南京大学出版社

数理逻辑引论

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC

朱梧槚 肖奚安 编著

数理逻辑引论

朱梧槚　肖奚安　编著

南京大学出版社

1995·南京

(苏)新登字011号

内 容 简 介

全书分为五章，其中第一和第三章，主要是从数学模型和数学背景的角度去讨论命题逻辑与谓词逻辑的涵义与构造，在那里的论述尽量侧重于直观。第二与第四章则主要是从形式系统的构造与展开的角度去分别研究命题逻辑与谓词逻辑的基本内容。最后第五章是有关经典二值逻辑系统的严格的语义研究。本书可作为计算机科学系和数学系的基础课教材，也可供理工科大学生、研究生、教师及数学工作者参考。在使用本书于教学过程中，第二、四两章及第一、三、五章浅显部份可作为本科生教材，而其余较深部份可用作硕士研究生的教材。

数理逻辑引论
朱梧槚　肖奚安 编著

南京大学出版社出版
(南京大学校内　　邮编210093)
江苏省新华书店发行　　江苏丹阳新华印刷厂印刷
开本850×1168　1/32　印张9.875　字数257千
1995年5月第1版　　1995年5月第1次印刷
印数1—2000
ISBN　7-305-02780-4

O·195　　　定价8.80元
责任编辑：朱丹红　新　平
(南大版图书若有印、装错误可向承印厂退换)

前　言

我们曾在《集合论导引》（见参考文献[16]）一书的前言中指出："1989年初，鉴于教学任务与科研工作的需要，我们共同讨论并拟订了一个写作纲要；原始计划是撰写一本既适用于计算机系，又适用于数学系的"数理逻辑"课程的教材，书名定为《数理逻辑·集合论·数学基础》"[16]. 当时的基本想法是：全书将分上、中、下三篇. 其中上篇讨论逻辑演算的语形和语义研究，中篇讲集合论的创立与发展，下篇研讨数学基础论的基本内容. "然而，对于以上的认识和计划，在后来撰写讲义和教学实践的过程中，发现难以全部实现. 特别是在考虑和付诸正式出版的过程中，根据多方面的意见和看法，还是决定将如上所说全书之上、中、下三篇独立成册，依次写成《数理逻辑引论》、《集合论导引》和《数学基础概论》三本书分别出版. 当然，如此设置安排确有合理之处，仅就篇幅控制和教学使用上就有方便的一面. "[16]其后的情况是：上篇数理逻辑基础方面，已有讲义付诸教学使用，且库存较多，更在文字与内容结构上还很粗糙. 下篇数学基础方面，尚有已出版之《几何基础与数学基础》（见参考文献[17]）一书可以顶替，而中篇集合论方面情况，恰好与刚才所说的情况不同. 因而也就将《集合论导引》一书于1991年先行正式出版了. 按理说，原计划撰写之《数理逻辑引论》一书应紧接着出版. 然而近三年来，一方面为组织落实和参加撰写《数学辞海》之数理逻辑与数学基础两个分支的众多辞条，其工作甚为庞大. 另一方面教学、科研任务较重，特别是长年陷于忙碌不堪的学术事务困境中难以解脱，以致将《数理逻辑引论》的

成稿和出版一直拖到现在。

至于数理逻辑与计算机科学之间的密切关系，以及《数理逻辑引论》、《集合论导引》和《数学基础概论》等书之撰写目的，它们对于数学系数理逻辑专业和计算机系计算机科学方向的学生在学习过程中的作用等，我们已在《集合论导引》一书的前言中加以说明，望读者参阅之，这里不再重复。

但在此处，关于《数理逻辑引论》一书的写作，尚有如下几点要加以说明。

第一，本书的主要内容是讨论经典二值逻辑演算系统的语形和研义研究。而经典二值逻辑系统是一种反映演绎推理规律的逻辑演算系统。但人类思维过程是极为丰富和复杂的，人类思维活动中的种种推理方式决非演绎推理所能完全囊括。由于种种时代因素的刺激，各种非经典逻辑在本世纪30年代以来，以不可阻挡之势蓬勃发展起来，而且与计算机科学的发展和研究愈来愈密切相关。为此，我们特在本书之末撰写了"非经典逻辑纲要"这个附录，借以指出进一步学习和研究各种非经典逻辑系统的重要性。该附录的全部内容是由在职博士生张东摩执笔撰写的，因为他正在为计算机科学方向的硕士生讲授《非经典逻辑与计算机科学》这门课程，并已取得了一定的教学经验。

第二，全书分为五章，其中第一和第三章，主要是从数学模型和数学背景的角度去讨论命题逻辑与谓词逻辑的涵义与构造，在那里的论述尽量侧重于直观，而不讲究形式系统意义下的那种严格。第二与第四章则主要是从形式系统的构造与展开的角度去分别研究命题逻辑与谓词逻辑的基本内容。最后第五章是有关经典二值逻辑系统的严格的语义研究。在阅读本书第一、三、五章时，往往要涉及到一些必要的数学知识和集合论概念，因而在没有任何准备知识的情况下难以融会贯通其中的全部内容。所以在使用本书于教学的过程中，建议将形式系统的语形研究(即第二、四两章)加上第一、三、五章中浅显部份作为本科生教材，而其余较深部份

用作硕士研究生的教材。

第三，如所知，对于任何一个经典内容的写作(如同许多作者在写作各自编著的微积分教材那样)，除了在文字表述和内容顺序结构的安排上去显示自身的写作特色外，对于内容实质本身是不能更动的，这或许是写作任一经典内容的一种通用做法或原则，对于本书的写作，当亦只能在此原则之下进行而不能例外。经过仔细的比较和推敲，我们选定参考文献[5]和[21]作为写作本书的重点参考书，如此决策的理由和相关素材的处理将在本书的行文中作进一步说明。

第四，本书的成稿仍属仓促，加上水平有限，缺点与疏忽之处难免，希望读者和同行专家批评指正，以便在今后的教学过程中加以修正和逐步完善。

本书的写作受到南京航空航天大学理学院名誉院长徐利治教授、南京航空航天大学校长朱剑英教授、南京航空航天大学计算机科学与工程系主任丁秋林教授的大力支持和热情鼓励。又南京大学出版社社长时惠荣编审和编务室主任朱丹红编辑为本书的出版给予了热情的帮助，让我们在此一并致以诚挚的谢意。

朱梧槚　肖奚安

一九九四年十月于南京

目　　录

绪　论

在绪论中，主要讨论两个问题：其一是讨论究竟什么是数理逻辑这样一个问题．其二是谈谈与形式系统（即逻辑演算）及其解释相关的一些事情．对于上述问题一而言，我们将从数理逻辑历史发展的几个侧面加以分析讨论，并在综合各家所言之长的基础上表述我们的认识，主要围绕着数理逻辑的定义、研究对象、研究领域和学科归属等方面作些探讨．也正因为这些探讨已经涉及了数理逻辑历史发展的几个侧面，因而在本书中，也就不再另辟专章去系统地阐述数理逻辑之历史概要了。

§1 什么是数理逻辑？

数理逻辑这个词，已经日趋频繁地出现在众多学科的文献与著作之中．不仅哲学家、逻辑学家、数学家和计算机专家的许多论著广为涉及数理逻辑的内容，甚至社会科学家和一些自然科学家，也在他们的某些工作中道及数理逻辑的这样或那样的内容．然而怎样来回答什么是数理逻辑这样一个问题呢？我们为此而查阅了一些辞海、辞典和数理逻辑教材或专著（参见文献[1]—[12]），首先觉得问题的全面回答应涉及数理逻辑的定义、研究对象、研究领域与学科归属等四个方面，当然，其中定义这个方面是最根本的．其次又深感对于数理逻辑这一学科，尚没有一个统一而被一致公认的定义．有的数理逻辑著作中完全不谈这个问题，而在文献[1]—[12]中，对于数理逻辑的研究对象的说法较为一致，即都认为数

理逻辑以推理本身作为自己的研究对象，又对数理逻辑的研究领域的说法也较一致，都认为广义地说，数理逻辑的研究内容应包括逻辑演算、集合论、模型论、递归论和证明论等五个部分，其中逻辑演算（即命题演算与谓词演算）为基础部分．而狭义地说，数理逻辑仅指逻辑演算。至于学科归属方面，则有两种说法：其一说数理逻辑是数学的一个分支[3][12]，其二说数理逻辑是逻辑学的一个分支[2]．最后关于数理逻辑这一学科的定义，则往往因其侧重面不同而不尽一致。举例如下：

"逻辑是研究推理的，数理逻辑则是研究数学家们所使用之推理的一门学问．"[1]

"数理逻辑又称符号逻辑，用数学方法研究逻辑问题，特别是数学中的逻辑问题的科学．"[2]

"数理逻辑亦称符号逻辑，数学的一门分科，主要研究推理、计算等逻辑问题，内容有模型论、公理集合论、递归论和证明论等．"[3]

"数理逻辑又名符号逻辑，它是逻辑学的一个分支，在其中使用数学符号来研究数学各领域公共使用的逻辑推理"．[4]

"数理逻辑研究推理，特别是研究数学中的推理的科学．

本书叙述数理逻辑的基础性知识，包括逻辑演算（这里是指命题逻辑和一阶谓词逻辑）的基本内容，这些内容构成数理逻辑各个分支（模型论、证明论和构造性数学、递归论、集合论）的共同基础．"[5]

"什么是数理逻辑？它就是采用数学的方法来研究思维形式的逻辑结构及其规律的学问．"[6]

"研究推理的方法很多，用数学方法来研究推理就是数理逻辑．"[7]

"数理逻辑亦称符号逻辑、理论逻辑、逻辑斯蒂．它是研究推理，特别是研究数学中的推理的科学．"[8]

"数理逻辑是形式逻辑与数学相结合的产物，也是一门数学，

但数理逻辑研究的是各学科包括数学共同遵从的一般性逻辑规律，而各门学科只研究自身的具体规律。”[9]

“数理逻辑又称符号逻辑，是用数学的工具和方法研究推理、计算问题的一门科学，是数学的一个分支。它的主要内容有：命题演算、谓词演算、证明论、递归论、模型论和公理化集论等。”[10]

“数理逻辑是逻辑和数学交织的一门边缘性科学，它的逻辑方面就是现代形式逻辑。狭义的数理逻辑是指用数学方法研究数学中的演绎思维和数学基础的学科。广义的数理逻辑也称为符号逻辑，包括一切用特制符号和数学方法来研究处理演绎方法的理论。数理逻辑一开始是用数学方法研究和处理形式逻辑，后来发展到研究数学思想方法和数学基础问题，目前它很大部分内容已经成长为数学的分支。”[11]

“数理逻辑，又称符号逻辑，理论逻辑或逻辑斯蒂，数学的一个分支，用数学方法研究逻辑或形式逻辑。”[12]

经对数理逻辑历史发展有关侧面的分析考虑，并综合各家所言之长，我们倾向于采纳如下方式来回答什么是数理逻辑这个问题。

关于数理逻辑的定义：数理逻辑是用数学方法主要地去研究诸如推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性和计算的能行性等等中之逻辑问题的一门学科。

当然，对此也可等价地这样说：数理逻辑是用数学方法研究各种推理中之逻辑问题的一门学问。其中主要地包括推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性、计算的能行性等等中之逻辑问题。

关于数理逻辑的研究对象：数理逻辑以推理本身作为自己的研究对象。其中主要包括演绎推理、形式推理、数学推理和各种近现代的非经典推理。

关于数理逻辑的研究领域：作为数理逻辑之研究领域的历史性确认部份包括逻辑演算、集合论、模型论、递归论和证明论等五

大块。但作为数理逻辑研究领域之近现代发展部分，还应包括诸如模态逻辑、多值逻辑、非单调逻辑、归纳逻辑、似然逻辑、不协调逻辑、开放逻辑、中介逻辑演算、中介公理集合论、中介模态逻辑、中介模型论、中介代数和中介证明论等各种各样非经典逻辑分支。

关于数理逻辑的学科归属：数理逻辑是逻辑和数学互相交织在一起的一门边缘性学科，或者说，数理逻辑既是一门逻辑化了的数学分科，又是一个数学化了的逻辑分支。

当然，如上所言也未必尽善，不过借此表述一下我们当前的认识与看法，以便能引起有兴趣的读者和专家们的讨论和批评指正。现对如上所论作如下几点说明，其中包括对数理逻辑历史发展之有关侧面的分析考虑。

(1) 数理逻辑的早期发展，显然是从用数学方法(这里主要是指数学中之符号化方法或形式化方法)研究演绎推理的有效性开始的。这就是通常所说之数理逻辑的基础部分，即命题演算和谓词演算的基本内容。不少文章或著作中所涉及之数理逻辑这个词，往往都是意指这种狭义的数理逻辑。

最早想到用数学方法研究演绎推理，或者说最早想把演绎推理法数学化的是 Leibniz。他被几何论证符号化中显示出来之代数威力所感动，进而设想一种比数量代数更为宽广的代数学科，这种代数将是逻辑的一部分，并且是代数化了的逻辑。实际上，Descartes 已经开始谨慎地去建立一种逻辑的代数，有关此项工作的一个未完成的文稿至今还被保存着。但 Leibniz 不仅探索着一个与 Descartes 所想之同样宽广的目标，而且开创性地提出了一个更加雄伟的方案。1666 年，Leibniz 完成了《论组合的艺术》一书的写作，其中就包括有他对演绎推理之普遍系统的早期计划。后来他又写过许多文字片段，借以探讨逻辑代数这一目标，但是这些文字片段直到 20 世纪也未能出版，因而很少产生直接的影响。当然，在 18 世纪和 19 世纪也曾有别人草拟过类似的计划，但都没有比 Leibniz 的有关工作更前进一步。

逻辑代数的直接创始者，应推De Morgan和George Boole。1874年，De Morgan出版了《形式逻辑》和许多有关的其它文章，在这些论著中，他修正了Aristotle的逻辑，并且开创了关系逻辑的研究。另一方面，符号化方法得以对逻辑代数的研究起到重大作用，关键的一步是George Boole (1815—1864)走出来的。他基本上是自学而成为Cork皇后学院的数学教授。Boole确信语言的符号化，会使逻辑严密化。他的主要想法被包括在他的《逻辑的数学分析》(1847)和《思维规律的研究》(1854)这两部著作中。他用x，y，……，表示类或集合，用x+y和xy表示两个集合的并和交。然后列出一些自明地反映推理规则的表达式作为公理，再从这些公理许可的规则去导出众多的推理关系。这就是从外延方面去研究逻辑而形成的代数系统。Boole也看到了如上关于类的演算可被解释为命题演算，如此，他的代数便成为直接反映推理规则的命题代数了。Boole的这个代数系统，后来又几经改进，最后便成为当今众所周知的Boole代数了。因而几乎可以说，主要是Boole的工作使得被符号化了的逻辑开始成为一种具有科学性的逻辑，并由此而使得逻辑科学从哲学中分化出来而逐步接近数学。

此后，又经一些学者的推进，直到1897年，Gottlob Frege (1848—1925)在他的《概念演算》一书中，建立了命题演算和一阶谓词演算的公理基础，从而完成了演绎推理的数学化工作。Frege扩展了变量、量词和命题函数的运用，还引进了实质蕴涵的概念，这种对蕴涵的解释，在数理逻辑中无疑是极其方便和重要的，从而使得逻辑演算的内容比Aristotle的逻辑大为丰富。

然而，这种反映演绎推理规律之逻辑演算系统的建立和完善，并没有穷尽数理逻辑的研究。人们很自然地会问，这两个逻辑演算系统所反映之演绎推理规律的程度如何？或者更确切地说，人们既要问演绎推理的所有规律是否都在逻辑演算中得到了反映？还要问逻辑演算中的每一条规则是否都是演绎推理中某条规则的反映？所问实际上也就是后来人们在逻辑演算中进行语义研究时

的完备性和可靠性问题。亦即若对前一问题的回答是肯定的，这就断定了这个逻辑演算系统是完备的。又若对后一问题的回答是肯定的，这就断定了这个逻辑演算系统是可靠的。直到本世纪 30 年代，以上所问都得到了肯定的答案。在其中作出重大贡献的首推 K Godel (1906—1978)，他在 1930 年证明了命题演算系统和一阶谓词演算系统的完备性。

如上所论之历史分析，主要旨在阐明推理的有效性是数理逻辑的研究内容之一，同时也从某个侧面显示了逻辑被数学化的片段。

(2) 如果只是将演绎推理这一部分逻辑数学化，或者说充分地达到了严密化，那么证明的真实性和数学的真理性等问题远未解决，虽然经典数学中所使用的推理几乎都是演绎推理。

19 世纪末，G. Cantor 在提供整个经典数学之理论基础与扩充数学研究对象的意义下创建了古典集合论。如果该集合论系统的真理性得以保证，那么借助于严格的逻辑工具所推出之大块数学，其真理性也就不成问题。然而这种理想的情景未能出现，因为古典集合论中出现了一系列悖论，特别是在 1902 年，由于 Russell 悖论的出现，使得把集合论作为整个经典数学之理论基础的局面面临严重困难。

为了解决集合论中之悖论问题，数学家们的方案之一是求助于公理化手段。德国数学家 Zermelo 于 1908 年构造了一个集合论公理系统，后经 A. Fraenkel (1891—1965) 等数学家的改进，最终形成了当前的 ZF 公理集合论系统。在 ZF 中，所有既经出现之集合论悖论得以排除，而且迄今未发现任何新的悖论在其中出现。从而使得整个经典数学得以奠定在一个相对牢固的理论基础上。而这也就是广义的数理逻辑的一个重要分支，即近代公理集合论得以诞生的契机。当然，现代集合论的发展状况已远非当年的情景了。总体来说，近代公理集合论的诞生，并没有从根本上解决集合论系统的相容性问题，因为至今未能从理论上证明近代公理集合

论永远不会出现新的悖论。

此外，数学作为一门演绎推理性质的学科，至少从形式上看，数学命题的真理性是建立在公理的真理性和逻辑规则的有效性之上的，因而即使在非欧几何出现之后，致使“数学真理是绝对真理”这一概念受到冲击之后，数学家还可用逻辑推理的严格性作为精神支柱，并以此解释数学在应用中的有效性，但因集合论悖论的出现，这一精神支柱也动摇了，这就不能不在数学家中形成一种危机感。正因为数学面临着这样的危机，才促使数学家们去探索数学推理在什么情况下有效，什么情况下无效，数学命题在怎样的情况下具有真理性，在怎样的情况下失灵。于是，在20世纪初，数学基础论这一分科就诞生了。摆在从事数学基础问题研究的数学家面前的首要任务，就是如何为数学的有效性重新建立可靠的依据。由于在这项巨大工程中所持的基本观点不同，以致在数学基础论的研究中形成了各个流派。Hilbert(1862—1943)是其中一个主要流派的代表人物，他在这里提出了著名的Hilbert规划，希望规划的实现能一劳永逸地解决数学系统的相容性问题。他的基本想法是利用具体的、有穷的证明作为出发点，而用这些简单的、直观的和有限的元数学工作来证明数学系统、特别是算术公理系统的相容性。这就是证明论这个数理逻辑的重要分支在原来意义下的涵义。Hilbert和他的学派，确实证明了一些简单的形式系统的无矛盾性，他们甚至相信即将实现算术和集合论之无矛盾性证明这一目标。然而Godel于1931年证明了下述事实：任何一个包含数论的数学系统的相容性不可能在自身系统内得到证明，而必须凭借更强的、在系统内不能表述的方法才能去证明对象系统的相容性。就是说，当我们使用元理论往证某个对象理论的无矛盾性时，这个元理论必须比对象理论更强，必需是一个能表达对象理论所不能表述的那个方法的理论，从而元理论必须不能比对象理论更简单，而是更复杂、更不可靠。如此，Godel就从理论上推断了Hilbert规划是不可能实现的。