

$$x_n=-a_0.a_1a_2\cdots a_n-\frac{1}{10^n} \text{ 与 } \overline{x_n}=-a_0.a_1a_2\cdots a_n.$$

注 不难看出,实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减,即有 $x_0\leq x_1\leq x_2\leq\cdots$,而过剩近似$\overline{x_n}$当 n 增大时不增,即有$\overline{x_0}\geq\overline{x_1}\geq\overline{x_2}\geq\cdots$.

我们有以下的

命题 设 $x=a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y=b_0.b_1b_2\cdots$为两个实数,则 $x>y$ 的等价条件是:存在非负整数 n,使得

$$x_n>\overline{y_n},$$

其中 x_n 表示 x 的 n 位不足近似,$\overline{y_n}$表示 y 的 n 位过剩近似.

关于这个命题的证明,以及关于实数的四则运算法则的定义,可参阅本书附录Ⅱ第八节.

例 1 设 x、y 为实数,$x<y$.证明:存在有理数 r 满足

$$x<r<y.$$

证 由于 $x<y$,故存在非负整数 n,使得$\overline{x_n}<y_n$.令

$$r=\frac{1}{2}(\overline{x_n}+y_n),$$

则 r 为有理数,且有

$$x\leq\overline{x_n}<r<y_n\leq y,$$

即得 $x<r<y$.

为方便起见,通常将全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$,即

$$\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 为实数}\}.$$

实数有如下一些主要性质:

1.实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的,即任意两个

实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍然是实数.

2. 实数集是有序的,即任意两实数 a、b 必满足下述三个关系之一:$a<b$, $a=b$, $a>b$.

3. 实数的大小关系具有传递性,即若 $a>b$, $b>c$,则有 $a>c$.

4. 实数具有阿基米德(Archimedes)性,即对任何 a、$b\in\mathbf{R}$,若 $b>a>0$,则存在正整数 n,使得 $na>b$.

5. 实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数(见例 1),也有无理数.

6. 如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原点,指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向),并规定一个单位长度,则称此直线为数轴.任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数.于是,实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系.在本书以后的叙述中,常把"实数 a"与"数轴上的点 a"这两种说法看作具有相同的含义.

例 2 设 a、$b\in\mathbf{R}$.证明:若对任何正数 ε 有 $a<b+\varepsilon$,则 $a\leq b$.

证 用反证法.倘若结论不成立,则根据实数集的有序性,有 $a>b$.令 $\varepsilon=a-b$,则 ε 为正数且 $a=b+\varepsilon$,但这与假设 $a<b+\varepsilon$ 相矛盾.从而必有 $a\leq b$.

关于实数的定义与性质的详细论述,有兴趣的读者可参阅本书附录Ⅱ.

二 绝对值与不等式

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

实数的绝对值有如下一些性质:

1. $|a|=|-a|\geq 0$;当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$.

2. $-|a|\leq a\leq |a|$.

3. $|a|<h \Leftrightarrow -h<a<h$; $|a|\leq h \Leftrightarrow -h\leq a\leq h\ (h>0)$.

4. 对于任何 a、$b\in\mathbf{R}$ 有如下的三角形不等式:

$$|a|-|b|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|.$$

5. $|ab|=|a||b|$.

6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$.

下面只证明性质 4,其余性质由读者自行证明.

由性质 2 有