

数 学 的 源 与 流

张顺燕 编著

高 等 教 育 出 版 社

内容介绍

本书是北京大学数学素质教育课的主要教材。

内容包括著名的数学问题、具有重要实用价值的应用问题,还包括数学的一些近代应用。

本书立意新颖、内容丰富、涵盖面广、观点高、起点低,只要具备中等数学的基础就能读懂大部分内容;最后几章要用到初等微积分。本书可作为大专院校数学素质教育的参考书,对广大中学数学教师提高数学素养也极有参考价值。

前 言

1998, 1999 两年, 笔者在中央教育电视台录制了“今日数学”讲座. 对象是广大的中学数学教师. 目的有二:

1. 介绍数学思想的演变和发展, 加深对数学思想的理解;
2. 了解重大数学成果, 及数学对人类文明的贡献, 以达到开拓视野, 启发灵性的效果.

现在的书名是高等教育出版社的张小萍等先生拟定的, 比原名更好. 但是, 单靠书名来概括全书, 这是难以做到的. 还是要请读者看具体内容.

目前素质教育正在全国兴起, 今年秋季北京大学将向全校(不分文、理, 不分年级)开设数学素质教育课. 数学学院领导建议由笔者来开这门课. 笔者欣然接受, 愿为素质教育效一份力. 此书就成为这个课的最主要的教材, 课程的大部分内容将从中选取.

本书也可供兄弟院校作为数学素质教育的教材, 并根据本校的具体情况选取所需内容.

高教出版社的胡乃 先生对此给予以大力支持. 作为急件, 加速排版, 力争在开学初出书, 表现了出版界对素质教育之重视.

在讲座拍摄过程中, 姜伯驹院士、武际可教授、李忠教授、潘承彪教授都曾给予鼓励与支持. 姜伯驹院士建议讲《一笔画与邮递路线问题》, 并慨然将他的名著提供给笔者. 他的著作简单、精要, 笔者基本上按他的著作讲授, 只是后面作了一些引申.

全国人大副委员长丁石孙教授对讲座甚为关怀, 尤为使笔者感动的是, 他的藏书供笔者自由选用. 1999 年春节一次就从他家借书 10 本, 用了一年之久, 使笔者收益甚大. 他主编的《数学、我们、数学》丛书即在其中. 这套丛书论述了数学与社会各个领域的联系, 价值很

高,开了素质教育之先河.

本书需要的预备知识不多,大部分内容只要有高中数学的知识就可读懂.最后几章需要初等微积分的知识.

限于笔者的水平,错误是一定有的,欢迎读者批评指正.

张顺燕 于北京大学燕北园

2000年8月18日

目 录

前言.....	(1)
第一章 数学与人类文明.....	(1)
1.1 数学的内容	(1)
1.2 数学的特点	(2)
1.3 数学对人类文明的贡献	(3)
1.4 数学发展简史.....	(12)
1.5 现代数学发展的新趋势.....	(13)
1.6 计算机的影响.....	(13)
1.7 关于中等教育.....	(13)
第二章 数系	(15)
§ 2.1 无理数的诞生.....	(16)
2.1.1 自然数.....	(16)
2.2.2 代数结构的出现.....	(20)
2.2.3 逆运算的作用.....	(21)
2.2.4 有理数的稠密性.....	(22)
2.2.5 有理数域.....	(23)
2.2.6 第一次数学危机.....	(25)
2.2.7 历史意义.....	(27)
2.2.8 第一次数学危机的消除.....	(28)
2.2.9 层次.....	(28)
2.2.10 反证法	(29)
习题	(30)
§ 2.2 无限的比较.....	(31)
2.2.1 一段富有启发性的历史对话	(31)

2.2.2	对谈话的分析和解答.....	(33)
2.2.3	有理数集是可数的.....	(36)
2.2.4	实数集是不可数的.....	(39)
2.2.5	代数数.....	(40)
2.2.6	无限的算术.....	(43)
2.2.7	结语.....	(44)
	习题	(45)
§ 2.3	复数.....	(46)
2.3.1	复数的引进.....	(46)
2.3.2	复数的几何表示.....	(46)
2.3.3	复数的三角表示和指数表示.....	(48)
2.3.4	复数域.....	(48)
2.3.5	乘方与开方.....	(50)
2.3.6	单位根.....	(52)
2.3.7	复数的确认.....	(56)
	习题	(57)
第三章	连分数及其在天文学上的应用	(58)
§ 3.1	从祖冲之的圆周率谈起.....	(58)
3.1.1	辗转相除法.....	(58)
3.1.2	祖冲之的约率 $22/7$ 和密率 $355/113$	(60)
3.1.3	连分数 1) 引言 2) 简单连分数 和它的渐近分数.....	(60)
3.1.4	约率和密率的内在意义.....	(67)
	习题	(69)
§ 3.2	连分数在天文学上的应用.....	(69)
3.2.1	为什么四年一闰, 而百年又少一闰	(69)
3.2.2	公历的改革.....	(71)
3.2.3	农历的月大月小、闰年闰月	(74)

3.2.4	二十四节气.....	(75)
3.2.5	闰月放在哪儿.....	(76)
3.2.6	日月食.....	(77)
3.2.7	日月合璧,五星联珠,七曜同宫.....	(79)
3.2.8	干支记年.....	(80)
§3.3	连分数的性质.....	(83)
3.3.1	渐近分数的性质.....	(83)
3.3.2	渐近分数的表达式.....	(84)
3.3.3	渐近分数的极限.....	(87)
3.3.4	连分数的几何解释.....	(89)
	习题.....	(90)
3.3.5	最佳逼近.....	(90)
3.3.6	方程 $x^2 = ax + 1$ 的解.....	(94)
3.3.7	斐波那契级数.....	(94)
第四章	素数定理与哥德巴赫猜想.....	(98)
§4.1	初等数论初步.....	(98)
4.1.1	数论是什么.....	(98)
4.1.2	数论的一个特点:表面简单,实际难.....	(99)
4.1.3	素数与合数.....	(99)
4.1.4	素数表.....	(100)
4.1.5	算术基本定理.....	(102)
4.1.6	另一种《算术》.....	(104)
4.1.7	最大公因数.....	(105)
4.1.8	函数 $[x], \{x\}$	(105)
4.1.9	费马素数.....	(108)
4.1.10	完全数与梅森数.....	(110)
4.1.11	高斯的功绩.....	(116)
	习题.....	(117)

§ 4.2 素数定理与哥德巴赫猜想	(118)
4.2.1 素数定理	(118)
4.2.2 哥德巴赫猜想	(121)
4.2.3 有关素数的 12 个问题.....	(125)
第五章 从勾股定理到费马大定理.....	(126)
引言.....	(126)
§ 5.1 一次不定方程	(128)
5.1.1 通解公式	(128)
5.1.2 整数的模	(130)
5.1.3 可解的充要条件	(132)
5.1.4 如何求二元一次方程的解	(133)
5.1.5 二元一次方程的非负解	(135)
5.1.6 多元一次不定方程	(138)
习题.....	(140)
§ 5.2 勾股定理	(140)
5.2.1 问题	(140)
5.2.2 第一个重要定理——勾股定理	(140)
5.2.3 勾股定理的几何方面	(144)
5.2.4 勾股定理的数论方面	(145)
5.2.5 初等方法	(147)
5.2.6 几何方法	(149)
5.2.7 高斯的复整数	(151)
5.2.8 类数问题	(154)
5.2.9 高斯复整数法	(155)
§ 5.3 与勾股定理有关的问题	(156)
5.3.1 已知 x 边求本原三角形	(156)
5.3.2 已知 y 边求本原三角形	(157)
5.3.3 已知 z 边求本原三角形	(158)

习题.....	(162)
§ 5.4 费马大定理	(163)
5.4.1 费马和费马大定理	(163)
5.4.2 无穷递降法	(165)
5.4.3 $n=4$ 的费马定理.....	(166)
5.4.4 $n=3$ 的情形.....	(168)
5.4.5 初等方法的结束	(169)
5.4.6 热尔曼的贡献	(169)
5.4.7 库默尔的工作和理想数	(172)
5.4.8 从丢番图到维尔斯	(173)
5.4.9 费马大定理的推广	(176)
第六章 欧氏几何回顾.....	(178)
§ 6.1 欧几里得几何	(178)
6.1.1 欧氏几何的诞生	(178)
6.1.2 《几何原本》的历史背景	(180)
6.1.3 欧氏几何的内容	(180)
6.1.4 欧氏几何的优缺点	(182)
6.1.5 欧氏几何的历史地位	(184)
6.1.6 几何学在中学数学教育中的地位	(184)
§ 6.2 尺规作图问题	(185)
6.2.1 几何三大难题	(185)
6.2.2 用尺规可作什么图	(186)
6.2.3 有理数域的扩张	(187)
6.2.4 一般讨论	(189)
6.2.5 代数知识	(191)
6.2.6 三大难题的解	(195)
习题.....	(198)
§ 6.3 正多边形作图	(198)

§ 6.4	平行公设引起的思考	(200)
6.4.1	从《几何原本》诞生到 18 世纪.....	(201)
6.4.2	非欧几何的孕育时期	(202)
6.4.3	非欧几里得几何的诞生	(205)
6.4.4	罗巴切夫斯基的解答	(206)
6.4.5	非欧几何的相容性	(207)
6.4.6	黎曼的非欧几何	(208)
6.4.7	欧氏几何与非欧几何	(209)
6.4.8	爱尔兰根纲领	(211)
6.4.9	各种几何与物理空间	(212)
第七章	同余理论及其应用.....	(215)
§ 7.1	同余式的性质	(215)
7.1.1	同余的定义	(215)
7.1.2	同余式的基本性质	(216)
7.1.3	同余式的四则运算	(218)
7.1.4	同余式的方幂	(220)
7.1.5	检查因数的方法	(222)
7.1.6	弃九法(验算整数计算结果的方法)	(224)
7.1.7	剩余类与完全剩余系	(226)
	习题.....	(228)
§ 7.2	中国剩余定理	(229)
7.2.1	同余式	(229)
7.2.2	中国剩余定理	(232)
7.2.3	程大位的口诀	(235)
	习题.....	(238)
§ 7.3	费马小定理和欧拉定理	(238)
7.3.1	费马小定理	(238)
7.3.2	简化剩余系与欧拉函数	(241)

7.3.3	欧拉定理	(244)
7.3.4	对循环小数的应用	(245)
	习题	(248)
§ 7.4	同余式的应用	(249)
7.4.1	在密码学上的应用 1)置换密码 2)仿射变换密码 3)现代密码系统 4)新的挑战 5)具体实现	(249)
7.4.2	素数鉴别 1)判别法 2)费马小定理的逆定理	(258)
7.4.3	星期数	(261)
7.4.4	公式的证明	(263)
7.4.5	循环程序排列	(265)
	习题	(266)
第八章	分形与混沌	(267)
§ 8.1	漫游分形	(267)
8.1.1	引言	(267)
8.1.2	海岸线的长度	(269)
8.1.3	科克曲线	(270)
8.1.4	皮亚诺曲线	(271)
8.1.5	分数维	(273)
8.1.6	几种基本的规则分形 1)康托尔粉尘与魔梯 2)谢尔平斯基衬垫和毯	(275)
8.1.7	自然界中的分形 1)湍流 2)河流 3)肺和血管的构造	(278)
§ 8.2	奇妙的混沌	(282)
8.2.1	混沌的定义	(282)
8.2.2	混沌的发现	(283)
8.2.3	蝴蝶效应	(283)
8.2.4	线性与非线性	(284)
8.2.5	函数的迭代 1)函数的迭代	

2)不动点与周期点	(285)
8.2.6 人口模型	(287)
8.2.7 逻辑斯蒂映射 1)几何意义 2)定态区间 3)周期性态 4)混沌区域 5)混沌中的秩序	(288)
8.2.8 茹利亚集	(293)
8.2.9 芒德布罗集	(295)
第九章 一笔画和邮递路线问题.....	(300)
9.1.1 问题的提出	(300)
9.1.2 一笔画问题	(302)
9.1.3 哥尼斯堡七桥问题	(303)
9.1.4 网络	(305)
9.1.5 一笔画定理 1)网络不是一笔画的特征 2)网络是一笔画的特征	(307)
9.1.6 多笔画	(312)
9.1.7 偶网络	(313)
9.1.8 再论邮递路线问题	(314)
9.1.9 奇偶点网上作业法	(315)
9.1.10 什么是拓扑学.....	(321)
9.1.11 欧拉公式.....	(324)
9.1.12 四色问题.....	(326)
9.1.13 争论与困惑.....	(328)
习题.....	(329)
第十章 代数方程式.....	(331)
§10.1 三次方程与四次方程.....	(332)
10.1.1 什么是代数.....	(332)
10.1.2 二次方程.....	(333)
10.1.3 韦达公式.....	(334)
10.1.4 三次方程.....	(336)

10.1.5	实系数三次方程.....	(339)
10.1.6	卡尔达诺公式小史.....	(341)
10.1.7	三次方程解法总结.....	(341)
10.1.8	四次方程.....	(342)
10.1.9	五次以上的代数方程.....	(345)
	习题.....	(347)
§ 10.2	代数基本定理.....	(347)
10.2.1	引言.....	(347)
10.2.2	代数基本定理的证明.....	(348)
§ 10.3	多项式的根的分布问题.....	(353)
10.3.1	多项式的单根和重根.....	(354)
10.3.2	罗尔定理和它的推理.....	(355)
10.3.3	笛卡儿符号定则.....	(356)
10.3.4	辐角原理.....	(359)
§ 10.4	实根的近似计算法.....	(362)
10.4.1	二分法.....	(363)
10.4.2	插值法.....	(364)
10.4.3	牛顿法.....	(366)
	习题.....	(368)
第十一章	双曲几何的庞加莱模型.....	(369)
§ 11.1	球极平面投影.....	(370)
11.1.1	直线与圆的复数形式.....	(370)
11.1.2	复数的球面表示.....	(372)
11.1.3	球极投影的公式.....	(372)
11.1.4	球极投影的基本性质.....	(374)
§ 11.2	分式线性变换.....	(375)
11.2.1	线性变换 1) 平移变换 2) 伸缩变换 3) 旋转变换.....	(375)

11 2 2	反演变换.....	(377)
11 2 3	倒数变换.....	(379)
11 2 4	分式线性变换.....	(381)
11 2 5	保角性.....	(381)
11 2 6	单位圆到自身的分式线性变换.....	(383)
	习题.....	(384)
§ 11 3	非欧几何的庞加莱模型.....	(384)
11 3 1	非欧平面.....	(385)
11 3 2	非欧刚体运动.....	(387)
11 3 3	罗巴切夫斯基的公理系统.....	(389)
11 3 4	三角形内角和小于 180°	(391)
11 3 5	真理性讨论.....	(391)
第十二章	微积分前期史.....	(395)
§ 12 1	积分学的早期史.....	(397)
12 1 1	欧多克索斯的穷竭法.....	(397)
12 1 2	阿基米德的平衡法.....	(399)
12 1 3	不可分素方法.....	(402)
12 1 4	不可分素方法的进一步发展.....	(404)
12 1 5	刘徽的贡献.....	(404)
12 1 6	祖 原理.....	(406)
§ 12 2	微分学的早期史.....	(407)
12 2 1	费马以前的工作.....	(408)
12 2 2	费马求极大、极小值的方法	(408)
12 2 3	费马求切线的方法.....	(410)
12 2 4	费马在积分学方面的贡献.....	(411)
12 2 5	巴罗的贡献.....	(413)
12 2 6	前期史小结.....	(415)
§ 12 3	牛顿和莱布尼兹.....	(416)

§ 12.4	光辉的诞生.....	(420)
第十三章	实数理论.....	(422)
§ 13.1	第二次数学危机.....	(422)
13.1.1	英雄世纪.....	(422)
13.1.2	第二次数学危机.....	(423)
13.1.3	柯西的功绩.....	(425)
13.1.4	外尔斯特拉斯的规划.....	(426)
§ 13.2	实数集合的基本性质.....	(428)
13.2.1	从有理数谈起.....	(428)
13.2.2	戴德金分划.....	(431)
13.2.3	实数的性质.....	(433)
13.2.4	实数集合的有序化.....	(434)
13.2.5	实数集合的连续性.....	(435)
13.2.6	确界存在定理.....	(437)
	习题.....	(439)
§ 13.3	实数的四则运算.....	(439)
13.3.1	实数和的定义.....	(439)
13.3.2	对称数.....	(441)
13.3.3	实数减法的定义.....	(442)
13.3.4	实数的绝对值.....	(442)
13.3.5	实数的积的定义.....	(443)
13.3.6	实数商的定义.....	(444)
§ 13.4	根的存在性.....	(445)
13.4.1	具有有理指数的乘幂.....	(445)
13.4.2	任何实指数的乘幂.....	(447)
	习题.....	(447)
第十四章	极限、连续与积分.....	(448)
§ 14.1	极限论.....	(448)

14.1.1	单调序列.....	(449)
14.1.2	区间套定理.....	(451)
14.1.3	收敛原理.....	(453)
14.1.4	有限覆盖定理.....	(457)
14.1.5	极限思想辩证剖析.....	(457)
14.1.6	函数的极限.....	(458)
14.1.7	小结.....	(459)
§ 14.2	函数的连续性.....	(460)
14.2.1	中间值定理.....	(460)
14.2.2	函数的最大、最小值定理	(463)
14.2.3	一致连续性.....	(464)
§ 14.3	黎曼积分.....	(467)
14.3.1	黎曼积分.....	(467)
14.3.2	达布和.....	(469)
14.3.3	达布和的性质.....	(469)
14.3.4	积分存在的条件.....	(471)
14.3.5	可积函数类.....	(472)
第十五章	数学模型.....	(476)
§ 15.1	选票分配.....	(478)
15.1.1	何谓悖论.....	(478)
15.1.2	选举悖论.....	(478)
15.1.3	选票分配问题.....	(480)
15.1.4	亚拉巴马悖论.....	(482)
§ 15.2	体育训练问题.....	(484)
§ 15.3	指数增长与衰减问题.....	(487)
15.3.1	一个简单的微分方程.....	(487)
15.3.2	人口模型.....	(488)
15.3.3	再论人口模型.....	(490)

15 3 4	三论人口模型.....	(495)
	习题.....	(498)
15 3 5	新产品销售模型.....	(498)
15 3 6	牛顿冷却定律.....	(499)
§ 15 4	在考古学中的应用.....	(501)
15 4 1	放射性年龄测定法.....	(501)
15 4 2	范·米格伦伪造名画案	(504)
	小结.....	(510)
	习题.....	(512)
第十六章	外微分形式.....	(513)
16 1	场论的三个基本公式.....	(513)
16 2	曲面的定向.....	(514)
16 3	外乘积.....	(515)
16 4	微分形式和它的外微分.....	(520)
16 5	在场论中的应用.....	(523)
	习题.....	(526)
第十七章	数学的真理性.....	(527)
17 1	数学的证明和科学的证明.....	(527)
17 2	数学的公理化.....	(528)
17 3	天衣有缝.....	(529)
17 4	希尔伯特和他的 23 个问题	(530)
17 5	罗素的悖论和第三次数学危机.....	(536)
17 6	20 世纪初的一场大辩论	(538)
17 7	哥德尔的不完全性定理.....	(540)
	答案与提示.....	(542)
	参考文献.....	(551)