

数 学 分 析

(第一册)

严子谦 尹景学 张 然

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是为适应数学学科本科生教学、面向 21 世纪进行改革的需要，结合作者多年来教学实践的经验、体会编写而成的。作者从内容的安排、思维方法的训练等方面进行改革，作了一些有益的尝试。

本书为第一册，主要内容包括数列极限、函数极限、函数的连续性、导数与微分、中值定理与 Taylor 公式、不定积分与定积分、数项级数、广义积分、函数级数以及 Fourier 级数。

本书可作为高等学校理科及师范学校数学学科各专业的教科书，也可供计算机学科、力学、物理学科各专业选用及社会读者阅读。

序 言

本书是国家理科基地创名牌课程项目的研究成果,是根据我国现行《数学分析》教学大纲编写的,适用于高等学校中与数学和应用数学有关的各类专业。

本书是在江泽坚,周光亚,吴智泉编,人民教育出版社出版的,署名吉林大学数学系(实为江泽坚,吴智泉,刘隆复,潘吉勋,严子谦等)编,高等教育出版社出版的以及吴智泉,严子谦,崔志勇编,吉林大学出版社出版的三套《数学分析》教材的基础上,集编者十几年以至几十年的教学经验,编写而成的。

作为一门基础课,《数学分析》的基本内容早已基本定型。我们这套教材的主旨,是希望在可接受性和提高学生逻辑思维与计算技能方面有所前进。

我们现实地估计到本书读者的起点,不作过高过难的要求。我们注意从几何直观或实际例子出发引入数学概念,然后用严格的数学语言给出定义,并进行必要的分析,由感性认识到理性认识,由浅入深,逐步展开。

极限概念无疑是《数学分析》中最基本的概念之一。本书就从它开始,在承接中学数学关于数列极限的定义,介绍极限的一些基本性质之后,我们郑重地向读者提出在极限论证和推导过程中不等式思维的作用。稍后又引入振幅数列,刻画数列的变化。希望通过这些,帮助读者更好地把握极限这一概念,更简洁地处理有关极限的计算与论证。类似的思想在函数的连续性,积分和级数理论中也有所体现。

有关实数理论的一些基本定理(除有限覆盖定理放在第二册开头之外),在本书第一章中即纷纷登场亮相。这会不会成为初学者的“拦路虎”?我们的考虑是,第一,这些内容的融会贯通,不是一天两天的事情,而要靠日积月累。因此,开始要求不必太高,经过多次反复的应用,自会逐渐加深理解。第二,这些定理在不太长的时间内依次出现,可以互为注释,互相补充,互相佐证,有利于更好地把握它们的实质和证明。第三,这些定理在应用中各有短长。一次出齐之后,便于在应用时“各取所需”。

我们在强调把握基本内容,注意逻辑推理的严密性的同时,尽量避免证明特别繁琐的定理。对这类定理,我们通常针对较为特殊的情况给出较为简洁的证明,使读者抓住主要矛盾所在。而后对一般情况给出或简或详的提示。

大体上说, 我们在一元微积分部分, 在注重解题技巧的同时, 也很注重培养读者的逻辑推理能力, 特别强调逻辑的严密性, 而在多元微积分部分则更多地注重计算技能的训练。这是因为, 第一, 有些东西 (例如积分的存在性), 在一元部分已有详尽的讨论, 到多元部分只不过“依样画葫芦”, 倒不如从简。第二, 多元部分的有些内容 (例如重积分的变量替换和场论中的几个定理), 要想对最一般的叙述给出严格的证明, 是需要冗长篇幅的。而且对多数教者, 学者和读者来说, 吃力未必“讨好”。

本书的例题和习题, 是经过精心挑选而配置的。这方面的主要考虑, 一是帮助读者获得解题的切实训练, 掌握解决各种典型问题的基本技巧; 一是注意有实际背景的问题和应用性问题, 锻炼和提高读者解决实际问题的能力。

伍卓群教授和李荣华教授都曾阅读过本书的初稿, 他们对本书的最后完成提出了许多宝贵的意见, 在此谨向他们表示衷心的感谢。感谢尹丽博士, 她演算了本书大部分习题。感谢黄锐、刘强、王敬、李颖花、芦碧波和柴世民等研究生, 他们对本书初稿的排版付出了许多辛苦的劳动。同时还要感谢吉林大学数学学院基地班的部分同学, 他们阅读了本书的初稿, 提出了许多有价值的参考意见。我们还要特别感谢高等教育出版社王瑜、李陶等有关同志对本书的出版所给予的关注和支持。

本书虽经实际授课使用和多次修改, 错误和缺陷仍在所难免, 敬请读者批评指正。

编者

2004年春于长春

目 录

第一章 数列极限	1
§ 1 数列极限的定义和基本性质	1
1.1 数列极限的定义	1
1.2 数列极限的基本性质	3
§ 2 借助不等式估计作极限论证举例	9
§ 3 与实数理论有关的几个基本定理	13
3.1 单调有界原理	13
3.2 闭区间套定理	16
3.3 单调有界原理、闭区间套定理与确界原理的等价性	19
§ 4 上下极限	22
4.1 上下数列与上下极限	22
4.2 用上下极限判定极限的存在性	24
§ 5 Cauchy 收敛准则	28
5.1 Cauchy 数列	28
5.2 用 Cauchy 准则判定极限的存在性	30
§ 6 子数列	31
6.1 子数列收敛定理	31
6.2 用子数列收敛定理证明 Cauchy 准则的充分性	32
6.3 用子数列判定极限的存在性	33
6.4 无界数列	33
6.5 用子数列判定极限的非存在性	34
第二章 函数极限	36
§ 1 函数的基本概念	36
1.1 函数及其图形	36
1.2 复合函数和反函数	37
1.3 初等函数	38
1.4 非初等函数举例	42
§ 2 函数极限的定义与性质	44
2.1 函数在一点处的极限	44
2.2 函数在无穷远处的极限	48
2.3 函数极限的性质	49

§ 3 函数极限的判定	52
3.1 函数极限与数列极限的关系	52
3.2 Cauchy 准则	54
3.3 单调有界原理	54
3.4 上下极限 *	55
3.5 函数极限的非存在性判定	55
第三章 函数的连续性	59
§ 1 函数连续性的定义	59
1.1 连续点的定义	59
1.2 间断点的定义	60
1.3 连续函数的定义	60
§ 2 函数的连续性与四则和复合运算	62
§ 3 闭区间上连续函数的性质	64
3.1 有界性定理	64
3.2 最值定理	64
3.3 介值定理	65
3.4 一致连续性	66
§ 4 初等函数的连续性	69
第四章 导数与微分	72
§ 1 导数的几何与物理背景	72
1.1 曲线在其上一点处的切线	72
1.2 变速直线运动物体的瞬时速度	73
1.3 非稳恒电流的电流强度	74
1.4 非均匀杆的线密度	75
§ 2 导数及其运算法则	75
2.1 导数的定义	75
2.2 可导与连续的关系	76
2.3 导数的四则运算	77
2.4 复合函数的导数	79
2.5 反函数的导数	80
2.6 基本初等函数的导数	80
2.7 导数计算例题	84
§ 3 无穷小量与无穷大量	87

§ 4	微分	90
4.1	微分的定义及与导数的关系	90
4.2	微分的运算法则	92
§ 5	高阶导数和高阶微分	95
5.1	高阶导数	95
5.2	高阶微分	99
§ 6	曲线的曲率与密切圆 *	102
第五章	中值定理与 Taylor 公式	110
§ 1	微分中值定理	110
1.1	Fermat 引理	110
1.2	微分中值定理	110
1.3	Darboux 定理	115
§ 2	L'Hospital 法则	117
§ 3	Taylor 公式	125
3.1	Taylor 公式的一般形式	126
3.2	若干初等函数的 Maclaurin 公式	128
3.3	Taylor 公式应用举例	131
§ 4	函数性质的研究与作图	134
4.1	函数的单调性	134
4.2	函数的极值与最值	136
4.3	函数的凸性与拐点	141
4.4	函数作图	148
§ 5	解方程的 Newton 法	153
第六章	不定积分	156
§ 1	不定积分的概念与线性性质	156
1.1	原函数和不定积分的概念	156
1.2	基本积分公式	158
1.3	不定积分的线性性质	158
§ 2	换元积分法	160
2.1	第一换元积分法	161
2.2	第二换元积分法	164
§ 3	分部积分法	169
§ 4	有理函数的积分及相关积分	173

4.1	有理函数的积分	174
4.2	三角函数有理式的积分	178
4.3	$\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 型积分 *	180
4.4	$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型积分 *	181
第七章	定积分	186
§ 1	定积分的概念	186
1.1	曲边梯形的面积	186
1.2	变力做功	187
1.3	变速直线运动的路程	187
1.4	定积分的定义	188
§ 2	可积性条件	190
2.1	可积的必要条件	190
2.2	Darboux 和	191
2.3	可积的充要条件	192
§ 3	定积分的基本性质	197
§ 4	微积分学基本定理	203
4.1	原函数存在定理	203
4.2	Newton-Leibniz 公式	204
§ 5	定积分的计算	208
5.1	定积分的换元法	208
5.2	定积分的分部积分法	212
5.3	Taylor 公式的积分型余项	214
5.4	例题选讲	215
§ 6	积分中值定理	219
§ 7	定积分的应用	225
7.1	微元法	225
7.2	定积分在几何上的应用	227
7.3	定积分在物理上的应用	239
第八章	数项级数	244
§ 1	级数的概念与基本性质	244
1.1	收敛与发散	244
1.2	级数的基本性质	245

§ 2	正项级数	249
§ 3	变号级数	261
3.1	Leibniz 判别法	261
3.2	绝对收敛与条件收敛	263
3.3	Abel 判别法和 Dirichlet 判别法	263
§ 4	级数的代数运算	268
4.1	无穷级数中各项的次序重排	268
4.2	级数的乘法	272
第九章	广义积分	275
§ 1	广义积分的定义与基本性质	275
1.1	无穷积分的定义	275
1.2	瑕积分的定义	277
1.3	广义积分的基本性质	280
§ 2	非负函数的广义积分	283
§ 3	一般函数的广义积分	291
第十章	函数项级数	298
§ 1	一致收敛性	298
1.1	一致收敛的概念	299
1.2	Cauchy 准则	303
1.3	函数级数一致收敛判别法	304
1.4	广义一致收敛	308
§ 2	函数级数的和函数的性质	311
2.1	连续性	311
2.2	逐项积分	312
2.3	逐项微分	314
2.4	Dini 定理*	317
§ 3	幂级数	319
3.1	幂级数的收敛域	320
3.2	幂级数的性质	322
3.3	Taylor 级数	326
§ 4	连续函数表示为多项式序列的一致极限	334

第十一章 Fourier 级数	338
§ 1 简谐振动及其叠加	338
§ 2 若干预备知识	340
2.1 按段单调性和光滑性	341
2.2 三角函数系的直交性	341
§ 3 Fourier 系数	343
3.1 Fourier 系数的确定	343
3.2 计算 Fourier 系数的例题	345
3.3 Bessel 不等式	347
3.4 Riemann 引理	348
§ 4 收敛性定理	350
4.1 收敛性条件	350
4.2 Fourier 展开式举例	355
§ 5 正弦展开和余弦展开	360
§ 6 Fourier 级数的一致收敛性	363
§ 7 逐项积分与逐项微分	366
§ 8 Fourier 级数的指数形式与任意周期情形	368

第一章 数列极限

数学分析课程的基本内容,就是用极限的观点去观察函数的变化特征,计算某些重要的量,例如导数和积分.因此,极限理论在数学分析中起着基础的作用.数列的极限是所有各种极限中较为简单的一种.我们的讨论就从它开始.

在第一章中,我们将介绍数列极限的定义与基本性质,极限论证中常须依据的某些原理和某些常用的基本技巧.

在本书中,如无特殊声明,凡称数都指实数,全体实数所构成的集合记为 \mathbb{R} .我们还用 \mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} 和 \mathbb{Q} 分别表示全体自然数,正整数,整数和有理数所构成的集合.

§1 数列极限的定义和基本性质

本节给出数列极限的精确定义,并介绍数列极限的一些重要性质,包括夹挤定理和极限的四则运算等.这些都是我们今后掌握微积分理论所必不可少的基础知识.

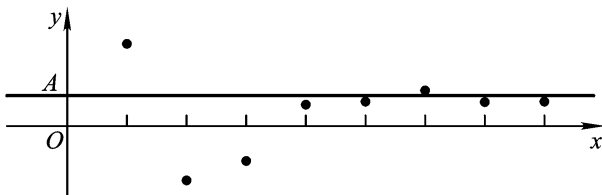
1.1 数列极限的定义

定义 1.1 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, A 为一个给定实数.如果对于任意给定的正数 ε , 都存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 就有

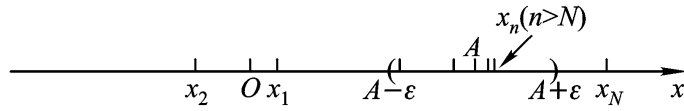
$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限, 或 $\{x_n\}$ 收敛于 A .

直观上就是, 当 n 无限增大时, x_n 无限接近 A . 几何上, 放在 xOy 平面上来看, 就是当 n 越来越大的时候, 点 (n, x_n) 与直线 $y = A$ 的距离就越来越接近.



如果放在 x 轴上来看, 就是对任给的 $\varepsilon > 0$, 都只有有限项 x_n 位于区间 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 之外.



命题 1.1 如果一个数列有极限, 则极限是唯一的.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 既以 A 为极限, 又以 B 为极限. 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 和 N_2 , 使得

$$|x_n - A| < \varepsilon, \quad \text{当 } n > N_1,$$

$$|x_n - B| < \varepsilon, \quad \text{当 } n > N_2.$$

令 $N = N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时, 以上两式都成立, 因而有

$$|A - B| = |A - x_n + x_n - B| \leq |x_n - A| + |x_n - B| < 2\varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $A - B = 0$, 即 $A = B$. □

通常, 如果数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限, 则记成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A,$$

或

$$x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 我们就称该数列是发散的. 我们将讨论数列收敛与发散的问题统称为数列的敛散性.

例 1.1 设 $\{x_n\}$ 为一常数数列, 即对任何 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x_n = C$, C 为常数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$.

证明 对任意给定的正数 ε , 都有

$$|x_n - C| = 0 < \varepsilon, \quad \forall n \geq 1.$$

(此处以及以后, 记号 “ \forall ” 表示 “对任意”.) 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$. □

例 1.2 设 r 为满足 $|r| < 1$ 的数. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

证明 若 $r = 0$, 结论显然成立. 故不妨设 $r \neq 0$. 对于任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$ (此处以及以后, 记号 “ \in ” 表示 “属于”), 取正整数 $N = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |r|} \right] + 1$ (符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则当 $n > N$ 时, 有 $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |r|}$, 从而

$$|r^n| = 10^{n \lg |r|} < 10^{(\lg \varepsilon / \lg |r|) \lg |r|} = \varepsilon.$$

按定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. □

例 1.3 设 k 为一正数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^{1/k}} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 有 $n > \frac{1}{\varepsilon^{1/k}}$, 从而

$$\frac{1}{n^k} < \left(\varepsilon^{1/k} \right)^k = \varepsilon.$$

按定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$. □

例 1.4 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lg n} = 0$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N = [10^{1/\varepsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{1}{\lg n} < \frac{1}{\lg 10^{1/\varepsilon}} = \varepsilon.$$

按定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lg n} = 0$. □

注 1.1 从例 1.4 的证明可以看出, 对任何 $a > 0$, $a \neq 1$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_a n} = 0$. 特别地, 当 a 为自然对数的底 e 时, 结论成立, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. 关于自然对数的底的定义, 我们会在后面给出.

例 1.5 证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

证明 用反证法. 假设 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 存在. 则存在正整数 N , 使 $n > N$ 时, 有

$$|(-1)^n - A| < 1.$$

但是, 容易看出, 若 $A \geq 0$ (≤ 0), 该式对奇 (偶) 数 n 显然不成立. □

1.2 数列极限的基本性质

定理 1.1 (夹挤定理) 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 为三个数列, 满足下述条件:

$$y_n \leq x_n \leq z_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

其中 N_0 为一已知正整数. 如果对某个常数 A , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

证明 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, 故有 N_1 和 N_2 , 使得

$$|y_n - A| < \varepsilon, \quad \text{当 } n > N_1,$$

$$|z_n - A| < \varepsilon, \quad \text{当 } n > N_2,$$

亦即有

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon, \quad \text{当 } n > N_1,$$

$$A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon, \quad \text{当 } n > N_2.$$

令 $N = N_0 + N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时, 就有

$$A - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < A + \varepsilon,$$

从而

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

按定义知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. □

注 1.2 作为定理 1.1 的特例: 若 $|x_n| \leq y_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

例 1.6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$.

解 记 $x_n = \frac{2^n}{n!}$. 容易看出, 对任何正整数 n , 都有

$$0 \leq x_n \leq \frac{4}{n}.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$, 上述不等式表明, x_n 介于两个都趋于零的数列之间, 故必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. □

命题 1.2 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 亦存在, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right|.$$

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时有

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

于是由三角不等式, 得

$$||x_n| - |A|| \leq |x_n - A| < \varepsilon.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |A|$. □

注意, 命题 1.2 的逆命题不成立. 但如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

命题 1.3 (有界性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则数列 $\{x_n\}$ 是有界的, 即存在常数 $M > 0$, 使得

$$|x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

证明 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 按极限的定义, 必有 N , 使得

$$|x_n - A| < 1, \quad \text{当 } n > N,$$

从而

$$|x_n| < |A| + 1, \quad \text{当 } n > N.$$

令 $M = \sum_{k=1}^N |x_k| + |A| + 1$, 便有

$$|x_n| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots.$$

这就表明 $\{x_n\}$ 是有界的. □

推论 1.1 任何无界数列均无极限.

例 1.7 数列 $\{n\}$ 发散, 因为 $\{n\}$ 无界.

命题 1.4 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 且 $A > B$, 则必存在正整数 N , 使得

$$x_n > y_n, \quad \forall n > N.$$

证明 由极限的定义可知, 存在正整数 N_1 和 N_2 , 使得

$$|x_n - A| < \frac{A - B}{2}, \quad \forall n > N_1,$$

$$|y_n - B| < \frac{A - B}{2}, \quad \forall n > N_2.$$

特别地, 我们有

$$x_n > \frac{A + B}{2}, \quad \forall n > N_1,$$

$$y_n < \frac{A + B}{2}, \quad \forall n > N_2.$$

取 $N = N_1 + N_2$, 则当 $n > N$ 时有

$$x_n > \frac{A + B}{2} > y_n. \quad \square$$

推论 1.2 (保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > (<)0$, 则必存在正整数 N , 使得

$$x_n > (<)0, \quad \forall n \geq N.$$

推论 1.3 (保序性) 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为两个数列, 满足下述条件:

$$x_n \leq y_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

其中 N_0 是一已知正整数. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则 $A \leq B$.

推论 1.4 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B \neq 0$, 则必存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时

$$|y_n| > \frac{|B|}{2}.$$

证明 由命题 1.2 和命题 1.4 直接可得. □

命题 1.5 (四则运算) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = AB.$$

如果 $B \neq 0$, 则还有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

特别地,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c x_n) = cA, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{B},$$

其中 c 为常数.

证明 (i) 先考虑加减法运算, 以加法为例. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 故有 N_1 和 N_2 , 使得

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{当 } n > N_1,$$

$$|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{当 } n > N_2.$$

令 $N = N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时, 就有

$$\begin{aligned} & |(x_n + y_n) - (A + B)| \\ & \leq |x_n - A| + |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

按定义知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B$.

(ii) 再考虑乘法运算. 首先, 注意

$$\begin{aligned} |x_n y_n - AB| &= |x_n y_n - A y_n + A y_n - AB| \\ &\leq |y_n| \cdot |x_n - A| + |A| \cdot |y_n - B|. \end{aligned}$$

由命题 1.3 知数列 y_n 有界, 即有 $M > 0$, 使得

$$|y_n| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 故有 N_1 和 N_2 , 使得

$$\begin{aligned} |x_n - A| &< \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \text{当 } n > N_1, \\ |y_n - B| &< \frac{\varepsilon}{2|A| + 1}, \quad \text{当 } n > N_2. \end{aligned}$$

令 $N = N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时, 就有

$$|x_n y_n - AB| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

按定义知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = AB$.

(iii) 最后考虑商的运算. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B \neq 0$, 所以由命题 1.4 的推论知有 N_1 , 使得

$$|y_n| > \frac{|B|}{2}, \quad \text{当 } n > N_1.$$

于是

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - y_n|}{|B y_n|} \leq \frac{2}{B^2} |y_n - B|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 故有 N_2 使得

$$|y_n - B| < \frac{B^2 \varepsilon}{2}, \quad \text{当 } n > N_2.$$

令 $N = N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon.$$

按定义知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{B}$. 再由 (ii) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

□