高等学校教材

数学分析

（第二版）

上册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 朱学炎 欧阳光中 编

高等教育出版社

需要全本请访问 www.ertongbook

本书系在 1979 年第一版基础上的修订版. 作者根据近几年来教学实践作了修订. 这次修订除了文字和内容上的勘误外,主要是为了适应教学的需要,调动了部分章节的次序,并且对定积分一章作了较大修改. 此外,原第一版书中第十章 § 8 向量值函数的导数一节改为附录放在书末. 本书为上册. 内容有 :1. 极限论 :包括变量与函数、数列极限、函数的极限与连续等 ;2. 单变量微分学 :包括导数与微分、微分学基本定理及其应用等 ;3. 单变量积分学 :包括不定积分、定积分及其应用等.

本书可作为综合大学和师范院校数学系的教材.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(第二版)上册/陈传璋等编. —2 版. —北京 :高等教育出版社,1983.7 (2002 重印)
ISBN 7-04-001208-1

Ⅰ.数… Ⅱ.陈… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 27624 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http ://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http ://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	中国科学院印刷厂		
		版　　次	1978 年 5 月第 1 版
开　　本	850×1168　1/32		1983 年 7 月第 2 版
印　　张	11	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	260 000	定　　价	10.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有　侵权必究

第一版前言

本书是以我校数学系主编的《数学分析》上、下册(上海科学技术出版社 1962 年出版)为基础,由原编者[①]编写的,仍分上、下两册出版. 可作为综合大学和师范院校数学系的数学分析课教材,也可作为理工科其他有关专业的教学参考书.

按照一九七七年十月理科数学教材会议精神,本书基本上以 220 学时为限度,因而在内容上作了一些精简. 但为了适应各校的不同要求和学生的不同水平,本书也编入了一些选学内容(标有"*"的节以及相应的习题).

在内容顺序的安排上,作了较大的变动,主要是把单变量情形和多变量情形分开,关于极限理论,虽然极限初论、续论以及多变量情形都安排在第一篇里,但分成独立的三部分,其余各篇也都分成两个部分,这样既可以照顾到一定的系统性,同时又希望在实际教学中便于教师灵活掌握,以适应不同的要求. 例如第一篇第二部分极限续论在什么时候讲,至少有两种可供选择的不同方案:一种是讲完第一篇第一部分极限初论后,紧接着讲第二篇单变量微积分学,然后再讲极限续论和多元函数的极限论;另一种是按本书的章节次序讲. 又如第四篇第一部分数项级数和广义积分,既可以按本书次序讲,也可以挪前到单变量微积分学之后,多变量微积分学之前讲. 以上所说的各种方案,在复旦大学数学系的实际教学中都曾作过尝试.

参加审查本书的单位有:吉林大学(主审),四川大学,北京师

① 原编者胡家赣同志已调离复旦大学,此次未参加编写.

范大学，云南大学，内蒙古大学，北京师范学院，江苏师范学院．参加审稿的同志对本书进行了认真的审阅，提出了许多宝贵的意见，我们表示衷心的感谢．

由于我们水平有限，编写时间又较匆促，一定还存在不少缺点和错误，殷切期待读者给予批评指正．

编　　者

一九七八年十二月

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权. 任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》. 行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任. 社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员.

现公布举报电话及通讯地址:

电　　话:(010) 84043279　13801081108

传　　真:(010) 64033424

E - mail:dd@hep.com.cn

地　　址:北京市东城区沙滩后街 55 号

邮　　编:100009

需要全本请访问 www.ertongbook

目　　录

第一篇　极　限　论

第一部分　极 限 初 论

第一章　变量与函数 …… 1
§1. 函数的概念 …… 1
一、变量 …… 1
二、函数 …… 2
三、函数的一些几何特性 …… 8
习题 …… 10
§2. 复合函数和反函数 …… 14
一、复合函数 …… 14
二、反函数 …… 16
习题 …… 19
§3. 基本初等函数 …… 20
习题 …… 26
第二章　极限与连续 …… 27
§1. 数列的极限和无穷大量 …… 27
一、数列极限的定义 …… 27
二、数列极限的性质 …… 33
三、数列极限的运算 …… 38
四、单调有界数列 …… 43
五、无穷大量的定义 …… 46
六、无穷大量的性质和运算 …… 48
习题 …… 50
§2. 函数的极限 …… 54
一、函数在一点的极限 …… 54
二、函数极限的性质和运算 …… 57

三、单侧极限 …… 62
四、函数在无限远处的极限 …… 64
五、函数值趋于无穷大的情形 …… 67
六、两个常用的不等式和两个重要的极限 …… 70
习题 …… 72
§3. 连续函数 …… 76
一、连续的定义 …… 76
二、连续函数的性质和运算 …… 78
三、初等函数的连续性 …… 81
四、不连续点的类型 …… 83
五、闭区间上连续函数的性质 …… 85
习题 …… 90
§4. 无穷小量和无穷大量的阶 …… 92
习题 …… 94

第二部分　极 限 续 论

第三章　关于实数的基本定理及闭区间上连续函数性质的证明 …… 95
§1. 关于实数的基本定理 …… 95
一、子列 …… 95
二、上确界和下确界 …… 97
三、区间套定理 …… 102
四、致密性定理 …… 103
五、柯西收敛原理 …… 105
六、有限覆盖定理 …… 107
习题 …… 109
§2. 闭区间上连续函数性质的证明 …… 110
一、有界性定理 …… 110
二、最大(小)值定理 …… 112
三、零点存在定理 …… 114
四、反函数连续性定理 …… 115
五、一致连续性定理 …… 116
习题 …… 119

第二篇　单变量微积分学

第一部分　单变量微分学

第四章　导数与微分 …… 120
§1. 导数的引进与定义 …… 120
一、导数的引进 …… 120
二、导数的定义及几何意义 …… 122
习题 …… 125
§2. 简单函数的导数 …… 125
一、常数的导数 …… 126
二、三角函数的导数 …… 126
三、对数函数的导数 …… 127
四、幂函数的导数 …… 127
习题 …… 129
§3. 求导法则 …… 129
一、导数的四则运算 …… 129
二、反函数的导数 …… 136
习题 …… 141
§4. 复合函数求导法 …… 142
习题 …… 146
§5. 微分及其运算 …… 148
一、微分的定义 …… 148
二、微分的运算法则 …… 150
习题 …… 151
§6. 隐函数及参数方程所表示函数的求导法 …… 152
一、隐函数求导法 …… 152
二、参数方程所表示函数的求导法 …… 154
习题 …… 157
§7. 不可导的函数举例 …… 159
习题 …… 162
§8. 高阶导数与高阶微分 …… 163

一、高阶导数及其运算法则 …… 163
二、高阶微分 …… 170
习题 …… 171
第五章 微分学的基本定理及其应用 …… 174
§1. 中值定理 …… 174
一、费尔马(Fermat)定理 …… 174
二、拉格朗日(Lagrange)定理 …… 175
习题 …… 179
§2. 泰勒公式 …… 180
一、利用导数作近似计算 …… 180
二、泰勒(Taylor)公式 …… 186
习题 …… 192
§3. 函数的升降、凸性与极值 …… 194
一、函数的上升与下降 …… 194
二、函数的极大值与极小值 …… 196
三、函数的最大值和最小值 …… 200
四、函数的凸性 …… 204
习题 …… 213
§4. 平面曲线的曲率 …… 216
一、什么是曲线的曲率 …… 216
二、弧长的微分 …… 219
三、曲率的计算 …… 220
习题 …… 224
§5. 待定型 …… 224
一、$\frac{0}{0}$及$\frac{\infty}{\infty}$待定型 …… 225
二、其他待定型 …… 228
习题 …… 231
§6. 方程的近似解 …… 232
习题 …… 235

第二部分 单变量积分学

第六章 不定积分 …… 236
§1. 不定积分的概念及运算法则 …… 236
一、不定积分的定义 …… 236

二、不定积分的基本公式 …… 237
三、不定积分的运算法则 …… 238
习题 …… 241
§2. 不定积分的计算 …… 242
一、“凑”微分法 …… 242
二、换元积分法 …… 244
三、分部积分法 …… 247
四、有理函数积分法 …… 250
五、其他类型的积分举例 …… 258
习题 …… 264
第七章 定积分 …… 268
§1. 定积分的概念 …… 268
习题 …… 272
§2. 定积分存在的条件 …… 272
一、定积分存在的充分必要条件 …… 272
二、可积函数类 …… 280
习题 …… 283
§3. 定积分的性质 …… 284
习题 …… 289
§4. 定积分的计算 …… 290
一、定积分计算的基本公式 …… 290
二、定积分的换元公式 …… 293
三、定积分的分部积分公式 …… 295
四、杂例 …… 296
五、椭圆积分 …… 298
习题 …… 302
第八章 定积分的应用和近似计算 …… 306
§1. 平面图形的面积 …… 306
习题 …… 310
§2. 曲线的弧长 …… 310
习题 …… 316

§3. 体积 …… 316
习题 …… 319
§4. 旋转曲面的面积 …… 320
习题 …… 322
§5. 质心 …… 323
习题 …… 325
§6. 平均值、功 …… 326
一、平均值 …… 326
二、功 …… 327
习题 …… 330
§7. 定积分的近似计算 …… 330
习题 …… 336
索 引 …… 337

需要全本请访问 www.ertongbook

第一篇　极　限　论

第一部分　极 限 初 论

第一章　变量与函数

§1. 函数的概念

一、变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量，这些量一般可分为两种：一种是在我们所考察的过程中保持不变的量，这种量称为常量. 还有一种是在这一过程中会起变化的量，称为变量. 例如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程中可以看为常量. 再如将一密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数目显然是常量，而气体的温度和压力是变量. 在数学中，我们常抽去变量或常量的具体意义来研究某一过程中这些量在数值上的关系. 但尽管如此，在研究过程中有时还是需要注意它们的具体意义.

这些量，例如时间、质量、压力、温度、分子数等，都可以用实数来表示，所以应该称它们为实变量或实常量. 本书的研究对象都是实变量和实常量. 也简称它们为变量和常量.

在中学代数里已经知道，实数包括有理数和无理数两种. 所有整数、所有分数统称为有理数. 换句话说，凡能表示为$\frac{p}{q}$(这里p，q为整数，$q>0$，并设p和q无公因子)形式的数就是有理数.

除了这种形式的数以外，还存在着不能表示为上述形式的数，如$\sqrt{2}$，圆周率π等等，称为无理数. 关于实数的严密理论，这里不叙述了，仅列举如下几个重要性质，提请读者注意：

(i) 实数和直线上的点有着一一对应的关系，并称这条直线为实数轴. 今后我们将经常利用实数轴上的点来表示实数，而把点和实数统一起来，不加区别.

(ii) 有理数在实数中是稠密的，也就是说，在任何两个不同的实数之间必存在着有理数. 同样无理数也是稠密的，在任何两个不同的实数之间也必存在着无理数.

(iii) 有理数与有理数的和或差仍为有理数. 有理数与无理数的和或差为无理数. 无理数与无理数的和或差可能仍为无理数，也可能为有理数.

在观察各种运动过程的时候，我们还发现，有些变量具有一定的变化范围. 例如自由落体的下降时间和距离只有在落体落到地面以前才有意义.

变量的变化范围，也就是变量的取值范围，在取实数值的时候，我们往往用区间表示：设a，b是有限数，$a<b$，满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的x的全体组成一个闭区间，记为$[a,b]$，也可以说：变量x的变化范围为闭区间$[a,b]$. 满足不等式$a<x<b$的x的全体组成开区间(a,b). 而满足不等式$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的x的全体组成半开半闭的区间$(a,b]$或$[a,b)$. 如果变量x能够取实数轴上所有的数，我们把它的变化范围记为$(-\infty,+\infty)$，在这里‘∞’并不表示数量，它只不过是一个记号，前面的‘$+$’，‘$-$’表示方向. 有时候，在并不一定要指明是开的或闭的场合，我们也常用X，Y等来表示区间.

二、函数

在同一现象所碰到的各种变量中，通常并不都是独立变化的.

它们之间存在着依赖关系，我们考察几个具体例子：

1. 自由落体运动的规律 根据自由落体公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

这里 s 表示下降距离，t 表示时间，g 是重力加速度. 这个公式指出了在物体自由降落的过程中，距离 s 和时间 t 的依赖关系.

2. 用一块边长为 a 的正方形铁皮作为一个高为 x 的无盖小盒(图 1－1).

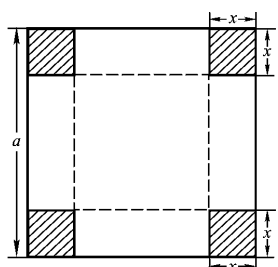


图 1－1

于是这盒的容积 V 和高 x 存在着依赖关系：

$$V=x(a-2x)^2$$

3. 在中学的数学课程中，已经讲到过许多有用的函数，例如直线函数 $y=ax+b$(其中 a，b 都是常数)，又如 $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，$y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$等三角函数以及对数函数 $y=\lg(1+x)$和指数函数 $y=2^x$ 等等，它们给出了变量 x 和变量 y 的依赖关系.

在以上这些依赖关系中，我们看到一些共同的特征：

(i) 在这些变量中，有些量称为自变量，如时间 t，盒高 x 以及上面 3 中的 x 等，它们有一定的变化范围. 如例 1 中的时间 t，在这个运动过程中，如果我们把物体刚开始下落的时刻记为 $t=0$，把物体刚到达地面的时刻记为 $t=T$，那么时间 t 的变化范围只能是在 0 与 T 之间，即 t 的变化范围是闭区间 $[0,T]$. 又如上例 3 中的函数 $y=\lg(1+x)$，从对数函数的特性容易知道，自变量 x 的变化范围只能是 $x>-1$，即 x 的范围是 $(-1,+\infty)$. 再如 $y=$

$5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，从余弦函数的特性知道 x 的变化范围是 $(-\infty,+\infty)$.

在依赖关系中，还有一些量是随着自变量的变化而起变化的，称为因变量，如落体下降距离 s，盒的容积 V，及例 3 中的 y，它们也有一定的变化范围. 在某一过程中，哪个变量是自变量或因变量并不是绝对的，例如在自由落体公式中，如果我们已经知道下降距离为 s 而要求出经过了多少时间，这时就视距离 s 为自变量，而

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

时间 t 就成为因变量了.

(ii) 对自变量的变化范围内的每一个确定的值，通过依赖关系，总能得到一个确定的并且唯一的因变量的值.

把这种特征抽象出来，便得到函数的概念：

函数的定义　如果对某个范围 X 内的每一个实数 x，可以按照确定的规律 f，得到 Y 内唯一一个实数 y 和这个 x 对应，我们就称 f 是 X 上的函数，它在 x 的数值(称为函数值)是 y，记为 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 有时我们也称这个 y 是 x 的象，称 x 是 y 的一个逆象. 用数学记号把这件事表达出来就是：

$$f: X\to Y$$
$$x\mapsto f(x)$$

这个记号有两层意思：(i)它表明通过函数 f 的作用，把整个 X 变到 Y 里面去，我们用记号 $X\to Y$ 来表示这一层意思. (ii)对 X 内每一个实数 x，在 f 的作用下，变为 Y 内的唯一一个实数 y，记作 $f(x)$，或者说，在 f 的作用下，x 的象是 $f(x)$，也可以说 f 在 x 的函数值是 $f(x)$，我们用记号 $x\mapsto f(x)$ 来表示它.

我们称 x 是自变量，y 是因变量，又称 X 是函数 f 的定义域，它表示对 X 内的任何实数 x，在 f 的作用下是有意义的，简单地

说，$f(x)$是有意义的. 当 x 遍取 X 内的所有实数时，相应的函数值 $f(x)$的全体所组成的范围叫做函数 f 的值域，要注意的是：值域并不一定就是 Y，它当然不会比 Y 大，但它可能比 Y 小.

例 1 中学里已经学过的正弦函数 f，用上述的记号写出来就是(设 $X=Y=(-\infty,+\infty)$)：

$$f: X \to Y$$
$$x \mapsto y=\sin x$$

它表示正弦函数把所有实数变成另一些实数，并且把每一个具体的实数 x 变成实数 $\sin x$，这个 $\sin x$ 就是函数 f 在 x 点的函数值. 这时，f 的定义域是 $X=(-\infty,+\infty)$，而值域是 $[-1,-1]$，它比 Y 小

例 2 设 $X=(0,+\infty)$，$Y=(-\infty,+\infty)$

$$\varphi: X \to Y$$
$$x \mapsto y=\lg x$$

它表示对数函数把 $(0,+\infty)$ 内的实数变成另一些实数，对每一个正的实数 x，φ 在 x 点的函数值是 $y=\lg x$，这就是我们所熟悉的对数函数，它的定义域是 X，值域是 $(-\infty,+\infty)$，值域等于 Y.

在通常的数学分析或微积分课本中，为了省略，而略去上面所写的那些记号，干脆把函数 $f: X \to Y$，$x \mapsto y=f(x)$ 简单地记为 $f(x)$，或 $y=f(x)$，例如函数 $y=\sin x$，函数 $y=\lg x$ 等等，而不把它们写成刚才所写的那种形式，以后我们就用这种省略的写法，但要请读者注意的是：这仅仅是一种省略而已.

例 3 函数

$$f(x)=\sqrt{\sin x}$$

只有当根号内的 $\sin x$ 非负时，这个函数才有意义，可见它的定义域为 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，函数的值域为 $[0,1]$.

特别地，当 $x=0$ 时，函数值是 0，即 $f(0)=0$，相仿地还有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}=1, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

把这个函数用定义中的记号写出来就是，设 X 是由区间 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）所组成的，$Y=(-\infty,+\infty)$.

$$f: X\to Y$$
$$x\mapsto\sqrt{\sin x}$$

f 的定义域是 X，值域是 $[0,1]$.

例 4 函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

的定义域为满足下列不等式的全部 x 值：

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0$$

解之得 $x>2$ 和 $x<-1$，这就是定义域. 如果用区间来表示，定义域为 $(-\infty,-1)$，$(2,+\infty)$. 函数的值域为 $(0,+\infty)$. 特别地有：

$$f(4)=\frac{1}{\sqrt{10}}, f(-2)=\frac{1}{2}$$

例 5 设 $f:(a,b)\to(-\infty,+\infty)$

$$x\mapsto C \quad (\text{常数})$$

即对 (a,b) 内的任何 x，都有 $f(x)=C$. 它是一个在其定义域内取常数值的函数.

对于两个函数 f 和 g，何谓 f 和 g 相等呢？这是指：(i) 它们有相同的定义域 X，(ii) 对 X 内的每一个实数 x，它们有相同的函数值，即 $f(x)=g(x)$，这时，我们就说函数 f 和函数 g 相等，显然，它们的值域也必相同.

例 6 设有两个函数

需要全本请访问 www.ertongbook