高等学校教材

数学分析

(第二版)

下册

华东师范大学数学系　编

高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内容提要

本书第一版于 1987 年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获全国优秀奖。第二版是在此基础上并总结近年来的教学实践以及国外教材研究成果修订而成,使全书内容更充实、结构更合理。

本书分上、下册出版。

下册内容:数项级数、函数列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、向量函数微分学、重积分、重积分(续)与含参量非正常积分、曲线积分与曲面积分。

本书可作为高等师范院校或综合大学数学专业教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(第二版)下册 华东师范大学数学系编 . —2 版 . —北京:高等教育出版社,1991 .10(2003 重印)
ISBN 7 - 04 - 003500 - 6

Ⅰ 数… Ⅱ .华… Ⅲ 数学分析 Ⅳ .017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 00838 号

数学分析(第二版)下册
华东师范大学数学系 编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网 址	http: www .hep .edu .cn
传 真	010 - 64014048		http: www .hep .com .cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
		版 次	1981 年 6 月第 1 版
开 本	850×1168 1 32		1991 年 10 月第 2 版
印 张	13 .875	印 次	2003 年 月第 次印刷
字 数	333 000	定 价	13 .30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址:

电　　话:(010)84043279　13801081108

传　　真:(010)64033424

E - mail:dd@hep.com.cn

地　　址:北京市东城区沙滩后街 55 号

邮　　编:100009

目　　录

第十二章　数 项 级 数

§1　级数的收敛性 …… 1
§2　正项级数 …… 8
一　正项级数收敛性的一般判别原则　(8)
二　比式判别法与根式判别法　(10)
三　积分判别法　(16)　*四　拉贝判别法　(18)
§3　一般项级数 …… 21
一　交错级数　(21)　二　绝对收敛级数及其性质　(22)
三　阿贝耳判别法与狄利克雷判别法　(28)

第十三章　函数列与函数项级数

§1　一致收敛性 …… 33
一　函数列及其一致收敛性　(33)
二　函数项级数及其一致收敛性　(39)
三　函数项级数的一致收敛性判别法　(41)
§2　一致收敛函数列与函数项级数的性质 …… 46

第十四章　幂　级　数

§1　幂级数 …… 55
一　幂级数的收敛区间　(55)　二　幂级数的性质　(60)
三　幂级数的运算　(62)
§2　函数的幂级数展开 …… 66
一　泰勒级数　(66)　二　初等函数的幂级数展开式　(68)
*§3　指数函数与三角函数 …… 74
一　指数函数　(74)　二　三角函数　(76)

三　复变量的指数函数·欧拉公式　(77)

第十五章　傅里叶级数

§1　傅里叶级数 …… 81
一　三角级数·正交函数系　(81)
二　以 2π 为周期的函数的傅里叶级数　(83)
三　收敛定理　(85)
§2　以 2*l* 为周期的函数的展开式 …… 93
一　以 2*l* 为周期的函数的傅里叶级数　(93)
二　偶函数与奇函数的傅里叶级数　(95)
§3　收敛定理的证明 …… 101

第十六章　多元函数的极限与连续

§1　平面点集与多元函数 …… 110
一　平面点集　(110)　二　$\boldsymbol{R}^2$ 上的完备性定理　(114)
三　二元函数　(118)　四　*n* 元函数　(119)
§2　二元函数的极限 …… 121
一　二元函数的极限　(121)
二　累次极限　(126)
§3　二元函数的连续性 …… 130
一　二元函数的连续性概念　(130)
二　有界闭域上连续函数的性质　(133)

第十七章　多元函数微分学

§1　可微性 …… 139
一　可微性与全微分　(139)　二　偏导数　(140)
三　可微性条件　(143)　四　可微性的几何意义与应用　(147)
§2　复合函数微分法 …… 154
一　复合函数的求导法则　(154)　二　复合函数的全微分　(159)
§3　方向导数与梯度 …… 162

需要全本请访问 www.ertongbook.com

§4 泰勒公式与极值问题 …… 166
一 高阶偏导数 (166) 二 中值定理和泰勒公式 (172)
三 极值问题 (176)

第十八章 隐函数定理及其应用

§1 隐函数 …… 187
一 隐函数概念 (187) 二 隐函数存在性条件的分析 (188)
三 隐函数定理 (190) 四 隐函数求导举例 (194)
§2 隐函数组 …… 198
一 隐函数组概念 (198) 二 隐函数组定理 (198)
三 反函数组与坐标变换 (201)
§3 几何应用 …… 206
一 平面曲线的切线与法线 (207)
二 空间曲线的切线与法平面 (208)
三 曲面的切平面与法线 (211)
§4 条件极值 …… 213

* 第十九章 向量函数微分学

§1 n 维欧氏空间与向量函数 …… 223
一 n 维欧氏空间 (223) 二 向量函数 (226)
三 向量函数的极限与连续 (227)
§2 向量函数的微分 …… 232
一 可微性与可微条件 (232) 二 可微函数的性质 (237)
三 海赛矩阵与极值 (241)
§3 隐函数定理与反函数定理 …… 245
一 隐函数定理 (245) 二 反函数定理 (250)
三 拉格朗日乘数法 (252)

第二十章 重 积 分

§1 二重积分概念 …… 257

一　矩形区域上的二重积分　(257)
二　二重积分的可积条件　(259)
三　一般区域上的二重积分　(261)
§2　二重积分的计算 …… 265
一　化二重积分为累次积分　(265)　二　二重积分换元法　(273)
三　含参量积分的导数　(282)
§3　三重积分 …… 289
一　三重积分概念　(289)　二　化三重积分为累次积分　(291)
三　三重积分换元法　(295)
§4　重积分的应用 …… 301
一　曲面的面积　(301)　二　重心　(305)
三　转动惯量　(307)　四　引力　(310)

第二十一章　重积分(续)与含参量非正常积分

§1　二重积分中一些问题的讨论 …… 315
一　二重积分的可积性问题　(315)
二　二重积分变量变换定理　(321)
*§2　n 重积分 …… 328
§3　含参量非正常积分 …… 335
一　含参量非正常积分　(335)　二　欧拉积分　(344)

第二十二章　曲线积分与曲面积分

§1　第一型曲线积分与第一型曲面积分 …… 354
一　第一型曲线积分与第一型曲面积分概念　(354)
二　第一型曲线积分与第一型曲面积分的计算　(356)
§2　第二型曲线积分 …… 363
一　第二型曲线积分概念　(363)
二　第二型曲线积分的计算　(366)
*三　两类曲线积分的联系　(370)
§3　格林公式·曲线积分与路线的无关性 …… 372

一　格林公式　(372)　二　曲线积分与路线的无关性　(377)
§4　第二型曲面积分 …… 383
一　曲面的侧　(383)　二　第二型曲面积分概念　(384)
三　第二型曲面积分的计算　(387)
*四　两类曲面积分的联系　(390)
§5　高斯公式与斯托克斯公式 …… 392
一　高斯公式　(392)　二　斯托克斯公式　(395)
*§6　场论初步 …… 401
一　场的概念　(401)　二　梯度场　(402)
三　散度场　(403)　四　旋度场　(405)
五　管量场与有势场　(407)
习题答案 …… 413
索引 …… 432
人名索引 …… 436

第十二章　数 项 级 数

§1　级数的收敛性

读者已经在初等数学中知道:有限个实数 u_1, u_2, …, u_n 相加,其结果是一个实数.本章将讨论“无限个实数相加”所可能出现的情形及其有关特性.例如,在第二章提到《庄子·天下篇》“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”的例中,把每天截下那一部分的长度“加”起来:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

这就是“无限个数相加”的一个例子.从直观上可以看到,它的和是 1.再如下面由“无限个数相加”的表达式

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots$$

中,如果将它写作

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots,$$

其结果无疑是 0,如写作

$$1+((-1)+1)+((-1)+1)+\cdots=1+0+0+\cdots,$$

其结果则是 1.因此两个结果完全不同.由此提出这样的问题:“无限个数相加”是否存在“和”;如果存在,“和”等于什么?可见,“无限个数相加”不能简单地引用有限个数相加的概念,而须建立它本身严格的理论.

定义 1　给定一个数列$\{u_n\}$,对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称为数项级数或无穷级数(也常简称级数),其中 u_n 称数项级数

(1)的通项 .

数项级数(1)也常写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 或简单写作} \sum u_n \ .$$

数项级数(1)的前 n 项之和,记为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n , \tag{2}$$

称它为数项级数(1)的第 ***n*** 个部分和,也简称部分和 .

定义 2 若数项级数(1)的部分和数列$\{S_n\}$收敛于 S(即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$),则称数项级数(1)收敛,称 S 为数项级数(1)的和,记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad \text{或} \quad S = \sum u_n \ .$$

若$\{S_n\}$是发散数列,则称数项级数(1)发散 .

例如:由数列 $\frac{1}{2^n}$ 所产生的数项级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{3}$$

的第 n 个部分和 $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 ,$$

所以数项级数(3)收敛,而且它的和等于 1 .

数项级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots \tag{4}$$

的部分和数列

$$S_n = \begin{cases} 1, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots$$

显然这个数列是发散的,因此数项级数(4)发散 .

再考察一个例子 .

例 1　讨论数项级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots \tag{5}$$

的收敛性 .

解　级数(5)的第 n 个部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \\ &= 1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以级数(5)收敛,且

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1 .$$

由于级数(1)的收敛或发散(简称敛散性)是由它的部分和数列$\{S_n\}$来确定,因而也可把级数(1)作为数列$\{S_n\}$的另一种表现形式 .反之,任给一个数列$\{a_n\}$,如果把它看作某一数项级数的部分和数列,则这个数项级数就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+\cdots . \tag{6}$$

这时数列$\{a_n\}$与级数(6)具有相同的敛散性,当$\{a_n\}$收敛时,其极限值就是级数(6)的和 .

基于级数与数列的这种关系,读者不难根据数列极限的性质推出下面有关级数的一些定理 .

定理 12 .1(级数收敛的柯西准则)　级数(1)收敛的充要条件是:任给正数 ε,总存在自然数 N,使得当 $m>N$ 和任意的自然数 p,都有

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} | < \varepsilon . \tag{7}$$

根据定理 12 .1,我们立刻可写出级数(1)发散的充要条件:存在某正数 ε_0,对任何自然数 N,总存在自然数 $m_0 (> N)$和 p_0,有

$$| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} | \geq \varepsilon_0 . \tag{8}$$

由定理 12 .1 立即可得如下推论,它是级数收敛的一个必要条件 .

推论　若级数(1)收敛,则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 .$$

例 2　讨论调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的敛散性 .

解　这里调和级数虽然满足推论的结论,即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

但令 $p = m$ 时,却有

$$\begin{aligned} | u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{2m} | &= \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \\ &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

因此,取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$,对任何自然数 N,只要 $m > N$ 和 $p = m$ 就有(8)式成立 .所以调和级数是发散的 .

例 3　应用级数收敛的柯西准则证明级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 的收敛性,

证　由于

$$| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} |$$

$$= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+p)^2}$$

$$< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(m+p-1)(m+p)}$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+p-1} - \frac{1}{m+p}$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p} < \frac{1}{m}.$$

因此,对任给正数 ε,取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$ ①,使得当 $m > N$ 及任何自然数 p,由上式就有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

依定理 12.1 推得级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

定理 12.2 若级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛,c, d 是常数,则由它们的项的线性组合所得到的级数 $\sum (cu_n + dv_n)$ 也收敛,且

$$\sum (cu_n + dv_n) = c\sum u_n + d\sum v_n.$$

定理 12.3 去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

由定理 12.1,级数 $\sum u_n$ 的敛散性取决于:对任给正数 ε,是否存在充分大的正数 N,使得当 $n > N$ 及自然数 p 恒有(7)式成立.由此可见,一个级数是否收敛与级数前面有限项的取值无关.

由此定理知道,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和为 S,则级数

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \tag{9}$$

也收敛,且其和为 $R_n = S - S_n$. (9)式称为级数 $\sum u_n$ 的第 n 个余

① N 也可取正数 $\frac{1}{\varepsilon}$,因为大于正数 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的自然数,也必大于 $\frac{1}{\varepsilon}$. 因此,今后我们对极限定义中的 N,将不必再局限于自然数,也可取适当的正数.

项(或简称余项),它表示以部分和 S_n 代替 S 时所产生的误差 .

定理 12.4 在收敛级数的项中任意加括号,既不改变级数的收敛性,也不改变它的和 .

证 设 $\sum u_n$ 为收敛级数,其和为 S .记

$$v_1 = u_1 + \cdots + u_{n_1}, v_2 = u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}, \cdots$$

$$v_k = u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}, \cdots .$$

现在证明 $\sum v_k$ 也收敛,且其和也是 S .事实上,设 $\{S_n\}$ 为收敛级数 $\sum u_n$ 的部分和数列,则级数 $\sum v_k$ 的部分和数列 $\{S_{n_k}\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子列 .由于 $\{S_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.故由子列性质(定理 2.8) $\{S_{n_k}\}$ 也收敛,且 $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$,即级数 $\sum v_n$ 收敛,它的和也等于 S .

注意:从级数加括号后的收敛性,不能推断它在未加括号前也收敛 .例如

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots+0+\cdots = 0$$

收敛,但级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

却是发散的(因为它不满足定理 12.1 的推论) .

习 题

1 .试讨论几何级数(也称为等比级数)

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性 .

2 .证明下列级数的收敛性,并求其和数:

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6} + \dfrac{1}{6\cdot 11} + \dfrac{1}{11\cdot 16} + \cdots + \dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$;

(2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n} + \cdots$;

(3) $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum\frac{2n-1}{2^n}$.

3. 证明:若级数$\sum u_n$发散,$c\neq 0$,则$\sum cu_n$也发散.

4. 设级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都发散.试问$\sum(u_n+v_n)$一定发散吗?又若u_n与v_n($n=1,2,\cdots$)都是非负数,则能得出什么结论?

5. 证明:若数列$\{a_n\}$收敛于a,则级数$\sum(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

6. 证明:若数列$\{b_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$,则

(1) 级数$\sum(b_{n+1}-b_n)$发散;

(2) 当$b_n\neq 0$时,级数$\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

7. 应用第5,6题的结果求下列级数的和:

(1) $\sum\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;

(2) $\sum(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

8. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$;　　(2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;　　(4) $\sum\frac{1}{n+\sqrt{n^2}}$.

---

9. 证明级数$\sum u_n$收敛的充要条件是:任给正数ε,存在某自然数N,对一切$n>N$总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon.$$

10. 举例说明:若级数$\sum u_n$对每一个自然数p满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

则这级数不一定收敛.

§2 正项级数

一 正项级数收敛性的一般判别原则

若数项级数各项的符号都相同,则称它为同号级数.对于同号级数,只须研究各项都是由正数组成的级数——称为正项级数.如果级数的各项都是负数,则它乘以 -1 后就得到一个正项级数,并由定理 12.2 及上节习题 3 可知,它们具有相同的敛散性.

定理 12.5 正项级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛的充要条件是:部分和数列$\{S_n\}$有界,即存在某正数 M,对一切自然数 n 有 $S_n < M$.

证 由于 $u_i > 0 (i = 1, 2, \cdots)$,所以$\{S_n\}$是递增数列.而单调数列收敛的充要条件是该数列有界(单调有界定理(定理 2.9)).这就证得本定理的结论.

定理 12.6(比较原则) 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数,如果存在某正数 N,对一切 $n > N$ 都有

$$u_n \leq v_n, \tag{1}$$

那么

(i) 若级数 $\sum v_n$ 收敛,则级数 $\sum u_n$ 也收敛;

(ii) 若级数 $\sum u_n$ 发散,则级数 $\sum v_n$ 也发散.

证 因为改变级数的有限项并不影响原有级数的敛散性,因此不妨设不等式(1)对一切自然数 n 都成立.

现分别以 S_n'与 S_n''记级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 的部分和.由(1)式推得,对一切自然数 n,都有

$$S_n' \leq S_n''. \tag{2}$$

若 $\sum v_n$ 收敛,即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n''$存在.则由(2)式对一切 n 有 $S_n' \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n''$,

即正项级数 $\sum u_n$ 的部分和数列 $\{S_n'\}$ 有界，由定理 12.5 级数 $\sum u_n$ 收敛．这就证明了(i)；(ii)为(i)的逆否命题，自然成立．

例 1 考察级数 $\sum \frac{1}{n^2 - n + 1}$ 的收敛性．

解 由于当 $n \geq 2$ 时，有

$$\frac{1}{n^2 - n + 1} \leq \frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

因为正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ 收敛(§1 例 3)，故由定理 12.6 和 12.3，级数 $\sum \frac{1}{n^2 - n + 1}$ 也收敛．

在实际使用上，比较原则的下述极限形式常常更为方便．

推论 设

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{3}$$

和

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{4}$$

是两个正项级数．若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \tag{5}$$

则

(i) 当 $0 < l < +\infty$ 时，级数(3)、(4)同时收敛或同时发散；

(ii) 当 $l = 0$ 且级数(4)收敛时，级数(3)也收敛；

(iii) 当 $l = +\infty$ 且级数(4)发散时，级数(3)也发散．

证 由(5)，对任给正数 ε，存在某正数 N，当 $n > N$ 时，恒有

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon$$

或

$$(l - \varepsilon) v_n < u_n < (l + \varepsilon) v_n . \tag{6}$$

由定理 12.6 及(6)式推得，当 $0 < l < +\infty$(这里设 $\varepsilon < l$)时，级数(3)与(4)同时收敛或同时发散．这就证得(i)．

对于(ii)，当 $l = 0$ 时，由(6)式右半部分及比较原则可得：若级

需要全本请访问 www.ertongbook.com