

第一章 数的发展

数学如何描述世界，如何描述外部世界，又如何处理它自身的矛盾运动，这是我们关心的主题。讨论数学如何描述世界，首先要看如何用数描述世界。数的发展自身也包含着矛盾，它处在一个变化、扩展、充实的过程中。我们将叙述一个历史概貌，并且首先从这里开始去观察和了解各种方法及相关的各种数学观点和数学思想。

§1 从有理数到无理数

古代希腊，毕达哥拉斯学派是主张所谓数的宇宙观的，认为“万物的根本是数”数是宇宙的本源；“万物皆为数”整个世界是数的“和谐系统”。毕达哥拉斯学派认为：“一切起源于—”接下去，二是女人，三是男人，四是正义，等等。

一切起源于—，于是毕派只承认整数（实际仅指自然数）。有理数不过是两整数之比。所以一切都是整数。这样，他们就实际上只承认到有理数为止。后来有人把有理数叫做“有比数”。

但是，不可通约量出现了，正方形对角线的长与其一边的长之比再也不是任何两个整数之比了。这个比值就是现今众所周知的无理数 $\sqrt{2}$ 。发现这一事实的又恰好是毕达哥拉斯学派的一个成员希伯斯。他在此之前还发现了正五边形对角线长与其一边长之比也是不能用两整数表示的，此比值正是 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

于是，神圣的整数不再神圣了，“和谐系统”不再和谐了。毕

派首领想掩盖这一事实，因为这对于他们的宇宙观是致命的。因此限令希伯斯不得向外泄漏天机。但是，希伯斯仍然泄漏出去了。据传，希伯斯后来因此被推到海里淹死了。这些都是公元以前的事了。

宇宙观的影响是一方面。另一方面，历史的发展表明，对无理数的本质及其理论的完整认识确实是十分艰难的。

17世纪，剑桥大学的数学教授、牛顿的老师巴罗还根本不承认无理数。整个18世纪，直到19世纪初，人们对无理数的认识仍然还是贫乏且零散的，不仅系统的理论尚未建立起来，而且人们实际认识的无理数并不多，有的数，人类接触它长达数千年之后，尚不知道它究竟是有理数还是无理数。

直到19世纪中叶之后，关于实数的理论才得以完整地建立起来，从而，对无理数的认识从理论上得以解决。19世纪后半叶，实数理论的研究成果竟如此丰富，以致好几种彼此等价的实数理论纷纷出现，作为整个数学的重要奠基石之一的这一理论，澄清了不少昔日的混乱状况。但这并不等于有关无理数的一切实际问题都已解决了。例如， e^π 在19世纪尚不清楚它是什么数， π^e 至今还不清楚它是不是超越无理数。又如，著名的欧拉常数

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right),$$

其近似值为0.57721566490153286060651，并且用计算机算出一千位以上，但它是不是无理数也还不知道。

无理数一词的表面含义就是说这种数是不合理的，无理性的。当然，这是囿于人们的认识水平而取名的，事实上，今天一般人也不会认为无理数是不合理的数了。它是“无比的（不能表为两整数之比），却不是“无理的”。

但是，事情的发展并不是笔直的。毕达哥拉斯之后两千多年，一种传统的宇宙观仍在发生影响。19世纪下半叶，德国著名的数学家克朗列克（他给出了群的公理结构）仍然激烈地反对实无限，否认无理数的存在。他十分挖苦地对在1882年证明了 π 是超越无

理数的另一德国数学家林德曼说：“你那个关于 π 的漂亮研究有什么用呢？无理数根本就不存在，你为什么要研究这种问题？”克朗列克的名言是：“自然数是上帝创造的，其它的都是人的事。”这种观点与两千多年前的毕达哥拉斯观点何其相似乃尔。克朗列克的观点既是对数学科学的一种见解，也包含了他的哲学观点，这使他成为现代直觉主义流派的代表之一。

§ 2 关于 π

前一节，我们曾说到：直到19世纪，人们实际认识到的无理数还是很稀罕的，且基本上局限于代数无理数。

事实上，被找到的第一个超越无理数（即这种无理数不是任何整系数多项式的根，简称为超越数）是1851年由法国数学家柳维尔构造的，它就是（读者不难验证它的超越性）：

$$\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^{1 \cdot 2}} + \frac{1}{10^{1 \cdot 2 \cdot 3}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} + \cdots$$

$$= 0.110001000000000000000000100 \cdots$$

10年之后，法国数学家艾尔米特又证明了自然对数的底 $e = 2.7182818284590452 \cdots$ 是超越数。

所以，人们具体涉及的超越数更为罕见。后来，康托利用集合论的方法不仅从理论上证明了超越数的存在，而且其数量相当大，以致跟全体实数“一样多”，相对来说，代数数（包括代数无理数）就非常少了。

π 究竟是什么样的数呢？

人类关于圆的概念可以追溯到最古老的文明史，而圆周长与直径之比（圆周率 π 则在很长的时期内被人们所研究着，数千年之前即以开始。我们现在用以表示圆周率的符号 π 才产生于18世纪初哩。

在古巴比伦数学中， $\pi = 3$ 。这当然是很粗糙、很原始的结果。

约三千多年前，古埃及人得到

$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \doteq 3.1605.$$

这个结果前进了一大步。

在约两千四百年前的一种圣经中记载着

$$\pi = \sqrt{10} \doteq 3.162.$$

二千二百多年前，大科学家阿基米德得到

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

$$\pi = 3.1419.$$

(我国历史上的数学家何承天于公元4世纪时亦得到此结果。)

大约公元前500年，在印度数学中有关于 π 的一个奇怪的近似值：

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2,$$

$$\pi \doteq 18(3 - 2\sqrt{2}).$$

公元1世纪时，亚历山大前期希腊的普托拉米有一个关于 π 的六十进制表示式： $\pi = (3, 8, 30)$ ，亦即

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3.14166.$$

公元3世纪，我国数学家刘徽对圆周率的计算有过重要贡献。他在《九章算术》的注释中指出“周三径一”是不正确的，并且说明所谓周三径一实际上指的是圆的内接正六边形周长与直径长的关系。他创立了割圆术：用圆的内接正多边形的面积去逼近圆的面积。这里已包含了极限的思想，是非常高明的，非常深刻的。

刘徽利用勾股定理得到了以下重要的公式：

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

其中， R 是圆的半径， a_n 是内接正 n 边形边长， a_{2n} 是内接正 $2n$ 边形边长。他已知 $a_6 = 1$ ，由此出发，反复利用上述公式可得（取 $R = 1$ ）：

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$\begin{aligned}
 a_{2^4} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \\
 a_{2^8} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}, \\
 a_{2^{16}} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}, \\
 &\dots\dots \\
 a_{2^{2^k}} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}, \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

于是圆的内接正 $n = 6 \times 2^k$ 边形的周长 P_n 就是

$$P_{6 \times 2^k} = 6 \times 2^k \times a_{6 \times 2^k}.$$

而圆周率就近似地等于 $6 \times 2^{k-1} \times a_{6 \times 2^k}$ 。

公元5世纪时，我国历史上杰出的数学家祖冲之推算出

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

这是一项了不起的工作，它精确到了小数点后七位。祖冲之还使用了两个近似分数来表示 π ：

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad \pi = \frac{355}{113},$$

前者叫“约率”，后者叫“密率”；“密率”的精确度极高。事实上，

$$\frac{355}{113} = 3.1415929\dots\dots.$$

祖冲之的发现当时在世界上处于绝对领先的地位，一千一百多年之后（即1573年），欧洲人奥托才得到与祖冲之相同精度的 π 值。

欧洲在中世纪末期还在使用 $\pi = \frac{3}{4} (\sqrt{3} + \sqrt{6})$ ，这是比

较落后的。

在奥托之后不久，维耶特（又译韦达）算出了 π 的9位小数。此后，有了关于 π 的第一个无穷乘积表示

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\dots \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \cdot \dots,$$

或

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots$$

$$\cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots$$

紧接着，1596年，寇伦算到了 π 的35位小数值：

$$\pi = 3.14159265358979323846$$

$$264338327950288.$$

17世纪时，又有了若干关于 π 的无限表示形式。下面是瓦里斯的无穷乘积表示：

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots,$$

π 的无穷级数的出现是一个巨大进步，格利葛利和莱布尼兹都得到了以下表示：

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

这个表示式很著名，但若按此式计算，如果要精确到阿基米德的结果就需要算上万项，更不要说精确到祖冲之的结果了。计算量很大。

莱布尼兹的上述结果显然是 $\arctg x$ 的展开式在 $x=1$ 的取值，为了减少计算量，得到收敛得更快的级数表示，许多数学家利用反正切的变换得到了更好的计算公式，从而推动了 π 的计算。

1706年，马青得到（ tg^{-1} 即 \arctg ），

$$\pi = 16\text{tg}^{-1} \frac{1}{5} - 4\text{tg}^{-1} \frac{1}{239},$$

1794年，勒让德得到

$$\pi = 16\text{tg}^{-1} \frac{1}{5} - 4\text{tg}^{-1} \frac{1}{70} + 4\text{tg}^{-1} \frac{1}{90},$$

1948年，费尔哥生得到

$$\pi = 12\text{tg}^{-1} \frac{1}{4} + 4\text{tg}^{-1} \frac{1}{20} + 4\text{tg}^{-1} \frac{1}{1985}.$$

这些公式的出现，使得人们用手工计算 π 值的精度大为提高，最好的结果是精确到数百位小数之后。

π 值的计算出现新的飞跃是在电子计算机问世之后。1958年， π 值算到了一万位，过了“万位”大关。嗣后两年，丹尼尔·向克斯和伦奇把 π 值算到十万位以上。突破“百万位”大关的是盖尤。这是在1973年，1981年，日本人三好和宪与金田康正算到了两百万位以上。

盖尤在算出一百万位之后，作了一个统计，他发现，0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9这十个号码出现的次数很均匀，都接近十万，其中，“5”出现最多，是100359次；“7”最少，是99800次。

有了好的计算公式，有了大型计算机， π 值的计算还可得到更多位数值，千万，万万，……但是永远也不会算完的。什么原因呢？

1861年，兰伯特证明了 π 是无理数。他利用欧拉在连分式方面的工作，证明了：当 x 为非零的有理数时， $\text{tg}x$ 不可能是有理数。然而， $\text{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ，因此 $\frac{\pi}{4}$ 不可能是有理数。这样就证明了 π 是无理数的结论。

1882年，林德曼推广艾尔米特1873年对 e 的超越性的证明，证明了 π 乃是超越数，这从理论上对 π 下了最重要的结论。至此，我们对 π 的认识算是比较完整了，但也还不能说很完全。例如前面我们提到， π^e 是个什么数，我们就还不知道。

我们专门叙述了人类对 π 的认识的漫长历史过程，它生动地说明了对无理数认识的艰难性。同时，也说明人类认识有一个渐次逼近的过程。

§3 从正数到负数

约1800年前，我国最古老的数学经典著作《九章算术》中已经

有了正负数概念,其中说:“两算得失相反,两令正负以名之。”这是给正负数下的明确定义,并且据刘徽注释说,当时是用红色的算筹表示正数,用黑色的算筹表示负数;或者用正列的算筹表示正数,用斜列的算筹表示负数,特别值得注意的是在《九章算术》中已有了正负数运算的法则:“正负术曰,同名相除,异名相益,正无入负之,负无入正之,其异名相除,同名相益,正无入正之,负无入负之。”用现今的语言来叙述就是:“两数同号则绝对值的差是余数的绝对值,减数如果是正数且大于被减数时余数为负号;如果是负数且小于被减数时,余数为正号,两数异号则绝对值的和是余数的绝对值,两数同号则和数的绝对值等于两绝对值之和,两数异号则和数的绝对值等于两绝对值之差,两数异号时,其中正数的绝对值较大则和数取正号,负数的绝对值较大则和数取负号”。

对负数的认识似乎没有对无理数的认识那么艰难,但也并非十分容易。

我国的《九章算术》关于正负数的概念及其运算法则在世界数学史上属于最早的记载。但公元大约3世纪时亚历山大的代数学家丢番图还未承认负数。

公元7世纪时,我国数学家王孝通在所研究的方程中只限于正系数方程,并且也只求正根。

到了公元12世纪时,印度数学家布哈斯卡拉在解以下方程

$$x^2 - 45x = 250$$

时曾得到过负根“-5”,但他对负数的有效性持怀疑态度,也给舍弃了。

至于在欧洲,负数被正确认识的时间更晚。

1484年,法国数学家舒开(Chuquet)给出了二次方程的一个负根,但他认为负数是荒谬的数。

卡丹(Cardan)1545年区分了正负数,但他把正数叫做“真数”而把负数叫做“假数”。

著名的德国数学家斯蒂弗尔(Stifel)竟称负数是“无稽之零下”因为它是从零减去“零上的数”。

韦耶特碰到了负数，但也完全避开它，不承认它。韦耶特对代数的贡献受到局限。

后来，笛卡儿只是部分地接受了负数，他把方程的负根称作假根。

巴斯嘉 (Pascal) 认为从 0 减去 4 纯粹是胡说。

近代数学已在蓬勃发展着的 18 世纪还有人激烈地反对负数。英国数学家梅琴莱斯声称：“代数里决不容许有负根，或者说再一次把它们从代数里驱逐出去，”因为“负数只会把方程的整个理论搞糊涂，而且把一些就其本质来说是出奇的简单明白的东西搞得晦涩难懂、玄妙莫测。”

连达朗贝尔这样著名的数学家也对负数的现实意义表示不能理解，他说：“有负数量的代数运算的法则，在常识上还被当做是正确的，但与这些量的本身含义无关。”

负数，在我们今天看来是很简单易懂的，并不“晦涩”，并不“玄妙”，但它的产生过程，尤其是正式被人们接受之前的这段过程，也不平常，这表明：一个新的概念，一种新的方法，被普遍接受有时并不容易，甚至颇费周折。

§ 4 从实数到虚数

虚数较之负数、无理数出现的时间更晚，笼罩在它身上的神秘色彩也更浓。

在我国古代，由于是用数值解法（如贾宪法、秦九韶法等）来解方程的实根，故未曾引入虚数，虽然实际上碰到了开方运算。

在公元 3 世纪，丢番图 (Diophantus) 系统地研究过二次方程，他把一元二次方程分为以下五类：

$$\begin{aligned} ax^2 &= bx, & ax^2 &= c, & ax^2 + bx &= c, \\ ax^2 &= bx + c, & ax^2 + c &= bx, \end{aligned}$$

但其中 a 、 b 、 c 都是正数，只要承认负数，上述五类方程的后三类显然是一类方程，即统归为形如 $ax^2 + bx + c = 0$ 的方程。可见，丢

番图时期还不承认负数，因而更不可能接受虚数。

12世纪的印度正式接受负数，而且承认方程可以有负根。当然碰到 $x^2 + 1 = 0$ 或 $x^2 = -1$ 这样的方程也就可能了。但是长期以来，人们认为，任何数的平方不会小于0，因此， $x^2 = -1$ 是没有解的。

法国数学家舒开于1484年讨论过方程

$$x^2 + 4 = 3x,$$

他得到两个根 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4} - 4}$ ，但因 $2\frac{1}{4} - 4$ 为负数而被认

为此方程无解。

丢番图虽然对二次方程进行过系统的讨论，但尚未正式引进文字系数。这一巨大进展始于16世纪的欧洲。至此有了了解代数的公式法（即通过用方程系数的有限次代数运算——加、减、乘、除、开方——来求解方程的根）。维耶特即得到了求一般二次方程 ax^2

$+bx+c=0$ 的根的公式： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。这样，就可判断：

只要 $b^2 - 4ac < 0$ ，就会出现负数开平方。在实数领域任何数的平方不会是负数，然而，当时人们的眼光又囿于实数范围，所以负数开平方就十分令人困惑。虚数在这种令人困惑不解的情况下还无法被正式引入。

如果只有解二次方程的任务，而且只需要实根，那就可以不要负数开平方，碰到了就避开，或宣布无解。16世纪以前人们大体是这样做的。勇敢的人，虽然尚未彻底认识这类数，但也去探索这类数的运算规则。维耶特就认为10是可以分成两个数使其积等于40的，这两个数就是 $5 + 15i$ 和 $5 - 15i$ （维耶特还未正式使用符号 i ）。意大利数学家邦别利开始用缩写字母表示虚数，并给出了虚数的运算法则。例如，他用 $R[0, m, 9]$ 来表示 $\sqrt{-9}$ 。他得到

$$\sqrt[3]{52 + \sqrt{0 - 2209}} = 4 + \sqrt{0 - 1}.$$

亦即

$$\sqrt[3]{52 + 47i} = 4 + i.$$

可以说，至16世纪，虚数才正式被引进，而且，关键在于解三次方程。

意大利数学家卡丹诺在1545年于《大法》一书中发表了解三次方程

$$x^3 + px + q = 0$$

的一般求根公式

$$x = \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{u_2},$$

其中 u_1 与 u_2 为二次方程

$$u^2 + qu - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (\Delta)$$

的两个根。根据这一公式，那怕是求三次方程的实根，有时也不得不经过负数开平方，即不能回避虚数。例如三次方程

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

具有实根，但是相应的二次方程（ Δ ）

$$u^2 - 4u - \left(\frac{-15}{3}\right)^3 = 0$$

却有两个虚根

$$u_1 = 2 + 11i, \quad u_2 = 2 - 11i.$$

u_1 与 u_2 的立方根之一分别是 $2 + i$ 与 $2 - i$ ，其和为4这正是所求三次方程的实根。

虚数在16世纪正式诞生之后，从16世纪到18世纪的漫长岁月里，对虚数的认识并未取得重大进展。

尽管虚数已经出现在人们面前，而且无法避开它，但许多数学家仍感到茫然。卡丹诺本人即认为它是“假想的”。1637年，笛卡儿正式称呼它为“虚数”即“虚假的数”或“实际并不存在的数”。“虚数”这一名称流传至今。

微积分的创立者之一——莱布尼兹也研究过虚数，并且运用虚数解决过有理函数的积分问题。但是他认为“这是神奇的干预”，他认为“虚数是神灵美妙与惊奇的避难所，它几乎是又存在又不存在的两栖物。”这是惊叹与赞美兼而有之的声音。另一些数学家例

如达朗贝尔则“用明智的沉默绕过它们”（即指虚数），这是17、18世纪的事。

诚然，在18世纪，对复数的认识也有某些进展。我国数学家汪莱和李锐得到过一个著名的结论：实系数多项式的虚根是成对出现的（即当 $a+bi$ 为其根时 $a-bi$ 必为其根）。李锐的这一结果，欧洲18世纪最杰出的数学家欧拉于1742年得到。

欧拉首次用 i 来表示虚单位 $\sqrt{-1}$ 并且建立了复数的指数表示及其与三角表示的联系：

$$Z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

其中 $r = |Z|$ ， $\theta = \arg z$ 。这是十分富于想象力的创造。经由这一表示，他把 0 ， 1 ， i ， π 和 e 这五个最为典型而又似乎毫不相关的数统一在一个美妙的式子之中

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

欧拉的指数表示法对推动复数理论的建立和完善起了巨大的作用。但是欧拉的基本看法比笛卡儿并没有前进多少，他说：“所有可以想象的数都或者比 0 大，或者比 0 小，或者等于 0 ，所以很清楚，负数的平方根不能包括在可能的数中”^[1]，因而通常叫虚数或者幻想中的数，因为它们只存在于想象之中。”可见，虽然欧拉对于虚数已经做出了杰出的工作，但他的观念并未跳出实数的领域。

到了19世纪，对虚数，还有异常激烈的反对者，英国数学家德·摩根，甚至说他“已经证明了记号 $\sqrt{-a}$ 是没有意义的，或者甚至是自相矛盾或荒唐可笑的。（这里的 a 是表示一个正数的。）”

1831年，19世纪最伟大的数学家高斯将复数集与平面点集的元素一一对应起来，这样的平面现今称之为高斯平面（事实上，在高斯之前已有挪威的测量学家威塞尔也这样做过）。对复数的这一几何解释（或建立其几何模型）是跨出的极为重要的一步，它顺利地导致复数在电工学、弹性力学、流体力学等方面的应用。经过19世纪的哥西、黎曼、维尔斯特拉斯等人的努力，以复数为变数的函数理论建立起来，复数理论在实际生活中的作用有力地显示出来。虚数从16世纪问世以来一直笼罩在它身上的神秘色彩，

至此基本上消逝了。

从虚数发展的历史过程来看，有几方面的特点是能引起人们注意的。

应该承认，在一个阶段上（从16世纪到19世纪初），对虚数的认识确实表现出明显的理性思维特征。

然而，作为引起虚数的初始原因（虽非根本原因）——求平方根问题却又明显地源于实际生活。

并且，披在虚数身上的神秘色彩是在人们无法理解它的现实意义的情况下出现的，而后，又是在理论与现实结合在一起的时候最终消失的。

这都说明虚数是人类认识史上的一个创举，但又决非纯理性思维的产物。

最后，我们还会注意到，作为以虚数的产生为前提的复变数函数理论的诞生还有一个前提，那就是19世纪的生产水平和科学技术水平。相伴于流体力学、电工学等学科，复变函数理论也不可能在更早的世纪问世。所以，涉及到虚数的认识论问题无疑也属于历史的范畴。

§5 从复数到超复数

人类最先认识的当然是自然数。

后来由于引进分数、零和负数而扩展为有理数系。

又由于引进无理数而扩展为实数系，并且经过漫长的世纪建立了实数的完整理论。

再由于虚数的引进而扩展为复数系，复变数函数的理论也建立起来。

数系不断扩张，还有个尽头没有？

我们能够证明，在不改变以下十个条件的前提下，希望得到超过复数范围的新数系是不可能的。这十条是：

1 对于任何二数，其和唯一确定；

2° 对于任何二数，其积唯一确定；

3° 存在数 x (不妨记为 0)，使得对任何 a 有

$$a + x = a;$$

4° 对于任何数 a ，存在 x ，使得

$$a + x = 0;$$

5° 加法满足交换律

$$a + b = b + a;$$

6° 加法满足结合律

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

7° 乘法满足交换律

$$ab = ba;$$

8° 乘法满足结合律

$$(ab)c = a(bc);$$

9° 乘法对加法满足分配律

$$a(b + c) = ab + ac, (b + c)a = ba + ca;$$

10° 对每一数 a 及每一数 $b \neq 0$ ，存在着唯一的数 x ，使得

$$bx = a.$$

可见复数已经是相当宽广的数系了。

但它的宽广也还是相对的、有条件的。如果将上述十条中的第7°条废除，那么我们可以进一步扩展而得到四元数系。这就是英国数学力学家哈密顿于上世纪中叶创立的第一个超复数系。

复数系是二元数系，它只有两个单位元 1 和 i 。四元数系（作为超复数系）是复数系（二元数系）的扩张。四元数系有四个单位元 $1, i, j, k$ 。它的一般形式是

$$a + bi + cj + dk,$$

其中 a, b, c, d 都是实数。

$a + bi + cj + dk$ 与 $a' + b'i + c'j + d'k$ 相加、相乘的规则如下：

$$\begin{aligned} & (a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) \\ &= (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k, \\ & (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i \\
&\quad + (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k, \\
i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \quad ij = -ji = k, \\
jk &= -kj = i, \quad ki = -ik = j.
\end{aligned}$$

四元数系是不满足乘法交换律的（详细的讨论可见华罗庚《高等数学引论》第一卷第一分册第一章）。例如， $p = 3 + 2i + 6j + 7k$ ， $q = 4 + 6i + 8j + 9k$ ，那么， $pq \neq qp$ ，

$$pq = -111 + 24i + 72j + 35k,$$

$$qp = -111 + 28i + 24j + 75k.$$

四元数产生之初也不被人理解。如爱尔兰物理学家汤姆生说：“哈密顿做了确实非常出色的工作，从而诞生了四元数；虽然美妙而富有创造性，但对于以任何方式接触过它的人说来，这实在是个纯粹的邪念。”

四元数的研究有力地推动了向量代数的发展，四元数的发展引导初等代数向着抽象的高等代数发展。哈密顿的学生，英国著名物理学家麦克斯韦尔在掌握了四元数理论之后，利用向量分析等数学理论建立起了影响深远的电磁理论。

§ 6 从有穷数到超穷数

人们从计数开始即接触到自然数，由自然数逐渐扩展到有理数，实数，复数，乃至超复数。这是数的发展的线索之一。

数的发展还有另一条线索。

自然数1, 2, 3, …… , n , ……究竟有多少个？虽然谁也没有数完过，但都能知道它有无穷多个（历史上也曾有人不认为是无穷多个，但这种看法是站不住脚的）。然而，每一个自然数都是有穷数。

全体自然数有无穷多个，那么全体平方数

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

有多少个呢？我们可能马上也回答：有无穷多个。

奇数的全体是多少个？偶数的全体是多少个？都是无穷多个！

虽然都是无穷多个，它们彼此之间有没有差异？能不能也比较一下多寡？比较一下大小？

奇数全体、偶数全体、平方数全体可能被认为比自然数全体少，因为它们都只是自然数全体的一部分。但是，三百多年前，伽利略提出了一个奇怪的问题，他说平方数既不比自然数多，但平方数也不比自然数少。他的理由是平方数全体和自然数全体可以一个对一个的对应起来：

1—1, 4—2, 9—3, 16—4, …… , $n^2—n$, ……。我有一个，反过来说，我有一个你也有一个，所以彼此一样多。

当时，这个结论十分令人惊奇，因为平方数只是自然数的一部分，而“整体大于部分”是一条写在欧几里德公理系统中的一条公理。伽利略竟然提出了一条与公理相矛盾的结论。人们对此无法理解，于是就称之为伽利略悖论。

伽利略显然是利用一一对应的观点来进行比较的。按照这个观点，奇数全体、偶数全体与自然数全体的个数也是一样多，因为在奇数全体、偶数全体与自然数全体之间很容易建立一个一一对应关系。

以上问题涉及到集合论。集合论为德国数学家康托所最先建立起来，这已是在伽利略之后的两百多年了。

自然数集合可算是最简单的无穷集合了，好比所有的数都从1出发那样，集合论就从自然数集合出发了。

如果画一条实数轴，那么自然数在这条数直线上对应的点只是一些孤立、稀疏的点。然而有理数集在这条直线上对应的点就密密麻麻了，以致任何两个有理点之间都还有无穷多个有理点。康托第一个了不起的发现就是：如此密密麻麻的有理数集和如此稀稀疏疏的自然数集竟然在元素个数上也一样多！（他建立了两者的——对应关系）

进一步，康托又猜想，实数全体与自然数全体的元素也可能一样多。但是，几个星期之后他就发觉自己的这一猜想错了。然

而，失败乃成功之母，这导致了一个更重要的发现：实数集的元素比自然数集的元素要多！准确地说，就是他证明了自然数集只能与实数集的真子集一一对应，而不能与实数集自身建立一一对应。

实数集的元素个数是无穷的，自然数集元素的个数也无穷，但这两个无穷之间是有差异的。

记自然数集这个无穷为 a ，记实数集这个无穷为 c ，那么康托证明了： $c > a$ 。

从此，“个数”的观念由有穷扩展到了无穷。“无穷”这个领域里的奥妙被揭示出来。康托就是这样以一一对应的概念为基础建立起了超穷数理论，这是有穷数（自然数）向无穷数的扩张。他引进了基数，引进了序数。这是人类对无穷的认识的又一个突破性进展。

a 又叫做可数基数。这样，一切与自然数集合能建立一一对应关系的集合都具有可数基数 a ，特别，平方数集，奇数集，偶数集，都具有可数基数 a 。

有比 c 更大的基数吗？实数集上的全体实函数的集合的基数就比 c 大，此基数记为 f 。

有比 f 更大的基数吗？作为一个普遍的结论有：任何集合的基数小于由该集合的一切子集（作为元素）组成的集合的基数。由此，我们立即可知，最大的基数是不存在的。

以一一对应的观念做基础建立起来的基数的合理性还可以从这样一个方面来看：即对两个有限集合来说，我们比较它俩元素的多寡时用不着分别计数，也只要作对应，如果能一对一地建立对应关系，它俩的个数就相等，否则就不等。大于、小于的概念也能确定。

有限集不可能与自己的真子集一一对应，无限集却能与自己的某些真子集一一对应，例如自然数集能与平方数集一一对应。这正说明，“整体大于部分”的公理只在有限集时成立，进入无限集之后就不再成立了。伽利略悖论之谜从此解开。