内容提要

《数学方法论》是研究数学中发明、发现规律及数学中一些基本方法的新兴学科援作为一名数学教师，如果能了解和掌握自己所讲授的数学概念、定理、法则的发现、发明的规律，无疑对讲活数学课，对培养学生的数学动手能力有不可估量的作用援

本书对中小学数学中重要的概念的产生、发展，数学中的重要推理方法、公理化方法、化归方法、模型方法及数学抽象方法作了详细的论述援此外，本书开辟有两个专章，一章详细论述了数学猜想的来源、模式及如何教会学生掌握归纳、类比、几何直观及一般化与特殊化等数学发明、发现的方法，提高学生的数学工作能力；另一章着力于提高学生的审美情趣，研究数学美并利用数学美来解决数学问题援相信本书将有利于从根本上提高数学教师对数学的理解和数学教学能力援

本书的附录将为有意深造者提供若干参考空间援

目摇录

第一章摇绪论

第二章摇数学的推理方法

第三章摇公理化方法

第四章摇化归法

第五章摇模型方法

*第六章摇数学的抽象性问题

第七章摇数学猜想与数学创造

第八章摇数学美

附录一摇数学文化论

附录二摇数学模式论

参考答案

摇摇第一章

绪论

輮戮 蘊牽

第一节摇数学方法论研究的内容

数学教育作为教育的一个重要组成部分,在发展人,发展社会方面有着极其重要的作用援‘今日数学及其应用 ’一文 (王梓坤) 精辟地论述了数学教育的价值和目标:‘数学的贡献在于对整个科学技术 (尤其是高新技术) 水平的推进与提高,对科技人才的培养和滋润,对经济建设的繁荣,对全体人民科学思维的提高与文化抚育援’总之,数学已成为我们这个时代的一种文化,数学的观念在众多不同的层次上影响着我们的生活方式和工作方式援而数学思想方法作为数学知识内容的精髓,是铭记在人们头脑中起永恒作用的数学的精神与态度,以及数学的观点与文化援人们重视数学思想方法的提炼、概括和应用也就是顺理成章的事了,对数学方法论的研究也就应运而生援

关于什么是数学方法,不同的人在不同的场合对之有不同的理解,人们一般从两种既有区别又有密切联系的含义来理解 ‘数学方法 ’援一是认为数学方法 “主要是研究和讨论数学发展规律、数学的思想方法

以及数学中发现、发明与创新法则”的表征；二是认为数学方法是“用数学语言表述事物的状态、关系和过程，并加以推导、演算和分析，以形成对问题的解释、判断和预言的方法”援即数学方法包含有两个不同的方面：一个是指数学工作者解决数学问题的方法；另一个是指科研人员以数学概念和理论揭示所研究事物的内在联系和运动规律的方法，即应用数学所提供的概念、理论方法对所研究的对象进行定量分析、描述、推导和计算，以便从量的关系上认识事物发展变化的规律性的方法援

在人们的实际活动的各个层次上都需要用到数学方法，与这种层次性相对应，数学方法论研究的内容可以分为四个层次：(一)数学发展和创新的方法；(二)运用数学理论研究和表述事物的内在联系和运动规律的方法；(三)具有普适性的数学解题方法；(四)特殊的数学解题方法援也有人将数学方法论研究的内容分为如下四个层次：(一)基本的和重大的数学思想方法援如微积分方法、概率统计方法、拓扑方法、计算方法等等，它们确定一个大的数学学科方向构成数学的重要基础；(二)与一般科学方法相应的数学方法援譬如类比联想、分析综合、归纳演绎等一般科学方法，在用于数学时有它自己的特点；(三)常用数学方法援包括 砸酆瞟原理、反证法、数学归纳法、数形结合法、数学构造方法等；(四)数学解题方法与技巧援包括换元法、消元法、参数法、交集 (轨)法、递推方法、逐步逼近法等等援

总之，数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学思维方法以及数学中的发现、发明与创新法则的学科援

第二节摇数学方法论的意义

在数学研究和教学研究的实践中，许多人都体会到，中小学数学教育的现代化，主要不是内容的现代化，而是数学思想、方法及教学手段的现代化，加强数学思想方法的教学是基础数学教育现代化的关键援特

别是对能力培养这一问题的探索，以及社会对数学价值的要求，使我们更进一步地认识到数学思想方法的重要性援

人们重视对数学方法论的研究决不是偶然的，归结起来，主要有以下两个原因：一方面是形势发展的需要援时代的前进依赖于科技的发展，现代科技日新月异，改革开放的大潮促进着社会主义市场经济的迅猛发展，现代科技以及经济发展成熟的标志是数学化，例如市场经济中的经济统计学、金融学等领域就极需要数学的支撑援在探索科技与经济发展的过程中，当然需要某些具体的数学知识，但更多的是依靠数学的思想与方法运用，以便从数学的角度去思考周围的实际问题，建立数学模型，从而来预测发展的前景，决策下一步的行动援可以说，时代的发展越来越依赖于数学思想和方法的作用援另一方面，是教育目的的需要援我国的教育面临着重大改革，由应试教育向素质教育转轨是重大改革任务之一援由于数学思想与方法的重要作用，使得数学教育在素质教育中具有特殊的地位援数学是思维的体操，数学思想方法的学习可以使人养成诚实、严肃认真、踏实细致、机智、顽强等当今时代迎接挑战不可缺少的精神，这是人们普遍感觉到了的现实援对于大多数学生来说，数学思想方法比形式化的数学知识更重要，前者比后者更具有普遍性，这是人们的共识援社会各部门、各行业对数学知识要求的深度与广度的差异很大，但对人的素质要求是相同的援如要求走向社会的人，具备严谨的工作态度，具有善于分析情况、归纳总结、综合比较、分类评析、概括判断的工作方法援例如，在联合国教科文组织编著的论文专辑中曾论述过这样一个典型的例子 我们能够确信三角形面积公式一定是重要的吗？但很多人在校外生活中使用这个公式至多不超过一次，可是在学习并推导这个公式中所蕴含的数学思想方法：‘通过分割一个表面成一些简单的图形的小块，并且用一种不同的方式重新组成这个图形来求出它的面积值’的分解组合思想方法却经常使用在校外的各类工作中援

对于数学方法论的意义，我们可以从数学研究、数学教学与数学学习这几个角度去进行分析援简单地说，数学方法论研究主要具有以下几

个方面的意义：

第一，对数学工作者来说，通过学习和领会前人研究数学这一学科所运用的方法，去探索新的数学问题，促进自己对那些合理方法有意识的运用，有可能在积累前人的经验达到一定程度的时候出现某种升华，取得数学研究上的突破，获得新成果援同时，通过对数学方法论的研究，可以发现所有有才华的人以及他们取得成功所遵循的共同的规律和方法，从而在自己前进的道路上得到启示援

第二，就数学教学工作来说，数学方法论事实上是对我国数学教师提出了更高的要求，即我们不仅应当注意具体的数学知识的传授，而且也应注意数学方法论的训练和培养援对于数学教师，应当强调的是，只有注意思想方法的分析，揭示解决数学问题的思维过程，才能把数学课讲活、讲懂、讲深援另外，就数学方法而言，则又只有与具体数学知识的教学密切结合，并真正渗透于其中，才不会成为夸夸其谈、纸上谈兵的空头文章援总之，强调数学方法与数学教学的有机结合，将对提高数学教学质量起到积极作用援

第三，自觉以数学方法论来指导数学学习，可收到更好的学习效果援因为，数学学习不仅仅是指具体的数学知识的学习，而且也是指数学方法的学习援即使将来学生长大后不从事数学工作，但数学方法对他们仍然有着十分广泛的指导意义援

总之，正如我国数学家徐利治教授所指出的：“可以乐观地预计，在中国逐步发展成为数学大国的历史进程中，数学方法论这一学科必将在中国茁壮成长起来，并将起到引导科学研究和推进教学改革的历史作用援”

我们通过以下的例子来让大家体会一下数学思想方法的意义和重要性援

例如，要你回答图 员援员中有多少个三角形援如果你一个一个地去数，这是一种思想方法援如果图中的线段 月悦有 员园个点、员园园个点……你

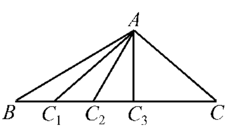

图 员援员

也是一个一个地数吗？显然,不另想办法将难以回答援

假如一开始就要你对后一种比较复杂的（或一般的）情况作出回答,你必然会回想到简单情况时的做法援从思想方法的角度上看,你已开始由一般回到特殊、由复杂转向简单了援这是一种以退求进的策略,是变换思想的一种体现援

在数三角形个数时,你会发现：求三角形个数的问题可以转化为三角形 粤月悦的边 月悦上有多少条线段的问题援这是“一一对应”的思想,是一个重要的思想方法,它是一种变换思想援

当着手数线段条数时,你会先从简单情形入手,以取得经验,探索规律援

一个点（悦员）时,线段有 月悦员、月悦、悦员悦,共 圆垣员越猿（条）,两个点（悦员、悦圆）时,线段有 月悦员、月悦圆、月悦、悦员悦圆、悦员悦、悦圆悦,共 猿垣圆垣员越远（条）,三个点（悦员、悦圆、悦猿）时,线段共 源垣猿垣圆垣员越员园（条）,（这里,怎样有次序、不重复、不遗漏地数线段,也有一个方法的问题）……经不完全归纳,若线段上有 怨愿个点,则得到 员园园垣怨怨垣怨愿垣…垣猿垣圆垣员越缘园缘园（条）线段援一般地,若线段上有 灶个点,将得到（灶垣员）垣灶垣（灶原员）垣…垣猿垣圆垣员越$\frac{(\text{灶垣员})(\text{灶垣圆})}{\text{圆}}$（条）线段,相应地,也有$\frac{(\text{灶垣员})(\text{灶垣圆})}{\text{圆}}$个三角形援

这里用到了归纳法,它也是数学中一种重要的思想方法援

在上面的例子中,涉及这样一道算术题：员园园垣怨怨垣怨愿垣…垣猿垣圆垣员越缘园缘园援历史上对这道算术题的计算还有一段有趣的故事呢援据说大数学家高斯在读小学的时候,老师曾出了这道题让学生计算,高斯很快得出了结果,他是怎么计算的呢？他是这样计算的：员园园垣员越员园员,怨怨垣圆越员园员,怨愿垣猿越员园员,…,缘园垣缘员越员园员,总共有 缘园个 员园员,所以和为 员园员伊缘园越缘园缘园援很明显,他的快速计算也是得益于巧妙的数学计算方法援

第三节摇数学方法论研究的方法

数学方法论的有关内容，事实上构成了数学历史的一个重要成分，由于波利亚的开创性研究，数学方法论在现代更取得了长足进步，在这一过程中，我国学者也作出了独立的重要贡献摇如 员怨愿猿年徐利治教授著有《数学方法论选讲》，员怨愿怨年郑毓信教授著有《数学方法论入门》，员怨怨园年他又出版了《数学方法论》一书摇总之，在近二十年的时间里，我国出版的数学思想方法论方面的教材著作不下几十种摇然而，从整体上说，数学方法论仍然是一门有待于进一步发展的新兴学科摇那么，对于数学方法论的研究，有哪些主要的方法呢？

一、宏观与微观相结合的多层次、多方位的研究

数学方法论按研究问题涉及的范围来分，可分为宏观数学方法论和微观数学方法论摇宏观数学方法论是高层次的，微观数学方法论是低层次的摇宏观数学方法论是通过对历史的考察，揭示出数学发展的动力与规律；微观数学方法论主要着眼于数学工作者个人的研究活动，即集中在数学思想方法及数学发明创造的启发性法则的研究上摇显然，宏观数学方法论的研究达到了更高的理论高度摇由此我们也可以看到，数学方法具有过程性和层次性特点摇除去不同层次的区分以外，我们还可从各个不同的角度和方位去从事数学方法论的研究摇例如，我们既可以就各个特殊的数学分支去进行研究，也可以就某个著名的数学家和数学学派去进行分析；既可以从纵向的角度去考察数学方法论的历史发展，也可以通过横向的比较去揭示不同文化、不同学派在方法上的特殊性摇

二、理论与实践相结合的研究

目前，我国的数学方法论研究已经得到了较大发展，数学方法论已成为师范院校学生学习和教师进修的一门重要课程摇十多年来的教学实践表明，数学方法论课程的开设确实使学生对数学方法的理论有了较系统的认识，取得了一定的教学效果摇然而，一个不容回避的事实是，虽然学生学习了数学方法论课程，但其解决问题的能力并没有什么明显的提高摇导致这种结果的原因可能是多方面的，但其主要原因之一是

数学方法论课程注重理论分析,而对如何解题则缺乏实际的指导作用援

可以这么说,重视解题已成为我国中小学数学教学的传统,力求提高解题教学在数学教学中的作用已成为现代数学教学理论的一个特点援但是,我国多年来的数学解题研究并没有从一招一式中摆脱出来,解题教学中的策略与方法意识没有得到足够重视援在我国的数学教学中,一部分人‘高高在上’地大谈理论高深的数学方法,而另一部分人却热衷埋头于繁乱无序的解题招数,这种数学方法论与解题研究严重脱节的局面亟须打破,取而代之的应当是数学方法研究与解题研究的有机结合援通过数学方法论研究为解题研究提供较高层次的方向引导,使解题研究更具效率,同时通过具体的解题研究为数学方法论研究提供鲜活而丰富的素材,做到两者相互促进,各得其所援

因此,在此特别要强调的是,就数学方法论本身的教学而言,一个重要的环节就是应结合典型案例去进行教学,因为,在此所要传授的不应是死的教条,而应是活的方法,但如果离开了具体的数学内容,数学方法论就不可能具有任何生命力援

三、通过挖掘数学史料与学习经典著作进行研究

个人实践活动必定是有限的,为了突破这种局限性,一个有效的方法就是加强数学史、数学的经典著作的学习援事实上正如康德所说的,没有历史的哲学是空洞的哲学援在同样的意义上,我们也可以说,没有数学史的数学方法论是空洞的数学方法论援

另外,就如何联系数学史来开展数学方法论研究而言,一个重要的问题就在于,我们应当清楚地认识到在此所需要的并不是亦步亦趋地去重复历史的进程和某个大数学家的思想过程,在大多数情况下由于缺乏充分的资料,这种重复也是不可能的,而只能是历史的‘理性重建’援这就是说,我们应当通过方法论的分析去揭示数学历史发展或各个具体的数学工作的“合理性”,也就是使它们成为可以理解的、可以学到手的、可以加以推广应用的援显然,按照这样的理解,数学史的学习本身也就是一种创造性的工作,将极大地促进数学方法论研究援

四、数学方法论研究的哲学分析法

数学方法论由于其本身的特殊性，必然与数学的哲学分析有着直接的联系援如果未能从哲学的角度对数学对象的实质性问题作出深入的分析，我们甚至不可能对数学研究究竟是一种发明还是一种发现的问题作出明确回答 ;另外，关于数学抽象的方法论的研究很显然是以相应的哲学分析为必要前提的援当然，我们在此需要的并非是空洞的哲学，事实上，数学哲学本身就是对于由数学研究而产生的哲学问题的研究，从而就具有直接的方法论意义援

正如在现代一个人已经很难通晓数学的各个分支一样，我们也不可能要求数学工作者同时精通自己的专业和哲学，正是出于这样的考虑，除数学方法论的研究者应当努力提高自己的哲学素养以外，大力提倡数学工作者与哲学工作者的有效结合，也是深入开展数学方法论研究的一个重要措施援

第四节摇数学思想方法的发展概述

一、从算术到代数是数学思想方法的一次重大发展

算术是代数产生的基础，代数是算术发展到一定阶段的必然产物援古代算术的主要内容是自然数、分数和小数的性质及四则运算援它的产生表明，人类对客观世界数量关系的认识迈出了具有决定性意义的一步，它是人类在社会实践中不可缺少的数学工具，有着广泛的应用援离开了算术，科学技术的进步几乎是难以想象的援在算术发展的过程中，人们发现，算术解题的局限性在很大程度上限制了数学的应用援正是由于这一矛盾，代数解题法的产生就成了历史的必然援

算术解题法的局限性，主要表现在只允许具体的、已知的数进行运算，不允许抽象的、未知的数参与运算援也就是说，利用算术解应用题时，首先要根据所求的数量，将已知的数量按问题的条件列出算式，然后通过四则运算求出算式的结果援许多古老的数学应用题，如行程问

题、工程问题、分配问题、盈亏问题，等等，都是借助这种方法求解的援这里的关键是列出算式，而对于那些具有复杂数量关系的应用题，要列出相应算式并非易事，而往往需要很高的机敏和技巧援特别是对于那些含有几个未知数的应用题，要通过列出算式求解，有时甚至是不可能的援正是为了解决这一矛盾，便产生了代数解题法援其特点是允许未知数参与运算，把未知数与已知数放在同等地位对待援其解题思想是，首先依据问题的条件列出包括已知数和未知数的方程，然后通过对方程的求解变换求出未知数的值援这时就克服了算术解题法的局限性，使代数解法有了更大的普遍性和灵活性援

解方程是初等代数最基本的内容，它的产生不仅极大地扩充了数学的应用范围，使得许多利用算术不能解决的问题得以解决，而且对数学的发展产生了巨大的影响援例如，对二次方程的求解，导致了虚数的发现；对五次和五次以上方程的求解，导致了群论的产生；等等援

下面举例说明代数解法比算术解法更具先进性援据说牛顿曾提出过这样一个关于牧草和牛的问题：牧场有一片青草，每日生长一样快，放牧 圆苑头牛，远星期吃完援如果改为放牧 圆猿头牛，就 怨星期吃完援问放牧 圆员头牛，几星期吃完？

分析摇根据常识，牛是不会连草根吃掉的，只吃青草的尖叶，草照样生长援因此，这片草地每周生长的青草可以看做是不变的，不因为放牧牛的头数的多少而改变援根据这一分析，要求出 圆员头牛几星期吃完青草，关键是求出两个量：若 员头牛 员周吃完 员份青草，（员）原有的青草有多少份？（圆）每周生长的青草量有多少份？为求这两个量，应从已知条件 圆苑头牛 远周吃完，圆猿头牛则 怨周吃完的差异中去寻求援

解摇（算术解法）设 员头牛 员周吃去了 员份青草，则 圆苑头牛 远周吃去了 圆苑伊远越员远圆（份）援这是原有的青草量与 远周中生长的青草量援圆猿头牛 怨周吃去的青草量为 圆猿伊怨越圆园苑（份）援这是原有的青草量与 怨周生长的青草量援所以 圆园苑原员远圆越源缘（份）是 猿周（怨原远）生长的青草量援从而每周生长的青草量为 源缘衣猿越员缘（份）援原有的青草量为 员远圆原

员缘伊冤远越猿圆(份)援

最后放牧圆原头牛援因为每周生长的青草量为员缘份,刚好可供员缘头牛吃,只需求出原有的青草量可供圆原原员缘越远(头)牛吃几周:猿圆衣远越缘圆(周)援

答:放牧圆原头牛,缘圆周吃完援

根据这一趣题,第三届部分省市初中数学通讯赛曾出了这么一道极其类似的赛题:

例员摇有一片牧场,青草每日生长一样快,如果放牧圆原头牛,远天吃完青草;如果放牧圆原头牛,就愿天吃完青草,设每头牛每天吃的青草量是相等的援问:(员)如果放牧员远头牛,几天可吃完青草?(圆)要使青草永远吃不完,最多可放牧多少头牛?

下面我们用代数解法来解这道题援

解摇(员)设牧场原有草量为葬,每天生长草量为遭,每头牛每天吃掉的草量为糟,并设员远头牛曾天吃完牧草,依题意有

葬垣远遭越圆原伊远糟援 ①

葬垣愿遭越圆原伊愿糟援 ②

葬垣曾遭越员远伊曾糟援 ③

②原①得圆遭越圆原糟即遭越员园糟援 摇摇摇④

③原②得(曾原愿)遭越(员远曾原员远园)糟援 摇摇摇摇摇摇⑤

以④代入⑤解得摇曾越员愿援

(圆)要使青草永远吃不完,最多可放牧赠头牛,即赠头牛吃去的草量不超过每天生长的草量,则赠糟≤遭即赠≤$\frac{遭}{糟}$越$\frac{员园糟}{糟}$越员园援

答:放牧员远头牛,员愿天可吃完青草,要使青草永远吃不完,最多可放牧员园头牛援

二、从综合几何到几何代数化是数学思想的一次质的飞跃

在几何学的漫长发展史中,其体系的思想经过了一系列变革,但起

质的飞跃作用的是从综合几何到几何代数化的辩证法发展援

几何学这一门古老的学科，它形成于公元前三世纪，以欧几里得《几何原本》问世为重要标志援由于综合几何方法证明问题往往需要高超的技巧，而且推理证明的步骤相当繁难，缺乏一般性方法，这给几何学的进一步发展带来了困难援这时，代数学日益成熟，特别是 员远世纪，代数学得到突飞猛进的发展，不仅形成了一套简明的字母符号体系，而且成功地解决了二次、三次、四次方程的求根问题，这使得代数学在数学中的地位逐渐上升援员远世纪法国数学家韦达就曾尝试用代数方法解决几何问题，并萌发了用方程表示曲线的思想援法国数学家笛卡儿继承和发展了韦达先进的数学思想，主张采用几何和代数中一切最好的东西，创立一门普通数学，使算术、代数、几何统一起来援由此他在其著作《几何学》中明确地提出了坐标的思想和曲线方程的思想，并用这些思想解决了许多几何问题援此书的问世标志着解析几何的诞生援用代数方程表示一定的几何轨迹，这正是解析几何的基本思想援

随着解析几何的发展，几何代数的内容和方法不断得到丰富援如牛顿用坐标思想研究了三次方程曲线 ;欧拉全面系统地论述了解析几何的理论 ;拉格朗日又把力、速度和加速度算术化，由此开创了向量理论研究方向援与此同时，坐标概念本身也在不断丰富，除直角坐标外，又相继产生了斜坐标、极坐标、柱坐标和球坐标以及面积坐标、体积坐标、重心坐标援坐标系也从二维扩展到三维以及多维和无穷维，从而又产生了多维和无穷维解析几何，由此导致了泛函分析的产生援

几何代数化对数学发展有着重大意义援首先，它为几何学的研究提供了新的方法，使许多几何问题变得简单易解 ;它使数学从定性研究阶段发展到定量分析阶段，使人们对形的认识由静态发展到动态，对空间的认识由低维发展到高维援其次，它为代数研究提供了形象模型 ;几何学的思想向代数学移植和渗透开拓了代数学新的研究领域援第三，数学引进了变量，为微积分的建立准备了必要的条件援另外，它为数学思想方法论提供了重要的启示援点与数对、曲线与方程相对应的思想的自然

发展，成为函数与点、函数集与空间对应的思想，这为泛函分析理论的创立奠定了基础援

由于笛卡儿的解析几何的问世，沟通了数形之间的关系援这也为初等几何的机器证明奠定了理论基础援在这里，有必要提及我国著名数学家吴文俊院士和张景中院士的开创性工作援他们创立了面积解题系统方法并应用于机器证明的研究，使几何定理可读证明的自动生成这个多年来进展甚少的难题得到了突破援对初等几何的机器证明的问题，在这里我们仅作些感性的介绍援

计算机能解代数题，那么它能否解几何题呢？能！计算机相当于“盲人”，它不认识几何的直观图形，但是它却能认识‘数’援因而证明几何命题只需将它化为代数式，并利用机器进行代数式的四则运算和逻辑推理，用一种特殊的方法，使得用计算机证几何题能够完全实现援应该看到，对于一个简单的几何命题来说，可能机器证明反而繁杂了，那么，又何必舍简而取繁呢？我们说，机器证明决不是孤立地解决一二个特殊题和一批题，而是利用这个模式可以解决几乎所有的初等几何题援其中也包括仅有天才才能解出的难题援在这里，只需按照机器证明的方法机械地进行，在有限步之后，必能立即判断该命题的真伪——当命题的终结被机器证明所肯定时，是真命题；反之，被机器证明所否定时是假命题援而所有这些对人力而言十分复杂的计算，对机器来说，却是轻而易举的事援这样，欧氏几何中添置辅助线的奥秘的高难技巧被回避了，擅长解难题的天才也往往自叹不如援至于一些命题和难题的证明，基于计算机可根据人的意志作机械操作，可使人们从繁杂的计算中解放出来，欧氏几何用代数计算代替，这不能不说是几何史上的一次重大飞跃援

三、从常量数学到变量数学是数学思想方法的一次根本性变革

算术、初等代数、初等几何和三角，是初等数学的主要内容，他们以不变的数量（常量）和固定的图形为其研究对象，因此这部分数学也称为