中央广播电视大学职业教育指定教材

数　　学

（下　册）

张国昌　主编

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学.下册/张国昌主编.—北京:中央广播电视大学出版社,2000.8

中央广播电视大学职业教育指定教材

ISBN 7-304-01928-X

Ⅰ.数…　Ⅱ.张…　Ⅲ.数学-电视大学-职业教育-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 68787 号

中央广播电视大学职业教育指定教材

数　　学

(下册)

周朝晖　主编

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京市友谊印刷经营公司

开本/787×1092　1/16　**印张**/12.75　**字数**/286 **千字**

版本/2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷

印数/0001—4000

社址/北京市复兴门内大街 160 号　　**邮编**/100031

电话/66419791　66417896　　**(本书如有缺页或倒装,本社负责退换)**

书号:ISBN 7-304-01928-X/O·104

定价:12.30 **元**

出 版 说 明

中央广播电视大学职业教育指定教材的编写宗旨是:根据职业教育的特点,紧密结合职业教育培养目标,针对学生需要,充分依靠学科骨干(都是媒体设计制作专家),进行面向21世纪的多种媒体教材建设。其中,文化课教材强调以提高学生科学文化素质为主,并注重知识的实际应用和实践能力的培养;专业基础课教材和专业课教材力求突出职业教育的特色,在教材内容上尽量反映生产第一线的知识、技术、工艺和技能,知识含量以学生未来适应工作岗位的需要为尺度,并能适应广大学生的自学要求。

经审定,本套职业教育指定教材可以用做各级各类职业教育教材,亦可供广大读者自学参考。

中央广播电视大学

前　言

本书根据中央广播电视大学2000年4月审定通过的《数学课程教学大纲》，在有关部门的关心指导下编写而成.

根据职业教育的特点和面向21世纪对数学课程教学改革的要求，本书编写时力求遵循以下原则：

(一)注重衔接，便于自学

针对学员起点低、差异大、分布广的特点，本书切实注意与初中数学基础的衔接，充分尊重学习过程的认知规律.对新知识的阐述，坚持实例引路，循序渐进，深入浅出.每节配备练习题，每章配备本章小结和复习思考题，适当增加例题，注重例题、练习题及复习思考题的相互配合，同时配备《数学辅导与练习》和相应的音像教材.

(二)保证基础，富有弹性

本书在选材上注意返璞归真，以简驭繁，注意渗透"大众数学(Mathematic of All)"意识，从传统的数学教材中加以精选，并在系统上作局部调整，保证必要的基础，削枝强干，贯彻必需、够用的原则，保证学员的基本数学素质.为体现为后继课程服务的要求，本书安排了一定章节的选学内容，以满足不同专业的教学需要.

(三)淡化理论，立足应用

本书尊重学科，但不恪守学科性，淡化理论推证，尽量借助图形、实例来解释验证，使抽象问题具体化、形象化.注意渗透"问题解决(Problem Solving)"的思想，进一步贯彻以应用为目的的原则，贴近生活，联系实际，充实了应用型的例题和习题，引导学员将数学知识应用到生产实践中去，切实培养学员运用数学分析问题、解决问题的能力.

(四)强化能力，适度更新

本书重视数学思想和方法的揭示，注重基本概念实际背景的揭示，注意将一些重要的数学思想(集合思想、函数思想、化归思想、形数结合思想、极限思想、微元法思想等)和方法贯穿于全书内容之中，同时还注重培养学员科学的、良好的思维习惯，以切实提高学员的综合数学能力和学习素质.考虑到计算机技术为特征的信息社会对数学课程的要求，本书适时、适度地将计算器使用及现代化的教学媒体引入课堂，以提高读者对基本工具的使用能力.

本书分为上、下两册，上册内容包括：集合与函数、三角函数、平面解析几

何、数列、复数、立体几何、计算器的使用；下册内容分为三个部分：一元函数微积分学（极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用）、概率初步、线性代数初步．

全书编写力求做到文字精炼、简明、生动，语言准确，结构合理，条理清晰，重点突出，操作性强．

本书由张国昌（华东船舶工业学院）主编，臧正松（华东船舶工业学院）、于庆汉（天津市物资贸易学校）担任副主编．具体编写分工如下：张国昌（第一、五、七、八、九章）；臧正松（第三、六、十、十一章）；于庆汉（第二、十三章）；张艳松（第四、十二章），全书由张国昌、臧正松、赵坚总纂定稿，由中央广播电视大学出版社钱辉镜社长主审．

本书在编写过程中，得到中央广播电视大学校领导的大力支持和热忱帮助，书中参考了国内同类教材，在此一并致以衷心的感谢．

本书在编写过程中，虽然编者四易其稿，尽了最大努力，但限于编者水平，加之编写时间仓促，以及数学教学改革中不少问题还有待于进一步探索，因此，书中不足与疏漏之处在所难免，恳请广大读者和用书单位不吝批评指正．

编　者
2000 年 8 月

目　录

目录

第七章

极限与连续

极限是数学中一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础.本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，学习极限的描述性定义，讨论极限的有关性质及其运算，最后扼要给出连续函数的概念和性质，为以后的学习做必要的准备.

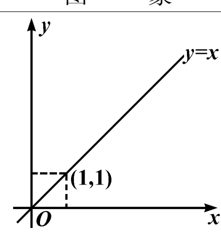
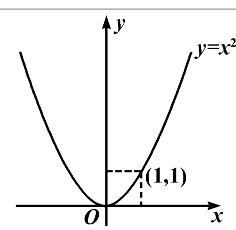
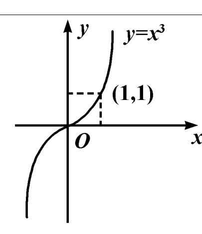
§7—1 初等函数

一、基本初等函数

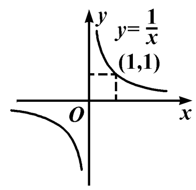
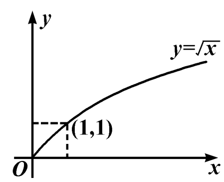
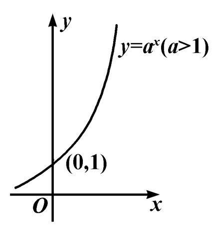
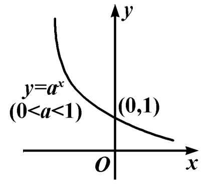
我们把幂函数 $y=x^{a}$（a 为实数）、指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）、三角函数（$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$）和反三角函数（反三角函数的有关内容在前面未作介绍，有兴趣的学员可参看有关书籍）统称为**基本初等函数**.这些函数是我们今后研究其他各种函数的基础.

现把一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图象和特性列表说明如下（表 7—1）.

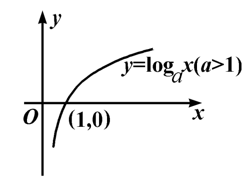
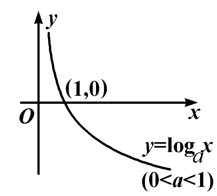
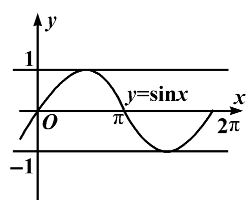
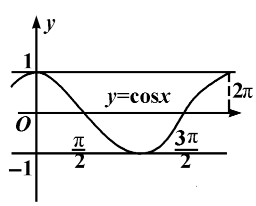
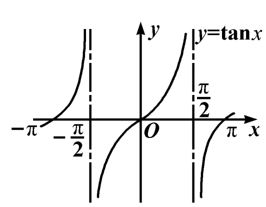
表 7－1 常用的基本初等函数

	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{2}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^{3}$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

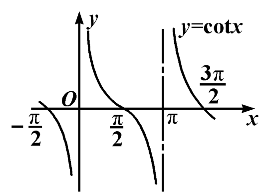
续 表

	函 数	定义域与值域	图 象	特 性
幂函数	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

续 表

	函 数	定义域与值域	图 象	特 性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$

续 表

	函　数	定义域与值域	图　象	特　性
三角函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π， 在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$

二、复合函数

考察具有同样高度 H 的许多圆柱体的体积 V，显然体积的大小完全取决于它的底面积 S 的大小，也就是由公式 $V=SH$（H 是常量）确定的．同时，底面积 S 由它的半径 R 确定，即 $S=\pi R^2$．V 是 S 的函数，S 是 R 的函数，V 和 R 通过 S 得到函数关系：$V=(\pi R^2)H=\pi HR^2$，它是由函数 $V=SH$ 与函数 $S=\pi R^2$ 复合而成的，或者说 V 是 R 的复合函数．

定义　如果 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交非空，那么，y 通过中间变量 u 的联系也是 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$．

必须指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的．例如 $y=\ln u$，而 $u=-3-x^2$，就不能复合成一个复合函数，因为 $u=-3-x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$中任何 x 值所对应的 u 的值都小于或等于 -3，都不可能落在 $y=\ln u$ 的定义域$(u>0)$内，从而 $y=\ln u$ 无定义，因此不能复合．

学习复合函数有两方面的要求：一方面是上面说的，会由几个简单的函数复合成一个复合函数，不难看出，复合的过程实际上是利用中间变量依次代入的过程；另一方面是以后用得较多的，会把一个复合函数"拆成"（分解）几个简单的函数，这些简单的函数，往往是基本初等函数．

例 1　已知 $y=\ln u$，$u=x^2$，试把 y 表示为 x 的函数．

解：因为 $y=\ln u$，而 $u=x^2$，u 是中间变量，所以 $y=\ln u=\ln x^2$，即 $y=\ln x^2$．

例 2　设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数．

解：不难看出，u，v 分别是中间变量，故 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\dfrac{x}{2}$，即 $y=\tan^2\dfrac{x}{2}$．

从例 2 可以看出，构成复合函数的中间变量可以不限于一个．

例 3　函数 $y=e^{\sin x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解：令 $u=\sin x$，则 $y=e^u$，

故 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin x$ 复合而成的．

例 4　函数 $y=\tan^3\ln x$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解：令 $u=\tan\ln x$，则 $y=u^3$，

再令 $v=\ln x$，则 $u=\tan v$，

故 $y=\tan^3\ln x$ 是由 $y=u^3$，$u=\tan v$，$v=\ln x$ 复合而成的.

三、初等函数

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数的复合而构成的并且能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如：

$y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$，$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

为了今后能正确熟练地求函数的导数和积分，我们必须会将一个初等函数拆成若干个简单的函数，直到拆成的每个函数都是常数和基本初等函数经过四则运算而成的函数为止.这样的过程称为“分解”.

例 5 分解 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$.

解：令 $u=\sin(1+3x^2)$，得 $y=e^u$，

令 $v=1+3x^2$，得 $u=\sin v$.

故 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=1+3x^2$ 复合而成的.

练习 7－1

1.求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+4}$； (2) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sqrt{1-|x|}$； (4) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$.

2.设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $f(-\dfrac{1}{2})$，$f(\dfrac{1}{3})$，$f(\dfrac{3}{4})$，$f(2)$ 的值.

3.指出下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x^4-2x^2+3$； (2) $\varphi(x)=x^2\cos x$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$； (4) $y(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$；

(5) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$； (6) $g(x)=\dfrac{x}{a^x-1}$.

4.把下列各题中的 y 表示为 x 的函数：

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=x^2+1$； (2) $y=\ln u$，$u=3^v$，$v=\sin x$.

5.下列复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的？

(1) $y=e^{\cos x}$； (2) $y=\ln\cos x$；

(3) $y = e^{x^2}$； (4) $y = \cos e^{x^2}$；

6.分解下列函数：

(1) $y = \sin(314t + \frac{\pi}{6})$； (2) $y = a^{\sqrt[3]{x^2+1}}$；

(3) $y = \lg\tan(x+2)$.

§7－2 极 限

一、数列的极限

先看两个无穷数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots; \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots. \tag{2}$$

我们把这两个数列中的前几项分别在数轴上表示出来（见图7－1）.

现在，我们来考察这两个数列，当项数 n 越来越大时（即 n 无限增大），数列中的项的变化趋势.容易看出，当项数 n 无限增大时，数列(1)中的项无限趋近于0，数列(2)中的项无限趋近于1.对于这种变化趋势给出下面的定义：

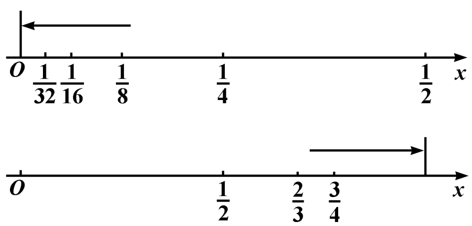


图7－1

定义1 当数列 $\{a_n\}$ 的项数 n 无限增大时，如果 a_n 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 A 是这个数列的**极限**.记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

这个式子读作“当 n 趋向于无穷大时，a_n 的极限等于 A”.“→”表示“趋向于”，“∞”表示“无穷大”，“$n\to\infty$”表示“n 无限增大”.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 有时也记作 当 $n\to\infty$ 时，$a_n \to A$.

注意：

(1)一个数列有无极限，应该分析其随着项数 n 的无限增大，数列中相应的项是否无限趋近于某个确定的常数，如果这样的数存在，那么这个数就是所论数列的极限，否则数列的极限就不存在.例如数列

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots.$$

显然，随着 n 无限增大，其对应的项无限趋近于0，故得 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 0$.又如数列

$$2, -2, 2, -2, \cdots, (-1)^{n-1}2, \cdots.$$

当 $n\to\infty$ 时，数列各项时而为2，时而又为－2，它不能无限趋近于某个确定的常数，因此该数列当 $n\to\infty$ 时，极限不存在.再如数列

$$1,2,3,4,\cdots,n,\cdots.$$

随着项数 n 的无限增大，其对应的项也无限增大，不趋近于某个常数，故此数列的极限也不存在.

(2) 一般地，任何一个常数数列的极限都是这个常数本身.例如常数数列

$$5,5,5,\cdots,5,\cdots.$$

它的极限是 5.

二、函数极限

数列作为一种特殊的函数 $f(n)$，其自变量 n 只能取自然数.数列极限实际上就是研究当自变量 $n\to\infty$ 时，函数值 $f(n)$ 的变化趋势.对定义在 R 上的一般函数 $y=f(x)$ 而言，函数的极限也是研究在自变量 x 的变化过程中，函数值 $f(x)$ 的变化趋势.这里的自变量 x 的变化过程有两种情形：一种是 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to\infty$）；另一种是 x 无限地接近于某一点 x_0（或者说 x 趋向于 x_0，但不等于 x_0，记作 $x\to x_0$）.对 x 在这两种不同的变化过程下函数 $f(x)$ 的极限问题分别讨论如下：

(一) 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

在数列的极限中，记号 $n\to\infty$ 的意义是指数列的项数按照自然数的顺序无限增大.而函数的自变量 $x\to\infty$ 是指 x 的绝对值无限增大，它包含以下两种情况：

(1) x 取正值，无限增大，记作 $x\to+\infty$；

(2) x 取负值，它的绝对值无限增大，记作 $x\to-\infty$.

反过来，如果 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况都存在，则可以合并写成 $x\to\infty$.

例 1　讨论反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

解：作出反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象（见图 7－2）.

由图可见：当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}\to 0$，即 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{1}{x}\to 0$.

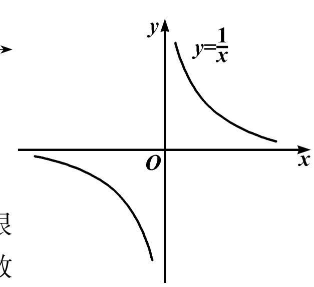


图 7－2

对于这种变化趋势给出下列定义：

定义 2　如果当 $|x|$ 无限增大（$x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么数 A 就称为当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

类似地，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么数 A 就称为当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\ (\text{或}\lim_{x\to-\infty} f(x)=A).$$

例 2　作出函数 $y=(\dfrac{1}{2})^x$ 和 $y=2^x$ 的图象，并判断下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\frac{1}{2})^x$；　　(2) $\lim\limits_{x \to -\infty}2^x$.

解:分别作出函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 和 $y=2^x$ 的图象(见图 7－3).

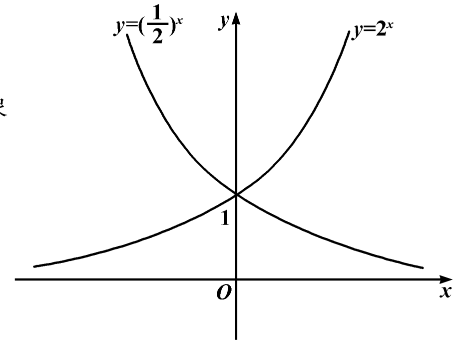


图 7－3

由图象可以看出：

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty}(\frac{1}{2})^x=0$；

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty}2^x=0$.

例 3　讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限：

(1) $y=1+\frac{1}{x^2}$；　　(2) $y=2^x$.

解:(1) 如图 7－4 所示.

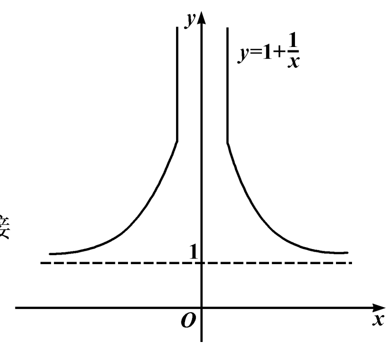


图 7－4

当 $x\to+\infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x^2}\to 1$，

当 $x\to-\infty$ 时，$y=1+\frac{1}{x^2}\to 1$.

因此，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=1+\frac{1}{x^2}$ 无限地接近于常数 1，即

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})=1.$$

(2) 如图 7－3 所示.

当 $x\to+\infty$ 时，$2^x\to+\infty$，

当 $x\to-\infty$ 时，$2^x\to 0$.

由上可知，当 $|x|$ 无限增加时，$y=2^x$ 不能向某一个常数无限地趋近，因此，$\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在.

一般地，当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在，并且相等时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 才存在.即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

(二) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

与 $x\to\infty$ 类似，$x\to x_0$ 包含 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0 和 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0 两种情况，分别用：

(1) $x\to x_0^+$ 表示 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0；

(2) $x\to x_0^-$ 表示 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0.

显然，$x\to x_0$ 表示 x 从大于 x_0 和小于 x_0 两个方向趋近于 x_0；反过来，如果 x 从大于 x_0 和小于 x_0 两个方向趋近于 x_0，也可以合并写成 $x\to x_0$.

例 4　讨论当 x 趋近于 2 时，函数 $y=x+1$ 的变化趋势.

解:作出函数 $y=x+1$ 的图象(见图 7－5).

由图象可以看出，不论 x 从小于 2 的方向趋近于 2，或是从大于 2 的方向趋近于 2，函

数 $y = x + 1$ 的值总是随着自变量 x 的变化从两个不同的方向愈来愈趋近于 3，所以说

$$\text{当 } x \to 2 \text{ 时}, y = x + 1 \to 3.$$

例 5 讨论当 x 趋近于 1 时，函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的变化趋势.

解：作出函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的图象（图 7－6）. 函数的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$，在 $x = 1$ 处函数没有定义，但从图 7－6 可以看出，自变量 x 不论从大于 1 或从小于 1 两个方向趋近于 1 时，函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的值总是随着自变量 x 的变化从两个不同的方向愈来愈趋近于 2.

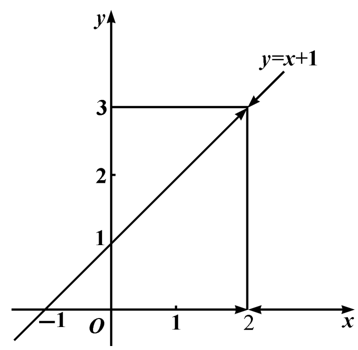


图 7－5

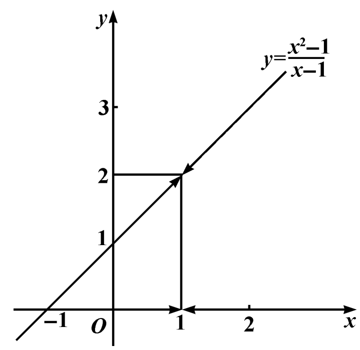


图 7－6

我们研究 x 趋近于 1 时，函数 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的变化趋势，并不是求 $x = 1$ 时的函数值，所以不计较函数在 $x = 1$ 处是否有定义.

对于这个例子，仍可说：

$$\text{当 } x \to 1 \text{ 时}, y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \to 2.$$

对于这种变化趋势给出下列定义：

定义 3 如果 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么数 A 就称为当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限. 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

例 6 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} x$；(2) $\lim\limits_{x \to x_0} C$（$C$ 为常数）.

解：(1) 因为当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的值无限趋近于 x_0，所以有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0;$$

(2) 因为当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的值恒等于 C，所以有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} C = C.$$

由此可见，常数的极限是其本身.

前面讨论了当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，在那里 x 是以任意方式（大于 x_0 或小于 x_0）趋