高等职业技术教育教材

数　　学

第三册

王新芳　主编

中国铁道出版社
2002年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本套教材是针对五年制高等职业技术教育数学课的要求编写的,遵循“加强基础,注重能力,突出应用,增加弹性,适度更新,兼顾体系”的原则定位数学内容,并在每章后附有本章小结和复习题.

本套教材共分三册,第一册是初等数学的代数部分,第二册是初等数学的部分代数和所有几何部分,第三册是高等数学的微积分和空间解析几何部分。本书为第三册,主要内容包括空间解析几何、极限与连续、导数、不定积分和积分、多元函数微积分介绍。

本套教材适合作为高等职业技术教育教材,其中第一、二册也可作为中等职业技术教育教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学. 第 3 册/王新芳主编. —北京:中国铁道出版社,2002.8

高等职业技术教育教材

ISBN 7-113-04804-8

Ⅰ.数… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 060962 号

书　　名:高等职业技术教育教材
　　　　　数学·第三册
作　　者:王新芳　主编
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑:李小军
编辑部电话:市电(010)63583214　路电(021)73133
封面设计:马　利
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:880×1230　1/32　印张:10.375　插页　　字数:　　千
版　　本:2002 年 11 月第 1 版　　2002 年 11 月第 1 次印刷
印　　数:　~　　　册
书　　号:ISBN 7-113-04804-8/O·99
定　　价:18.00 元

前　言

随着教育体制改革和社会对人才培养的需求，五年制的高等职业教育欣然兴起。数学作为现代科技发展的基础，随着科技的高速发展，知识结构的日益更新，其作用越来越突出，它的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分，数学已成为一门必修公共课程。从全面提高素质的角度来说，数学是五年制高等职业教育的一门重要的基础课；从综合职业能力的要求来说，它又是进一步学习及参加社会生活、生产实践所必不可少的工具课。为此，我们根据五年制高等职业教育数学课的要求，遵循“加强基础，注重能力，突出应用，增加弹性，适度更新，兼顾体系”的原则编写了这套数学教材，以供使用和交流。

拓宽基础，以能力为本位是本教材的特点之一。新世纪是“知识经济”的时代，新知识、新技术、新思维层出不穷，每个人都需要树立终生教育和终生学习的远大目标。学生在校学习的内容毕竟是有限的，要想适应社会的进步、知识的更新，就必须具备良好的继续学习的知识基础和基本能力。因此，我们在编写中力求体现“拓宽基础，以能力为本位”的思想。

从教学内容的安排来看，教材尽量采取“具体→抽象→应用”的思路，强化学生能力的培养和科学的思维方法及辩证唯物主义思想的形成，培养基本的运算能力、空间想象能力、数形结合能力、创新思维能力和实际应用能力。因此，我们在教材中增大了生活及各专业实践中的应用例题和习题，积极引导学生用数学知识去解决实际问题，使数学真正体现出它的基础性和工具性，为生活、为其他专业课程服务的特点。

适应教育教学改革和学生不同选择的要求是本教材的又一特点。近期，教育部颁发的高考制度允许职业学校的学生参加普通高考，为高职的学生提供了一个极好的机会。这就要求高职的教材立即跟上，有所改变，有所提高，既要满足学生毕业后马上就业的教学要求，又要对准备参加升学考试的学生起指导作用。为此，本教材的第一、二册包括了所有的初等数学内

容，并且要求较高，题量较大，以满足学生参加再教育考试的需要。另外，教材中内容的多少，知识面的宽窄和练习、习题的难易还兼顾了不同层次学生的需要。

本套教材共分三册。第一册是初等数学的代数部分，第二册是初等数学的部分代数内容及所有的几何部分，第三册是高等数学的微积分和空间解析几何部分。建议学时约为 290。主要供初中起点的高等职业技术教育的学生使用，第一、二册也可供工科专业的中等职业技术教育的学生使用。

本套教材由太原铁路机械学校的张义平担任编委会主任委员，太原铁路机械学校王新芳担任主编；山西省冶金工业学校富伯亭担任副主编。参加编写的人员有昆明铁路机械学校尤磊、太原铁路机械学校李明、太原铁路机械学校周凯和华北机电学校的岳鸿。其中，王新芳负责编写第一、二、五、六、七、十四章；尤磊负责编写第三、四章；李明负责编写第八、九章；周凯负责编写第十、十一、十二、十三章；岳鸿编写第十五、十六、十七章；富伯亭负责编写第十八、十九和第二十章。

在编写中我们努力博采众长，参考了苏州大学出版社出版的江苏省五年制高等职业教育试用教材《数学》，高等教育出版社出版的《高等数学》、全国高等教育自学考试教材《高等数学》、国家教委中等专业学校规划教材《数学》和普通高级中学课本《数学》，以及山西教育出版社出版的职业高级中学课本《数学》等内容。在此向这些教材的编者们表示感谢。

尽管如此，由于时间仓促，我们能力有限，书中难免还存在缺点和错误，望能得到有关专家的指导和批评，不甚感激。

编 者

2002 年 4 月

目　　录

第十四章　空间解析几何

在平面解析几何里，我们通过平面直角坐标系，建立了平面上的点与有序实数对之间的一一对应关系，把平面中的几何图象用图象上点的坐标所满足的代数方程表示，使几何问题可以用代数的方法来解决．空间解析几何与平面解析几何相仿，同样可以通过建立空间直角坐标系，建立空间点与三元实数组之间的一一对应关系，把空间的几何图形用图形中的点的坐标所满足的代数方程来表示，用代数方程的性质来研究空间几何问题．

本章首先介绍空间直角坐标系，然后在空间直角坐标系中研究空间的点、线、面等几何问题．

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条相互垂直且有相同单位长度的数轴，这三条数轴分别称 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为坐标轴，定点 O 叫坐标原点．每两个坐标轴决定的平面称为坐标平面，分别记作 xOy 平面、

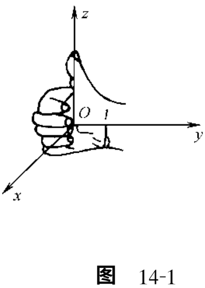

图　14-1

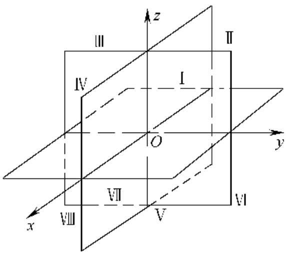

图　14-2

yOz 平面、zOx 平面.对空间直角坐标系坐标轴的正向作如下规定:要符合右手法则,如图 14-1,以右手握住 z 轴,让右手的四指从 x 轴正向以 $90°$ 的角度转向 y 轴正向时,自然伸出的大拇指方向就是 z 轴正向.这种坐标系叫做右手坐标系.在右手坐标系中,从后到前的方向为 x 轴的正向,从左到右的方向为 y 轴的正向,从下到上的方向为 z 轴的正向.

在空间直角坐标系中,三个坐标平面将空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限.八个卦限的编号如图 14-2 所示.

二、空间直角坐标系中点的坐标

设 M 为空间中的已知点,过 M 作三个平面分别垂直 x 轴、y 轴、z 轴于 P、Q、R(如图 14-3),点 P、Q、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 $(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,z)$.于是,空间点 M 确定了唯一一个有序三元实数组 (x,y,z);反之,已知一个有序三元实数组 (x,y,z),我们可以在 x 轴取坐标为 x 的点 P,在 y 轴取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴取坐标为 z 的点 R.然后通过点 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面,这三个平面的交点 M,便是由有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的点.因此,空间中所有点与全体有序三元实数组之间建立了一一对应关系.所以,把组数 (x,y,z) 叫点 M 的坐标,并记为 $M(x,y,z)$,依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.八个卦限内的点的坐标 (x,y,z) 的符号分别如下表所示:

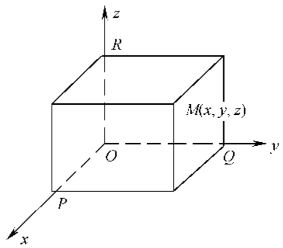

图 14-3

卦限	x(横坐标)	y(纵坐标)	z(竖坐标)
Ⅰ	+	+	+
Ⅱ	−	+	+
Ⅲ	−	−	+
Ⅳ	+	−	+
Ⅴ	+	+	−

续上表

卦　限	x（横坐标）	y（纵坐标）	z（竖坐标）
Ⅵ	−	+	−
Ⅶ	−	−	−
Ⅷ	+	−	−

显然，原点的坐标为 $(0,0,0)$，x 轴、y 轴、z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$，坐标平面 xOy、yOz、xOz 上点的坐标分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$.

例 1　分别写出点 $(1,2,3)$ 关于 x 轴、y 轴、z 轴和坐标平面 xOy、yOz、xOz 及原点的对称点的坐标.

解：点 $(1,2,3)$ 分别关于 x 轴、y 轴、z 轴对称的点的坐标为 $(1,-2,-3)$、$(-1,2,-3)$ $(-1,-2,3)$；

点 $(1,2,3)$ 分别关于坐标平面 xOy、yOz、xOz 对称的点的坐标为 $(1,2,-3)$、$(-1,2,3)$ $(1,-2,3)$；

点 $(1,2,3)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(-1,-2,-3)$.

三、空间两点之间的距离

已知空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求 M_1 和 M_2 之间的距离 d.

过 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 14-4，则

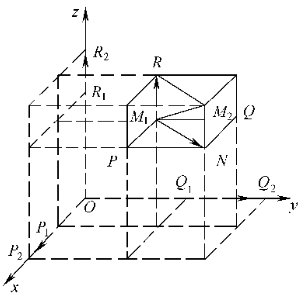

图　14-4

$$
\begin{aligned}
d^2 &= M_1M_2^2 = M_1N^2 + NM_2^2 \\
&= P_1P_2^2 + Q_1Q_2^2 + R_1R_2^2 \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2
\end{aligned}
$$

所以

$$
\boxed{d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \tag{14-1}
$$

该公式称为空间两点间距离公式,如图 14-4 所示.特别地,空间任意点 $M(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 2 求证以 $A(1,2,3)$、$B(3,1,5)$、$C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形为直角三角形.

证明:因为

$AB^2=(3-1)^2+(1-2)^2+(5-3)^2=9$,

$BC^2=(2-3)^2+(4-1)^2+(3-5)^2=14$,

$AC^2=(1-2)^2+(2-4)^2+(3-3)^2=5$,

所以 $BC^2=AB^2+AC^2$.

即 三角形 ABC 为直角三角形.

例 3 在 x 轴上求一点 P,使它与点 $Q(4,1,2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

解:设 x 轴上点 P 的坐标为 $(x,0,0)$,由两点间距离公式得

$$d^2=(4-x)^2+(1-0)^2+(2-0)^2,$$

即得 $x^2-8x-9=0$,

$x=9$ 或者 $x=-1$,

故所求的点为 $P_1(9,0,0)$ 或 $P_2(1,0,0)$.

例 4 z 轴上求一点,使它与 $A(-4,1,7)$、$B(3,5,-2)$ 两点的距离相等.

解:因所求的点在 z 轴上,所以可设该点的坐标为 $M(0,0,z)$,依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即 $\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2}$

两边去根号,解得 $z=\dfrac{14}{9}$,

故所求点的坐标为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

四、球面方程

作为空间两点间的距离公式 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ 的一个简单运用是求球面的方程.根据空间两点间的距离公式,可以求得以 $p_0(x_0,y_0,z_0)$ 为中心,$r(r>0)$ 为半径的球面方程为:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

其中 (x,y,z) 是球面上任意点的坐标. 特别地,中心在原点,r $(r>0)$ 为半径的球面方程是:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

例 5　求中心在 $(1,1,0)$,半径为 2 的球面方程,并验证点 $(1,1,-2)$ 在球面上.

解:设 (x,y,z) 是球面上任意点的坐标,中心在 $(1,1,0)$,半径为 2 的球面方程为:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=4.$$

将点 $(1,1,-2)$ 的坐标代入方程 $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ 中,方程成立,即点 $(1,1,-2)$ 在所求的球面上.

习　题　14-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

A $(1,-2,3)$;B $(2,3,-4)$;C $(2,-3,-4)$;D $(-2,-3,1)$.

2. 当 $P(x,y,z)$ 处于以下位置时,指出它的坐标所具有的特点:

(1) $P(x,y,z)$ 在平面 xOz 上;

(2) $P(x,y,z)$ 在 Ox 轴上;

(3) $P(x,y,z)$ 在与平面 xOz 平行且距离为 2 的平面上;

(4) $P(x,y,z)$ 在与 Oz 轴垂直且与原点距离为 5 的平面上.

3. 在空间直角坐标系中作出下列各点:

(1) $A(1,2,3)$;(2) $B(2,0,0)$;(3) $C(3,0,2)$;(4) $D(2,-1,1)$

4. 求在 y 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

5. 在 yOz 平面上,求与三个已知点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$、$C(2,4,3)$ 等距离的点.

6. 求点 $M(2,-3,-1)$ (1) 关于各坐标平面;(2) 关于各坐标轴;(3) 关于坐标原点对称的点的坐标.

7. 一立方体一个顶点在原点,三条棱分别在三条坐标轴的正半轴上,棱长为 a,写出它的八个顶点的坐标.

8. 写出球面方程:

(1) 球心在 $(1,-1,2)$,半径为 5;

(2) 球心在原点,半径为 4.

讨 论 题

1. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴、各坐标平面的距离.

2. 在平面直角坐标系和空间直角坐标系中,一切 $x=b$ (b 为常数) 的点构成的图形分别是什么?

3. 自点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标平面和坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

4. 过点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点分别有什么特点?

第二节 方向余弦与方向数

前面我们已经学习了平面向量的概念及其运算,下面我们进一步讨论空间向量的一些运算和性质.

一、空间向量的坐标

设沿 x 轴、y 轴、z 轴分别取单位向量 i、j、k,并把它们称为基本单位向量.

设向量 $r=\overrightarrow{OM}$,起点为原点,终点为 $M(x、y、z)$,过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴,与这三条轴的交点分别为 P、Q、R. 显然,过点 M 垂直于 x 轴和垂直于 y 轴的两个平面的交线 MM' 垂直于 xOy 平面,这里 M' 是这条交线在 xOy 平面上的垂足,如图 14-5. 由向量加法的多边形法则,我们有:

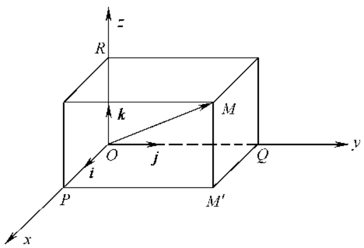

图 14-5

$$r=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

显然,向量 r 与其终点 M 之间构成一一对应关系,即 r 与三元有序数组 x、y、z 之间存在一一对应,因此向量 r 由有序数组 x、y、z 唯一确定,我们把这个有序数组叫做向量 r 的坐标,并记为:$r=\{x、y、z\}$.

利用向量 $r=\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式 $r=\{x、y、z\}$,我们容易得到空间一般向量的坐标表达式:

设已知空间的两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,作以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$,如图 14-6. 连接 $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$,

有 $\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\{x_1,y_1,z_1\}$,

$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=\{x_2,y_2,z_2\}$,

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.\end{aligned}$$

记 $a_x=x_2-x_1$,$a_y=y_2-y_1$,$a_z=z_2-z_1$.

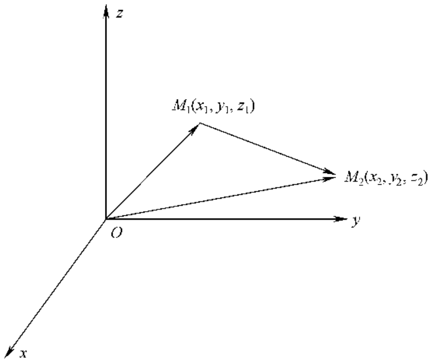

图　14-6

则 $\overrightarrow{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}$.

我们称 a_x、a_y、a_z 为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标.

综上所述,空间任一向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标等于它的终点 M_2 坐标与始点 M_1 对应坐标的差.

二、空间向量的线性运算

利用向量的坐标很容易进行向量的线性运算.设:

$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=\{a_x,a_y,a_z\}+\{b_x,b_y,b_z\}\\&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\};\end{aligned}$$

同理,有

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x,a_y,a_z\}-\{b_x,b_y,b_z\}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$;

$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}=\lambda(a_xi+a_yj+a_zk)=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.

这里 λ 是任意实数.

显然,$a=b$ 的充要条件是$a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$.

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,-3\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,1,-4\}$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{2+2,-1+1,-3-4\}=\{4,0,-7\}$;

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{2-2,-1-1,-3-(-4)\}=\{0,-2,1\}$;

$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\{6,-3,-9\}-\{4,2,-8\}=\{2,-5,-1\}$.

三、向量的方向角与方向余弦

我们知道,向量是由长度(也叫模)和方向确定的,如果非零向量 a 的坐标为$\{a_x,a_y,a_z\}$,那么,它的长度和方向也可以用其坐标来表示.

向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,作向量$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$,则

$\overrightarrow{OM}=\{a_x,a_y,a_z\}$,点 M 的坐标为$\{a_x,a_y,a_z\}$,

因此向量的模为:$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=|OM|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

对于任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，其单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

为了表示 a 的方向，我们引入方向角的概念：

非零向量 a 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角 α、β、γ 称为向量 a 的三个方向角. 我们规定 $0\leqslant\alpha$、β、$\gamma\leqslant\pi$. 方向角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 a 的方向余弦，如图 14-7. 容易推得方向余弦公式：

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|a|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{|a|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{|a|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{aligned}} \tag{14-2}$$

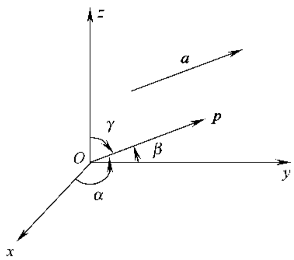

图　14-7

由以上的方向余弦公式很容易得：

(1) 任一非零向量的方向余弦的平方和是 1，即

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1} \tag{14-3}$$

(2) 以原点为始点的任一单位向量的方向余弦就是其端点的坐标.

例 2　求起点为 $M_1(-1,2,3)$，终点为 $M_2(0,3,2)$ 的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式、模、方向余弦、单位向量.

解：$\overrightarrow{M_1M_2}=\{0-(-1),3-2,2-3\}=\{1,1,-1\}=i+j-k$；

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

它的单位向量为：

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,-1\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$