*第七章　立体几何简介

我们生活在立体空间之中，所接触的物体形状都是些空间图形. 空间图形由点、线、面这些基本元素组成,它的所有点不全在同一平面内. 立体几何(solid geometry)主要研究空间图形的概念、性质及其应用.

本章将介绍立体几何的基本知识，包括平面 (plane) 和它的基本性质；直线 (straight line)与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，它们之间所成角的定义；以及柱(cylinder)、锥 (cone)、台 (frustum) 、球 (ball)的表面积及体积的计算方法.

§7-1 平面及其基本性质

一　平面及平面图形的表示法

平面是广阔无涯无厚度的,也就是说,平面是可以无限延展的. 我们日常见到的一些简单的平面图形,如黑板面、窗玻璃面、课桌面等等,都可看作平面的一部分,它们大都具有矩形的形状. 当我们在适当的距离和角度观察这些矩形时，会感觉它们都象平行四边形. 因此在立体几何中，通常可把平面的示意图画成平行四边形，如图 7-1所示. 由于平面是广阔无涯的,所以平行四边形的周界线仅仅是示意,并不真实存

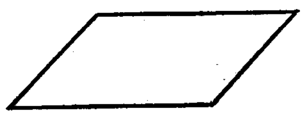


图 7-1

在，或者也可以说平行四边形只是所表示的平面的一部分.

在立体几何中通常用希腊字母 α、β、γ 等表示平面，把它们写在平行四边形的某一角的内部；有时也用平行四边形顶点的字母表示平面，如图 7-2(1)，可记作平面 $ABCD$ 或平面 α 等等. 还规定，显露的部分画实线，被遮的部分画虚线或省略不画，如图 7-2(2)(3)所示.

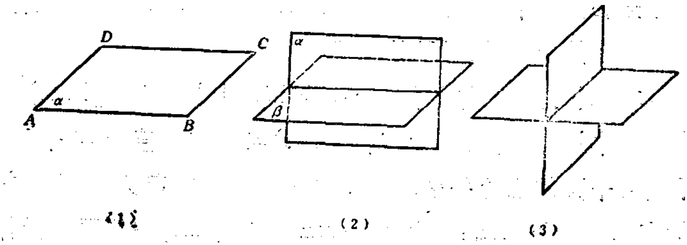


图 7-2

在水平平面内画平面图形，按画法几何的规定，一般不画它的真实形状，例如矩形往往画成一个锐角为 45° 的平行四边形，其中，水平的一边方向不变并保持原长度，竖直的边则偏转 45° 并缩为原长的一半；其它的平面图形也可类似地画出，这就得到了平面图形在水平平面内的示意图，如图 7-3 所示。

二　平面的基本性质

通过长期的实践，人们总结出关于平面的三条基本性质，把它们作为公理，这些公理是研究立体几何的理论基础.

公理 1　如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上的所有点也都在这个平面内.

如图 7-4所示，已知直线 l 上有两个点 A 和 B 在平面 α

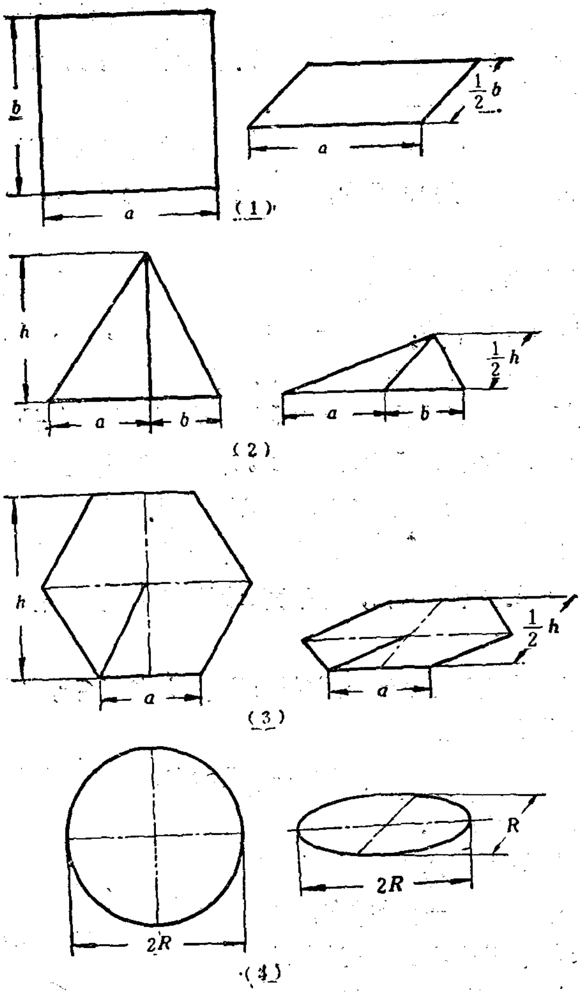


图 7-3

内，则直线 l 上所有的点都在平面 α 内。

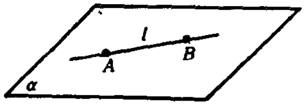


图 7-4

这种情况我们叫做直线 l 在平面 α 内或平面 α 经过直线 l。

例如把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺的边缘全部落到桌面上，

为了叙述的方便，在研究点、线、面位置关系时，可以使用集合的符号和术语。通常可以认为点是元素，而直线和平面都可以看成点的集合，因此有以下写法：

点 A 在直线 l 上，即直线 l 通过点 A，记作 $A\in l$；

点 A 不在直线 l 上，即直线 l 不通过点 A，记作 $A\notin l$；

点 A 在平面 α 内，即平面 α 通过点 A，记作 $A\in\alpha$；

点 A 不在平面 α 内，即平面 α 不通过点 A，记作 $A\notin\alpha$

直线 l 在平面 α 内，即平面 α 通过直线 l，记作 $l\subset\alpha$ 或 $\alpha\supset l$。

于是公理 1 可表示为：如果 α 为平面，点 $A\in\alpha$，点 $B\in\alpha$，那么直线 $AB\subset\alpha$。

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线。

如图 7-5 所示，如果点 A 是平面 α 与平面 β 的一个公共点，那么平面 α 与平面 β 就相交于过点 A 的一条直线 a。这时我们说平面 α 与平面 β 相交于直线 a。

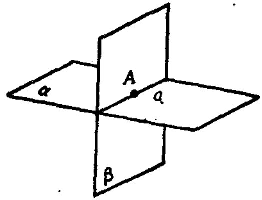


图 7-5

例如天花板与墙壁的交线是一条直线；折纸的折痕是两个平面的交线，也是一条直线。

平面 α 与平面 β 相交于直线 l，可记作

$$\alpha\cap\beta=l.$$

于是公理 2 可表示为：如果点 $A\in\alpha$，点 $A\in\beta$，那么 $\alpha\cap\beta=l$，其中 $A\in l$.

公理 3　过不在一条直线上的任意三点，存在且仅存在一个平面.

如图 7-6 所示，如果 A、B、O 是不在同一直线上的三个点，那么经过这三点，存在且仅存在一个平面 α.

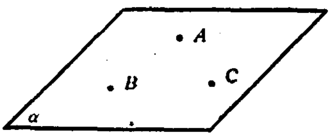


图　7-6

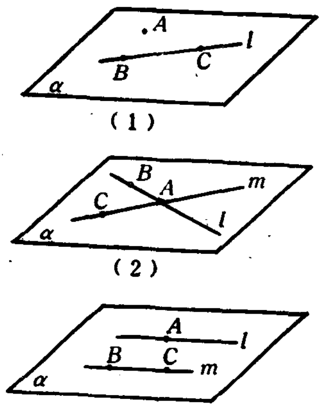


图　7-7

公理 3 可以简单地说成“不在同一直线上的三点确定一个平面”. 其中“确定一个平面”是指“存在且仅存在一个平面”的意思.

例如把一扇门上的两个合页和一把锁看作是不在同一条

直线上的三个点，那么锁上门后，门所在的平面就被确定，于是门就固定不动了。

根据公理1和公理3，还可以得到确定一个平面的三个推论.

推论1 一条直线和这条直线外的一点可确定一个平面.

如图7-7(1)所示，设A是直线l外的一点，在l上取B、C两点，则点A、B、C不在同一条直线上，它们可以确定平面α；而直线上有两个点B、C在平面α内，则直线l也在平面α内. 所以这样的平面α仅有一个.

推论2 两条相交直线可以确定一个平面.

如图7-7(2)所示，设直线l与m相交于点A，除点A外在直线l与m上分别取点B和C，则点A、B、C不在同一直线上，所以它们可以也仅可以确定一个平面.

推论3 两条平行直线可以确定一个平面.

如图7-7(3)所示，根据不在同一条直线上的三点及平行直线的意义，它们可以也仅可以确定一个平面.

习　题　7-1

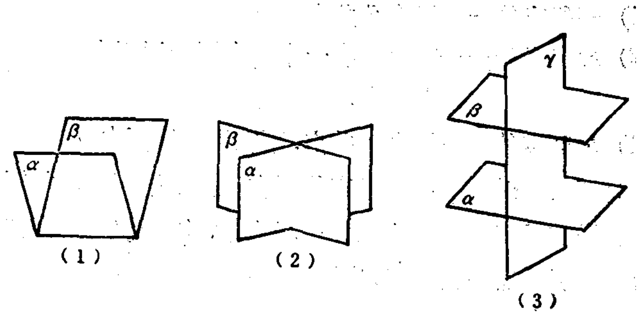
1. 仿照图7-3在水平平面上画出三角形、正方形、梯形、正六边形及圆的示意图.

2. 试判断下面所画的平面与平面相交的图形是否正确，并给以改正.（见第7页图）

3. 回答下列问题：

(1) 四点中有三点在一条直线上，则这四点的位置如何？过这四点可以确定几个平面？

(2) 一条直线分别与两条平行直线平行，这三条直线必在同一平



（第 2题图）

面内吗？

(3) 过一点任作三条直线，它们是否在同一平面内？

(4) 一条直线与两条平行直线分别相交，这三条直线是否在同一平面内？若与两条相交直线分别相交，这三条直线是否在同一平面内？

§7-2　直线与直线的位置关系
异面直线所成的角

一　直线与直线的位置关系

本章所说的两条直线，通常指不重合的两条直线． 我们知道在同一平面内的两条直线的位置关系只有两种：平行或相交．但在空间，两条直线还存在着另外一种位置关系．例如，教室中黑板的下沿与窗框的上沿所在的两条直线；电车的输电线与路旁的电线杆所表示的两条直线，它们不在同一平面内,既不平行也不相交．对于具有这种位置关系的直线，给出以下定义：

定义不在同一平面内的两条直线叫做异面直线．

于是空间两条直线的位置关系有以下三种：

(1) 平行直线——没有公共点，
(2) 相交直线——有且仅有一个公共点，
}在同一平面内；

(3) 异面直线——没有公共点，不在同一平面内.

画异面直线时，要把两条直线画在不同的平面内，如图 7-8(1)、(2)、(3)的画法就比较直观，而图 7-8(4)、(5)的画法不能显示出异面直线的特点，应该避免，

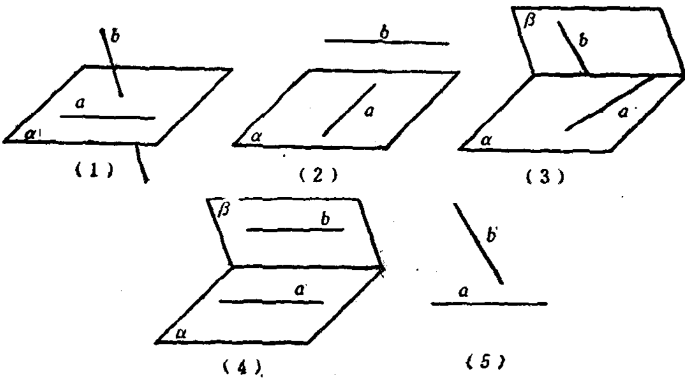


图 7-8

我们知道，在同一平面内，平行于同一条直线的两条直线一定平行，在空间也有类似的结论.

定理 1 （三线平行定理）空间三条直线，如果其中两条直线都平行于第三条直线，那么这两条直线也相互平行.（证明从略）

如图 7-9 所示，若直线 $a\parallel b$, $c\parallel b$，则 $a\parallel c$.

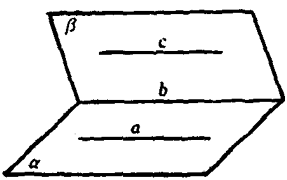


图 7-9

例如挂在墙上的矩形镜框，已知镜框的上沿平行于下沿，所以悬挂时只要使下沿线与地板缝平行，就可知上沿线一定也和地板缝平行.

例 1 四个顶点不在同一平面内的四边形叫做空间四边形. 如图 7-10所示，已知空间四边形 $ABCD$, E、F、G、H分别是 AB、BC、CD、DA 的中点.

求证 $EFGH$ 是平行四边形.

证 连结线段 BD(它是空间四边形 $ABCD$的一条对角线),则线段 AB BD DA 组成 $\triangle ABD$, EH 是它的中位线,所以

$$EH \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD.$$

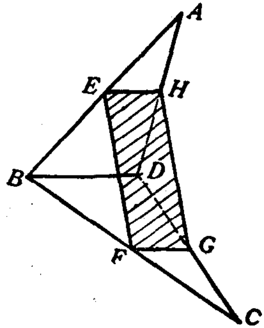


图 7-10

同理线段 BC、CD、DB 组成 $\triangle BCD$, FG 是它的中位线,所以

$$FG \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD.$$

由三线平行定理可知

$$EH \underline{\parallel} FG,$$

因此 $EFGH$ 是一个平行四边形.

利用与同一条直线平行的关系可以推出空间许多直线彼此相互平行. 如图 7-11 所示，把一张长方形的纸对折两次，所得到的折痕都是相互平行的.

此外，类似于平面几何中对应边平行且方向相同的两个角相等,空间也有这样的定理.

定理 2 不在同一平面内的两个角，如果其中一个角的

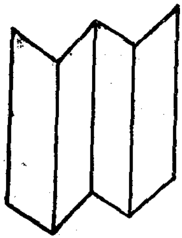


图 7-11

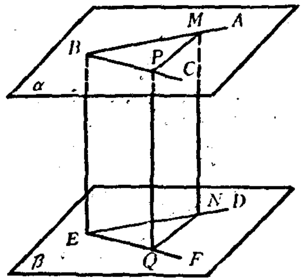


图 7-12

两边与另一个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等.

已知　$\angle ABC$在平面 α上，$\angle DEF$在平面 β 上，其中 $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$,并且方向相同,如图 7-12 所示.

求证　$\angle ABC = \angle DEF$.

证　在两个角的对应边 BA 与 ED 上分别截取 $BM = EN$,在 BC 与 EF 上分别截取 $BP = EQ$,连结 BE、MN、PQ、MP和 NQ.

因为 $BM \underline{\parallel} EN$，所以 $BMNE$ 是平行四边形，于是它的另一组对边 $BE \underline{\parallel} MN$.

同理可证　　　$BE \underline{\parallel} PQ$,

因此　　　$MN \underline{\parallel} PQ$,

即 $MPQN$ 也是平行四边形,则有

$$MP \underline{\parallel} NQ.$$

于是 $\triangle MBP \cong \triangle NEQ$,从而 $\angle MBP = \angle NEQ$,即

$$\angle ABC = \angle DEF.$$

二　异面直线所成的角

平面内两条相交直线的位置关系可以用它们的交角来表示。而两条异面直线不在同一平面内，它们既不平行又不相交，为了表示它们的位置关系，给出如下的定义：

定义经过空间任意一点，分别作与两条异面直线平行的直线，这两条直线相交所成的锐角（或直角）叫做两条异面直线所成的角。

图 7-13 就是异面直线所成的角的两种常见的画法。

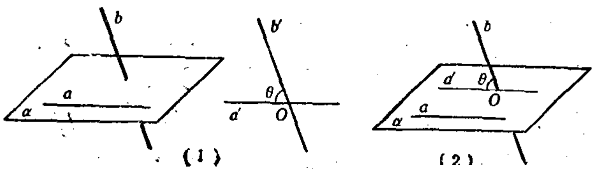


图　7-13

因为两个角的两条边对应平行且方向相同时，这两个角就相等，所以两条异面直线 a 与 b 所成角的大小，只决定于 a 与 b 的相对位置，而与任选的点 O 的位置无关。

成 $90°$ 角的两条异面直线叫做是相互垂直的，异面直线 a 与 b 垂直也记作 $a \perp b$。

例 2　如图 7-14 所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，试分析下列各对线段的位置关系并指出所成角的度数。

(1)　AB 与 CC_1;

(2)　AA_1 与 B_1C;

(3)　A_1D 与 B_1C;

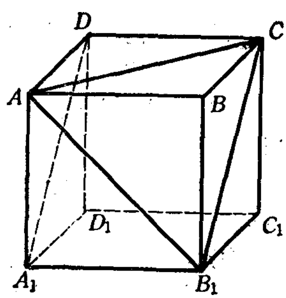


图　7-14

(4) A_1D 与 AC.

解 (1) AB 与 CC_1 是异面直线. 因为 $AB \parallel DC$, 所以 AB 与 CC_1 所成的角可用 $\angle DCC_1$ 度量. 而 $\angle DCC_1=90°$, 故 AB 与 CC_1 成 $90°$ 角, 即 $AB \perp CC_1$.

(2) AA_1 与 B_1C 是异面直线. 因为 $AA_1 \parallel BB_1$, 所以 AA_1 与 B_1C 所成的角可用 $\angle BB_1C$ 度量, 而 $\angle BB_1C=45°$, 故 AA_1 与 B_1C 成 $45°$ 角.

(3) A_1D 与 B_1C 是四边形 A_1DCB_1 的一组对边, 因为在正方体上 $A_1B_1 \mathrel{\underline{\parallel}} DC$, 所以 A_1DCB_1 是平行四边形, 它的另一组对边 $A_1D \mathrel{\underline{\parallel}} B_1C$, 即 A_1D 与 B_1C 成 $0°$ 角.

(4) A_1D 与 AC 是异面直线. 因为 $A_1D \parallel B_1C$, 所以 A_1D 与 AC 所成的角可用 $\angle ACB_1$ 度量, 而 $\angle ACB_1$ 是 $\triangle ACB_1$ 的一个内角, 不难看出, $\triangle ACB_1$ 是个等边三角形, 因此, $\angle ACB_1=60°$, 故 A_1D 与 AC 成 $60°$ 角.

习 题 7-2

1. 回答下列问题:

(1) 分别位于两个平面内的两条直线一定是异面直线吗?

(2) 空间两条直线没有公共点, 它们一定是平行直线吗?

(3) 一条直线和两条异面直线分别相交, 共可确定几个平面?

(4) 平行于同一直线的许多空间直线是相互平行的, 那么垂直于同一直线的许多空间直线相互平行吗?

2. 已知直线 a、b、c 和平面 α, 其中 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, 且 $a \parallel b$, 而 a 与 c 成 θ 角. 那么

(1) b 与 c 成多大的角? 为什么?

(2) 如果 c 不在平面 α 内, 那么 a 与 c, b 与 c 一定是异面直线吗?

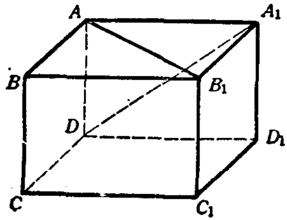
3. 如果一条直线垂直于两条平行直线中的一条, 那么与另一条直

线有什么位置关系？

4．在图中所表示的长方体中，已知 $AA_1=4\,\text{cm}$，$AB=BC=3\,\text{cm}$．试求：

(1) 异面直线 AB_1 与 DC 所成的角(用反三角函数表示)；

(2) 异面直线 AB_1 与 A_1D 所成的角(用反三角函数表示)．



(第 4题图)

§7-3　直线与平面的位置关系

一　直线与平面的位置关系

观察周围的实际事物可以发现，直线与平面的位置关系有三种情况：

(1) 直线在平面内，即直线与平面有无数多个公共点；

(2) 直线与平面有一个公共点；

(3) 直线与平面没有公共点．

例如教室的墙与地面的交线是条直线，它就在地平面上；两面相邻的墙的交线也是条直线，它与地平面只有一个公共点；而墙与天花板的交线，则是一条与地平面没有公共点的直线．

对于后两种情况，给出以下的定义：

定义　一条直线如果与平面没有公共点，那么这条直线叫做与平面是平行的；一条直线如果与平面只有一个公共点，

那么这条直线叫做与平面是相交的.

直线 a 平行于平面 α,记作 $a /\!/ \alpha$,或 $a \cap \alpha = \phi$;

直线 a 与平面 α 相交于点 A,记作 $a \cap \alpha = A$.

于是直线与平面的位置关系有以下三种:

(1) 直线在平面内——有无数多个公共点;

(2) 直线与平面相交——有且仅有一个公共点;

(3) 直线与平面平行——没有公共点.

画直线与平面平行时,要把直线画在表示平面的平行四边形外面,并且与平行四边形的一条边平行,如图 7-15(1) 所示 画直线与平面相交时,要把直线延伸到表示平面的平行四边形的外边,如图 7-15(2)所示.

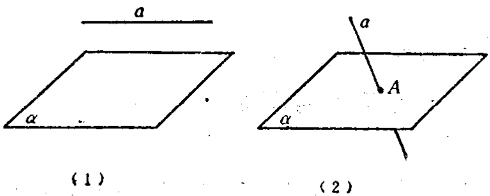


图 7-15

二　直线与平面平行

我们知道在房间里,只要天花板与墙的交线平行于墙与地面的交线,那么天花板与墙的交线就平行于地面. 因此有下面的定理:

判定定理　如果平面外一条直线与平面内一条直线平行,那么这条直线与这个平面平行.

如图 7-16 所示,如果直线 $a /\!/ b$,而 a 在平面 α 外,$b \subset \alpha$,那么 $a /\!/ \alpha$.(证明从略)

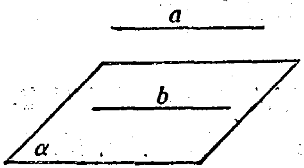


图 7-16

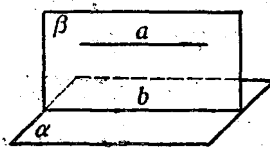


图 7-17

性质定理 如果一条直线平行于一个已知平面，且过这条直线的平面和已知平面相交，那么这条直线就和交线平行.

已知如图 7-17 所示，$a /\!/ \alpha$, $a \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = b$.

求证 $a /\!/ b$.

证 因为 $a /\!/ \alpha$,所以 a 与 α 没有公共点.又因为 $b \subset \alpha$,所以 a 与 b 也没公共点. 但 a 与 b 同在平面 β 内，它们没有公共点,所以 $a /\!/ b$.

例 1 如图 7-18 所示，已知 $a \subset \beta$, $a \subset \gamma$, $\alpha \cap \beta = b$, $\alpha \cap \gamma = c$, 且 $a /\!/ b$.

求证 $b /\!/ c$.

证 因为 $a /\!/ b$ 且 $b \subset \alpha$, 所以 $a /\!/ \alpha$；而 $\alpha \cap \gamma = c$, 且 $a \subset \gamma$, 所以 $a /\!/ c$. 于是 $b /\!/ c$.

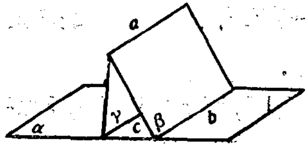


图 7-18

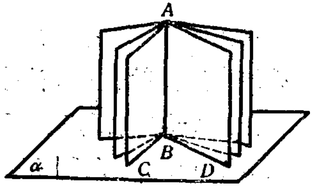


图 7-19

三 直线与平面垂直

把一本书打开直立在桌面 α 上,设书脊为 AB, 各页与桌

面的交线分别为 BC, BD, $\cdots$，显然 AB 与这些交线都是垂直的,如图 7-19所示.

定义　如果一条直线与平面内任何一条直线都垂直，那么就说这条直线与平面垂直，并把这条直线叫做平面的垂线，而这个平面叫做这条直线的垂面.

过一个已知点有且仅有一条直线与平面垂直，这条垂线与平面的交点叫做垂足.

画直线与水平平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的横边垂直,如图 7-20 中的 AB.

直线 l 垂直于平面 α, 记作 $l\perp\alpha$.

判定一条直线是否与平面垂直，并不需要验证它与平面内所有的直线都垂直,而有以下定理：

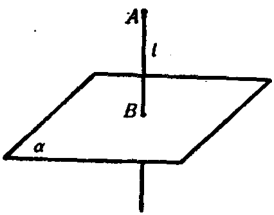


图　7-20

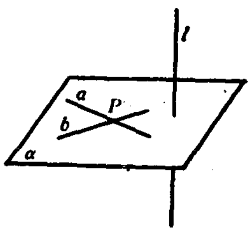


图　7-21

判定定理　如果一条直线垂直于平面内两条相交直线，那么这条直线就垂直于这个平面.

如图 7-21 所示,直线 $l\perp a$, $l\perp b$,而 $a\subset$ 平面 α, $b\subset$ 平面 α,且 $a\cap b=P$,那么 $l\perp$ 平面 α.（证明从略）

例如在植树或立电线杆时,为了使它们与地面垂直,总要从两个不同方向检查它们是否与地面上某些直线垂直，就是这个道理

另外,由上面的定理可以推出,如果两条平行直线中的一条直线与一个平面垂直，那么另一条直线也与这个平面垂直.这个结论也可作为判定定理使用.

性质定理　如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线互相平行.（证明从略）

例 **2**　平面 α 内有直角 $\triangle BAC$, $\angle BAC=90°$, $AB=4$ 厘米, $AC=3$ 厘米,而 $PA\perp\alpha$, $PB=5$ 厘米.

求　PA, BC 和 PC 的长（精确到 0.1厘米）.

解　如图 7-22所示：

(1) $\because$ $PA\perp\alpha$, $AB\subset\alpha$, $\therefore$ $PA\perp AB$. 因此在直角 $\triangle PBA$ 中有

$$PA=\sqrt{PB^2-AB^2}$$
$$=\sqrt{5^2-4^2}=3\text{（厘米）};$$

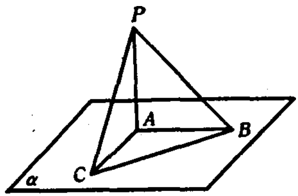


图　7-22

(2) 在直角 $\triangle ABC$ 中有

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}$$
$$=\sqrt{4^2+3^2}=5\text{（厘米）};$$

(3) $\because$ $PA\perp\alpha$, $AC\subset\alpha$, $PA\perp AC$, 因此在直角 $\triangle PAC$ 中有

$$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{3^2+3^2}\approx4.2\text{（厘米）}.$$

四　直线与平面斜交

1　斜线及其在平面内的射影

一条直线和一个平面相交但不和它垂直，这条直线叫做平面的斜线,斜线和平面的交点叫做斜足.

从平面外一点向平面引垂线和斜线，从这点到垂足间的