数 学 分 析

（第一册）

严子谦 尹景学 张 然

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是为适应数学学科本科生教学、面向 21 世纪进行改革的需要，结合作者多年来教学实践的经验、体会编写而成的．作者从内容的安排、思维方法的训练等方面进行改革，作了一些有益的尝试．

本书为第一册，主要内容包括数列极限、函数极限、函数的连续性、导数与微分、中值定理与 Taylor 公式、不定积分与定积分、数项级数、广义积分、函数级数以及 Fourier 级数．

本书可作为高等学校理科及师范学校数学学科各专业的教科书，也可供计算机学科、力学、物理学科各专业选用及社会读者阅读．

序 言

本书是国家理科基地创名牌课程项目的研究成果，是根据我国现行《数学分析》教学大纲编写的，适用于高等学校中与数学和应用数学有关的各类专业。

本书是在江泽坚，周光亚，吴智泉编，人民教育出版社出版的，署名吉林大学数学系（实为江泽坚，吴智泉，刘隆复，潘吉勋，严子谦等）编，高等教育出版社出版的以及吴智泉，严子谦，崔志勇编，吉林大学出版社出版的三套《数学分析》教材的基础上，集编者们十几年以至几十年的教学经验，编写而成的。

作为一门基础课，《数学分析》的基本内容早已基本定型。我们这套教材的主旨，是希望在可接受性和提高学生逻辑思维与计算技能方面有所前进。

我们现实地估计到本书读者的起点，不作过高过难的要求。我们注意从几何直观或实际例子出发引入数学概念，然后用严格的数学语言给出定义，并进行必要的分析，由感性认识到理性认识，由浅入深，逐步展开。

极限概念无疑是《数学分析》中最基本的概念之一。本书就从它开始，在承接中学数学关于数列极限的定义，介绍极限的一些基本性质之后，我们郑重地向读者提出在极限论证和推导过程中不等式思维的作用。稍后我们又引入振幅数列，刻画数列的变化。希望通过这些，帮助读者更好地把握极限这一概念，更简洁地处理有关极限的计算与论证。类似的思想在函数的连续性，积分和级数理论中也有所体现。

有关实数理论的一些基本定理（除有限覆盖定理放在第二册开头之外），在本书第一章中即纷纷登场亮相。这会不会成为初学者的“拦路虎”？我们的考虑是，第一，这些内容的融会贯通，不是一天两天的事情，而要靠日积月累。因此，开始要求不必太高，经过多次反复的应用，自会逐渐加深理解。第二，这些定理在不太长的时间内依次出现，可以互为注释，互相补充，互相佐证，有利于更好地把握它们的实质和证明。第三，这些定理在应用中各有短长。一次出齐之后，便于在应用时“各取所需”。

我们在强调把握基本内容，注意逻辑推理的严密性的同时，尽量避免证明特别繁琐的定理。对这类定理，我们通常针对较为特殊的情况给出较为简洁的证明，使读者抓住主要矛盾所在。而后对一般情况给出或简或详的提示。

大体上说，我们在一元微积分部分，在注重解题技巧的同时，也很注重培养读者的逻辑推理能力，特别强调逻辑的严密性，而在多元微积分部分则更多地注重计算技能的训练。这是因为，第一，有些东西（例如积分的存在性），在一元部分已有详尽的讨论，到多元部分只不过“依样画葫芦”，倒不如从简。第二，多元部分的有些内容（例如重积分的变量替换和场论中的几个定理），要想对最一般的叙述给出严格的证明，是需要冗长篇幅的。而且对多数教者，学者和读者来说，吃力未必“讨好”。

本书的例题和习题，是经过精心挑选而配置的。这方面的主要考虑，一是帮助读者获得解题的切实训练，掌握解决各种典型问题的基本技巧；一是注意有实际背景的问题和应用性问题，锻炼和提高读者解决实际问题的能力。

伍卓群教授和李荣华教授都曾阅读过本书的初稿，他们对本书的最后完成提出了许多宝贵的意见，在此谨向他们表示衷心的感谢. 感谢尹丽博士，她演算了本书大部分习题. 感谢黄锐、刘强、王敬、李颖花、芦碧波和柴世民等研究生，他们对本书初稿的排版付出了许多辛苦的劳动. 同时还要感谢吉林大学数学学院基地班的部分同学，他们阅读了本书的初稿，提出了许多有价值的参考意见. 我们还要特别感谢高等教育出版社王瑜、李陶等有关同志对本书的出版所给予的关注和支持.

本书虽经实际授课使用和多次修改，错误和缺陷仍在所难免，敬请读者批评指正.

编者

2004 年春于长春

目 录

第一章　数列极限

数学分析课程的基本内容, 就是用极限的观点去观察函数的变化特征, 计算某些重要的量, 例如导数和积分. 因此, 极限理论在数学分析中起着基础的作用. 数列的极限是所有各种极限中较为简单的一种. 我们的讨论就从它开始.

在第一章中, 我们将介绍数列极限的定义与基本性质, 极限论证中常须依据的某些原理和某些常用的基本技巧.

在本书中, 如无特殊声明, 凡称数都指实数, 全体实数所构成的集合记为 $\mathbb{R}$. 我们还用 $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 分别表示全体自然数, 正整数, 整数和有理数所构成的集合.

§1　数列极限的定义和基本性质

本节给出数列极限的精确定义, 并介绍数列极限的一些重要性质, 包括夹挤定理和极限的四则运算等. 这些都是我们今后掌握微积分理论所必不可少的基础知识.

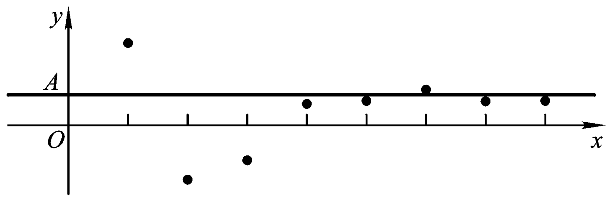
1.1　数列极限的定义

定义 1.1 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, A 为一个给定实数. 如果对于任意给定的正数 ε, 都存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 就有

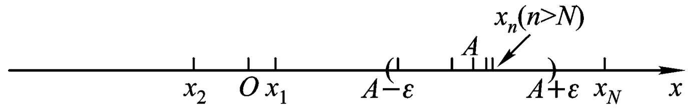
$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限, 或 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

直观上就是, 当 n 无限增大时, x_n 无限接近 A. 几何上, 放在 xOy 平面上来看, 就是当 n 越来越大的时候, 点 (n, x_n) 与直线 $y = A$ 的距离就越来越接近.



如果放在 x 轴上来看, 就是对任给的 $\varepsilon > 0$, 都只有有限项 x_n 位于区间 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 之外.



命题 1.1 如果一个数列有极限，则极限是唯一的.

证明 设数列 $\{x_n\}$ 既以 A 为极限，又以 B 为极限. 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 和 N_2, 使得

$$|x_n - A| < \varepsilon, \quad 当\ n > N_1,$$
$$|x_n - B| < \varepsilon, \quad 当\ n > N_2.$$

令 $N = N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时，以上两式都成立，因而有

$$|A - B| = |A - x_n + x_n - B| \le |x_n - A| + |x_n - B| < 2\varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $A - B = 0$, 即 $A = B$. □

通常，如果数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，则记成

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,$$

或

$$x_n \to A(n \to \infty).$$

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，我们就称该数列是发散的. 我们将讨论数列收敛与发散的问题统称为数列的敛散性.

例 1.1 设 $\{x_n\}$ 为一常数数列，即对任何 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x_n = C$, C 为常数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证明 对任意给定的正数 ε, 都有

$$|x_n - C| = 0 < \varepsilon, \quad \forall n \ge 1.$$

(此处以及以后，记号 “ $\forall$ ” 表示 “对任意”.) 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$. □

例 1.2 设 r 为满足 $|r| < 1$ 的数. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

证明 若 $r = 0$, 结论显然成立. 故不妨设 $r \ne 0$. 对于任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$ (此处以及以后，记号 “ $\in$ ” 表示 “属于”), 取正整数 $N = \left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|r|}\right] + 1$(符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), 则当 $n > N$ 时，有 $n > \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|r|}$, 从而

$$|r^n| = 10^{n\lg|r|} < 10^{(\lg\varepsilon/\lg|r|)\lg|r|} = \varepsilon.$$

按定义，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$. □

例 1.3 设 k 为一正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^{1/k}}\right] + 1$, 则当 $n > N$ 时，有 $n > \dfrac{1}{\varepsilon^{1/k}}$, 从而

$$\frac{1}{n^k} < \left(\varepsilon^{1/k}\right)^k = \varepsilon.$$

按定义，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$. □

例 1.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\lg n} = 0$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N = [10^{1/\varepsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时，有

$$\frac{1}{\lg n} < \frac{1}{\lg 10^{1/\varepsilon}} = \varepsilon.$$

按定义，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\lg n} = 0$. □

注 1.1 从例 1.4 的证明可以看出，对任何 $a > 0$, $a \neq 1$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log_a n} = 0$. 特别地，当 a 为自然对数的底 e 时，结论成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$. 关于自然对数的底的定义，我们会在后面给出.

例 1.5 证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

证明 用反证法. 假设 $A = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 存在. 则存在正整数 N, 使 $n > N$ 时，有

$$|(-1)^n - A| < 1.$$

但是，容易看出，若 $A \geq 0 (\leq 0)$, 该式对奇 (偶) 数 n 显然不成立. □

1.2 数列极限的基本性质

定理 1.1 （夹挤定理）设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 为三个数列，满足下述条件:

$$y_n \leq x_n \leq z_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

其中 N_0 为一已知正整数. 如果对某个常数 A, 有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

证明 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, 故有 N_1 和 N_2, 使得

$$|y_n - A| < \varepsilon, \quad 当\ n > N_1,$$
$$|z_n - A| < \varepsilon, \quad 当\ n > N_2,$$

亦即有

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon, \quad 当\ n > N_1,$$
$$A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon, \quad 当\ n > N_2.$$

令 $N = N_0 + N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时，就有

$$A - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < A + \varepsilon,$$

从而

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

按定义知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. □

注 1.2 作为定理 1.1 的特例：若 $|x_n| \leq y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

例 1.6 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

解 记 $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$. 容易看出，对任何正整数 n, 都有

$$0 \leq x_n \leq \frac{4}{n}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n} = 0$, 上述不等式表明， x_n 介于两个都趋于零的数列之间，故必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. □

命题 1.2 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$ 亦存在，且

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |\lim_{n\to\infty} x_n|.$$

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时有

$$|x_n - A| < \varepsilon.$$

于是由三角不等式，得

$$||x_n| - |A|| \leq |x_n - A| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |A|$. □

注意，命题 1.2 的逆命题不成立. 但如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

命题 1.3 （有界性）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则数列 $\{x_n\}$ 是有界的，即存在常数 $M>0$, 使得

$$|x_n|\le M,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 按极限的定义，必有 N, 使得

$$|x_n-A|<1,\quad 当\ n>N,$$

从而

$$|x_n|<|A|+1,\quad 当\ n>N.$$

令 $M=\sum\limits_{k=1}^{N}|x_k|+|A|+1$, 便有

$$|x_n|\le M,\quad n=1,2,\cdots.$$

这就表明 $\{x_n\}$ 是有界的. □

推论 1.1 任何无界数列均无极限.

例 1.7 数列 $\{n\}$ 发散，因为 $\{n\}$ 无界.

命题 1.4 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$, 且 $A>B$, 则必存在正整数 N, 使得

$$x_n>y_n,\qquad \forall n>N.$$

证明 由极限的定义可知，存在正整数 N_1 和 N_2, 使得

$$|x_n-A|<\frac{A-B}{2},\quad \forall n>N_1,$$
$$|y_n-B|<\frac{A-B}{2},\quad \forall n>N_2.$$

特别地，我们有

$$x_n>\frac{A+B}{2},\quad \forall n>N_1,$$
$$y_n<\frac{A+B}{2},\quad \forall n>N_2.$$

取 $N=N_1+N_2$, 则当 $n>N$ 时有

$$x_n>\frac{A+B}{2}>y_n.$$

□

推论 1.2 （保号性）如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > (<)0$, 则必存在正整数 N, 使得

$$x_n > (<)0, \quad \forall n \geq N.$$

推论 1.3 （保序性）设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 为两个数列，满足下述条件：

$$x_n \leq y_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

其中 N_0 是一已知正整数．如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则 $A \leq B$.

推论 1.4 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \neq 0$, 则必存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时

$$|y_n| > \frac{|B|}{2}.$$

证明 由命题 1.2 和命题 1.4 直接可得. □

命题 1.5 （四则运算）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B, \quad \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = AB.$$

如果 $B \neq 0$, 则还有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

特别地,

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = cA, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{B},$$

其中 c 为常数.

证明 (i) 先考虑加减法运算, 以加法为例. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 故有 N_1 和 N_2, 使得

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{当 } n > N_1,$$
$$|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{当 } n > N_2.$$

令 $N = N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时，就有

$$\begin{aligned}&|(x_n + y_n) - (A + B)|\\ \leq &|x_n - A| + |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

按定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B$.

(ii) 再考虑乘法运算．首先，注意

$$\begin{aligned}|x_ny_n - AB| &= |x_ny_n - Ay_n + Ay_n - AB|\\ &\le |y_n|\cdot|x_n - A| + |A|\cdot|y_n - B|.\end{aligned}$$

由命题 1.3 知数列 y_n 有界，即有 $M > 0$, 使得

$$|y_n| \le M, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 故有 N_1 和 N_2, 使得

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad 当\ n > N_1,$$
$$|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A| + 1}, \quad 当\ n > N_2.$$

令 $N = N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时，就有

$$|x_ny_n - AB| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

按定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n) = AB$.

(iii) 最后考虑商的运算．因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \ne 0$, 所以由命题 1.4 的推论知有 N_1, 使得

$$|y_n| > \frac{|B|}{2}, \quad 当\ n > N_1.$$

于是

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - y_n|}{|By_n|} \le \frac{2}{B^2}|y_n - B|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 故有 N_2 使得

$$|y_n - B| < \frac{B^2\varepsilon}{2}, \quad 当\ n > N_2.$$

令 $N = N_1 + N_2$. 于是当 $n > N$ 时，就有

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon.$$

按定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{B}$. 再由 (ii) 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{A}{B}.$$

□