

数理逻辑教程

陈慕泽 著

上海人民出版社

说 明

数理逻辑是思维科学的一个分支,也是数学的一个分支。由于具有强有力的形式表达和形式分析的功能,数理逻辑在哲学、语言学、经济学、计算机科学、人工智能、决策学等诸多领域的现代发展中,得到了广泛的实质性的应用。熟悉和掌握数理逻辑基础,已成为当代人文科学工作者应当具备的一种知识结构和素养。

本教程是为高等院校人文学科学生编写的教材。前四章内容是一阶逻辑,最后一章是一阶理论。一阶逻辑是数理逻辑的基础,是数理逻辑最具直接应用价值的部分,是新世纪我国所培养大学生,包括人文学科大学生必须具备的基础理论知识。

作者建议:在本科教育中,学生应当掌握本教程的前两章,熟悉本教程的后三章;在相关的研究生教育中,学生应当系统掌握全书的内容。

陈波教授审阅了书稿并提出了宝贵的意见;余俊伟博士也给了本教程的完成以重要的帮助,在此一并致谢。

本教程难免有疏漏与不足,恳请指正。

作者

2001年4月

目 录

引言	1
一、什么是逻辑	1
1. 逻辑·推理·推理的有效性及其判定	1
二、什么是数理逻辑	4
2. 逻辑和语言·语言的三个要素·自然语言、符号 语言和形式语言·数理逻辑·一阶逻辑	4
第一章 命题逻辑	8
一、真值形式	8
§ 1. 命题及其真值·原子命题和复合命题	8
§ 2. 真值联结词·真值形式·常用真值联结词	10
§ 3. 命题逻辑层次上的自然语言符号化·复合命 题的真值形式·命题推理及其真值形式	16
§ 4. 真值联结词的一般性质·真值函数· n 元真 值函数的总数·真值联结词的可定义性、完 全性和独立性	20
二、真值形式的判定	31
§ 5. 真值形式的类型·重言式、矛盾式和可真式· 真值形式的判定及其基本方法	31
§ 6. 真值表·能行方法·真值形式是能行可判	

定的	32
§ 7. 归谬赋值法	38
§ 8. 常用重言式 · 范式 · 合取范式和析取范式 · 范式的存在性 · 求范式的方法 · 置换和代入 · 范式方法在命题推理判定中的运用	40
§ 9. 优范式 · 优析取范式和优合取范式 · 优范式 的惟一性 · 如何求优范式 · 优范式的应用	50
§ 10. 真值树	60
三、命题自然推理	66
§ 11. 自然推理 · 命题自然推理的基本规则 · 归谬 规则	66
第二章 谓词逻辑	74
一、原子命题的内部结构	74
§ 12. 谓词逻辑 · 谓词和个体词 · 量词 · 全称量词 和存在量词 · 个体域 · 量词的辖域 · 自由个体 变项和约束个体变项 · 一阶谓词逻辑	74
§ 13. 谓词逻辑层次上自然语言的符号化	80
二、谓词逻辑的命题形式及其判定	87
§ 14. 命题形式 · 命题形式的解释 · 命题形式的 类型	87
§ 15. 命题形式的判定 · 普遍有效式不是一般地能 行可判定的 · 有穷个体域中的判定问题 · 逻辑 树方法	90
三、量化自然推理	99
§ 16. 量化推理及其有效性的判定 · 量化自然推 理 · 量化推理无效性的判定	99

§ 17. 逻辑定理	121
四、谓词逻辑中的范式	137
§ 18. 前束范式·前束范式存在定理	137
第三章 命题演算	145
一、形式化的基本概念	145
§ 19. 从形式的到形式化的·公理化和形式化·形式语言 和形式系统·对象语言和元语言·逻辑语法和逻辑语义·内定理和元定理·系统 内的证明和关于系统的证明·对象理论和元理论	145
二、集合论的基本知识	154
§ 20. 集合论的基本概念·关系和函数·集合的基数 与集合间的等势·有穷集合和无穷集合·可数集合·可枚举集合·能行可枚举集合· 不可数集合·可判定集合	155
三、命题演算 P	163
§ 21. 形式语言 L_1 ·命题演算 P·P 中的证明和 推导	163
§ 22. P 中若干定理的证明	171
四、演绎定理	178
§ 23. P 中推导的若干性质·演绎定理	179
§ 24. P 中若干定理的证明(续一)	183
§ 25. P 中若干定理的证明(续二)	189
五、P 的语义解释	192
§ 26. P 解释·P 中的可满足,常真和语义后承·P 中语义后承的若干性质	194

六、P 的元理论	199
§ 27. P 的可靠性 · P 的可靠性定理 · P 中语法后 承和语义后承的关系	199
§ 28. 一致性 · P 公式集的一致性 · 语义一致和语 法一致 · P 系统的一致性 · 简单一致和绝对 一致	201
§ 29. 完全性 · P 的语义完全性和强语义完全性 · P 的语法完全性	207
§ 30. P 的可判定性	219
§ 31. P 的独立性	220
 第四章 谓词演算	 225
一、谓词演算 Q	225
§ 32. 形式语言 L_2 · 一阶语言 · 量词的辖域 · 个体 变项的约束出现和自由出现 · 闭公式和开公 式 · 公式的封闭	225
§ 33. 谓词演算 Q · Q 中的证明和定理 · Q 中的推 导和语法后承	230
§ 34. Q 中推导的若干性质 · Q 中的演绎定理和等 值置换定理	232
§ 35. Q 中若干定理的证明	238
二、Q 的语义解释	246
§ 36. Q 解释 · Q 中的可满足,有效和语义后承	246
三、Q 的元理论	254
§ 37. Q 的可靠性	254
§ 38. Q 的一致性	257
§ 39. Q 的完全性	260

§ 40. 谓词演算的不同系统 · 谓词演算 QS	267
第五章 一阶理论	271
一、一阶理论	271
§ 41. 一阶理论 · 任意一阶理论的一些元定理 · 否定性完全 · 封闭的一阶理论 · Lowenheim-Skolem 定理 · 紧致性定理	271
§ 42. QS 语义完全性的证明	290
§ 43. 带等词的一阶谓词逻辑的形式系统 $QS^=$ · $QS^=$ 的一致性 · 正规模型 · $QS^=$ 的充分性	292
§ 44. 模型的同构 · 范畴性 · 非标准模型	298
二、不可判定性	303
§ 45. 关于不可判定性的一些结果	303
§ 46. 丘奇命题和丘奇定理 · 递归函数 · 递归集	314
§ 47. 在一形式系统中函数的表达、强表达和可定义性	318
§ 48. 算术形式系统 H · H 的不可判定性	319
§ 49. $QS^=$ 和 QS 的不可判定性	334
参考文献	337

引 言

一、什么是逻辑

1. 逻辑·推理·推理的有效性及其判定

逻辑是研究推理的科学,它是知识创新和知识理论化的重要工具。

知识就是真命题。人类的知识库,是真命题的集合。知识创新,无论是对于个人而言,或是对于整个人类而言,无非是其知识库的扩充。

知识有两种,一种是感知的,其真实性依据人的感官(包括各种实验手段)来确定;另一种是推知的,其真实性依据推理来确定。人类感知的知识是极其有限的。离开了推理,就谈不上知识创新。

科学理论也是真命题的集合。但科学理论不同于一般知识库之处在于,前者的命题之间存在推理关系,而后者一般地说则没有。正是推理,使得知识具备逻辑结构而取得科学理论的形态。

那么,什么是推理呢?

推理是由若干命题得出一个命题的思维过程。

推理是个命题序列。其中,推理得出的命题称为结论,其余的命题称为前提。推理提供前提对于结论的证据支持关系。

前提对于结论的证据支持关系,回答这样的问题:前提的真,在多大程度上保证结论的真?证据支持度对此提供一个量的刻画。一个推理的证据支持度是 100%,是指:如果前提是真的,则结论必定是真的;一个推理的证据支持度小于 100%,是指:如果前提是真的,则结论不必是真的。

能提供 100%的证据支持度的推理称为必然性推理,只能提供小于 100%的证据支持度的推理称为或然性推理。一般地,演绎推理是必然性推理,而归纳推理、类比推理等是或然性推理。本教程只涉及演绎推理。以下提到的推理,都是指演绎推理。

命题有真假之分,而推理则有对错之分。

一个推理是对的、正确的、成立的、合乎逻辑的等等,都是指该推理是有效的;一个推理是错的、不正确的、不成立的、不合乎逻辑的等等,都是指该推理是无效的。那么,什么是推理的有效或无效呢?

推理,既反映前提和结论在内容和意义上的联系,又反映前提和结论在形式结构上的联系。一个推理的有效或无效,不是就这个推理当下所具有的内容和意义而言的,而是就推理的形式结构而言的。因此,推理的有效性,又称为形式有效性。

一个推理是有效的,当且仅当具有此推理形式的任一推理(即其推理形式的任一解释)都不会出现真前提和假结论。显然,有效推理的证据支持度是 100%。前提对结论的形式有效的证据支持关系,是一种最强的证据支持关系。

[例 1]

(1) 所有的真理都是经得起实践检验的

所有的迷信邪说都不是真理

所以,所有的迷信邪说都不是经得起实践检验的

该推理的推理形式是：

所有的 M 都是 P

所有的 S 都不是 M

所以,所有的 S 都不是 P

不难找到该推理的一个解释：

(2) 所有的人都是要死的

所有的狗都不是人

所以,所有的狗都不是要死的

推理(1)和推理(2)具有相同的推理形式。推理(2)显然前提真但结论假。因此,尽管推理(1)的前提和结论都是真实的,但其推理形式却无法保证从真前提一定推出真结论,因而是无效的。

[例 2]

(3) 所有的金属都是导电的

铁是金属

所以,铁是导电的

其推理形式是：

所有 M 都是 P

S 是 M

所以,S 是 P

事实上,推理(3)是有效的,因为具有该推理形式的任一推理都不会出现真前提和假结论。

显然,解释的方法只能判定一个推理的无效,但不能判定一个推理的有效,因为一个推理形式的解释是不可穷尽的。

推理有效性的判定,正是逻辑学的中心课题。

人类能够思想,就有了推理,并就有了对推理的研究。但逻辑作为一门科学,它的开端是有了对推理形式的抽象,或者一般

地说有了对思维形式结构的抽象。由于依据的工具不同,传统逻辑和现代逻辑对推理形式的刻画是不同的。以上例子中对推理形式的表达,依据的是传统逻辑。

作为知识创新的工具,运用推理当然是为了获得真实的结论。为了通过推理获得真实的结论,光推理有效是不够的。因为推理有效只保证:如果前提真实,那么结论一定真实;而如果前提不真实,则结论就不一定真实。因此,为了确保运用推理获得真实结论,必须同时满足两条:第一,推理有效;第二,前提真实。

二、什么是数理逻辑

2. 逻辑和语言·语言的三个要素·自然语言、符号语言和形式语言·数理逻辑·一阶逻辑

数理逻辑的创始人莱布尼茨所设想的“通用语言”,标志着数理逻辑的诞生。要说明什么是数理逻辑,得先从语言说起。

语言是思想的载体和存在形式,因而也是推理的载体和存在形式。

因此,语言是逻辑的直接对象。逻辑是通过语言来研究思维及其推理的。

但是,逻辑靠什么来研究语言呢?还是靠语言。逻辑是通过语言来研究语言进而研究思维及其推理的。与此相关,语言体现出它的层次性:作为逻辑的研究对象的语言和作为逻辑的研究工具的语言,后者简称为逻辑的工具语言。这和语言学的现象类似:中国人学英语,对象语言是英语,工具语言是汉语;中国人学汉语,对象语言和工具语言都是汉语。

语言是一个符号系统,它有三个基本构成要素。

(I) 符号库。例如,英语的符号库是 26 个英文字母,加上若干标点符号。汉语的符号库是汉字字库,加上若干标点符号。符号库是语言的基本材料,没有符号库就没有语言。

(II) 语法。语法规定,由符号库中的符号所组成的各种可能的符号串中,什么样的符号串是合式的,即被确认为本语言中的词、词组或语句(项或公式),什么样的符号串则不是合式的。例如,根据英语的语法,“good”是一个词,“oogd”则不是;“The book is good”是一个句子,“good The is book”则不是。没有语法,符号就不能构成合式的词或语句。

(III) 语义。语义是对语言中合式的符号串作出意义解释。例如,根据英语的语义,“good”的含义是“好”,“The book is good”的含义是“这本书好”。没有语义,语言就不能表达意义和内容。

语言分为自然语言和人工语言。

自然语言也称为日常语言,是人们进行和表达日常思维的语言。汉语、英语和日语等等都是自然语言。自然语言有两个重要特点:第一,它是在人们的长期社会实践中约定俗成的;第二,它通常有歧义,同一语词或语句在不同的语境中可以表达不同的含义。

人工语言是人类为进行某种科学研究,通过严格定义的方式而专门创立的语言。数学语言是一种典型的人工语言。逻辑学所运用的人工语言,称为符号语言。符号语言区别于自然语言的重要特征是,前者排除歧义。

形式语言是一种高度抽象和严格定义的符号语言。形式语言自然是一种符号语言,但符号语言不能都称之为形式语言。用形式语言构造的公理化的逻辑系统,称为形式系统;相应的方法,称为形式化方法。这将是本教程的主要内容。

数理逻辑是以符号语言为主要的工具语言的逻辑。因此，数理逻辑也称为符号逻辑。

数理逻辑也称为现代逻辑。

逻辑经历了从传统逻辑到现代逻辑的发展。

传统逻辑主要是指古希腊亚里士多德首创，经由中世纪和近代的发展，19世纪数理逻辑产生以前的西方逻辑学。西方传统逻辑包括的主要内容是：概念理论；词项逻辑，其中心是三段论；古典命题逻辑；古典归纳逻辑。

通常理解的数理逻辑包括一阶逻辑、公理集合论、模型论、递归论和证明论。广义的数理逻辑还包括高阶逻辑，包括现在称为哲学逻辑的各种非经典逻辑，以及现代归纳逻辑等。

数理逻辑的发展有两个源泉或动力：一是作为思维科学，来源于对日常思维的命题形式和推理规则作精确化、严格化研究的推动；二是作为数学，来源于对数学基础研究的推动。作为一门以研究推理为中心课题的思维科学，数理逻辑和传统逻辑在研究对象上没有实质性的区别。

数理逻辑和传统逻辑的区别在于工具语言的不同。传统逻辑仍然以自然语言作为主要的工具语言，数理逻辑的工具语言则主要是符号语言。依据是否使用形式语言和形式化方法，数理逻辑又分为形式化的和非形式化的不同部分。

本教程的内容是系统介绍一阶逻辑。

一阶逻辑是数理逻辑的基础部分，是数理逻辑在日常思维中最具应用价值的部分，也是和传统逻辑关系最为密切的部分。由于使用了符号语言，一阶逻辑较之传统逻辑获得了更为精确、有效的分析和表述工具，从而大大发展了传统逻辑对于命题和词项推理的研究，并建立了命题逻辑和谓词逻辑的严格体系。特别是形式化的一阶逻辑建立起演算系统(形式系统)，从而能

对一阶逻辑系统本身作整体的研究,揭示并证明其一系列元性质,如可靠性、一致性和完全性等,这标志着逻辑学科的成熟。

本教程的“命题逻辑”和“谓词逻辑”两章,是介绍非形式化的一阶逻辑;“命题演算”和“谓词演算”两章,是介绍形式化的一阶逻辑,即一阶逻辑的形式系统及其元理论。

第一章 命题逻辑

一、真值形式

§ 1. 命题及其真值 · 原子命题和复合命题

命题及其真值

我们已经知道,作为逻辑研究主要对象的推理,是一个命题序列,是从某个或某些命题得到某个命题的思维过程。

那么,什么是命题呢?

命题是表达判断的语句。所谓判断,就是人对思维对象有所断定。

一切能被人思考的客体都构成思维对象,简称对象。对象可以是有形的,也可以是无形的;可以是物质的,也可以是精神的;可以是存在的,也可以是不存在的。总之,包罗万象。对象要能被思考,必须具有一定的性质,处于一定的关系之中。对象的性质和对象之间的关系,统称对象的属性。没有属性的对象,是不存在的。

判断对对象有所断定,就是断定对象具有或不具有某种属性。

判断用语句的形式表达出来,就是命题。

例如:

- (1) 所有不受外力作用的物体都作匀速直线运动。
- (2) 上帝是万能的造物主。

(3) 如果上帝是万能的造物主,那么他既能又不能造出一块他自己都无法举起的石头。

这些都是命题。

命题都有真假。没有真假的语句不表达确定的判断,因而不是命题。

命题的真或假,称为命题的真值。也就是说,命题的真值包括两个值,一个值是“真”,另一个值是“假”。真命题的真值是“真”,假命题的真值是“假”。

原子命题和复合命题

原子命题是不包含和自身不同的命题的命题。

例如:

(1) 癌症是遗传的。

(2) 癌症不是遗传的。

(3) 并非癌症是遗传的。

(4) 如果癌症是遗传的,那么老李患癌症是不可避免的。

(5) 老李知道癌症是遗传的。

其中,句(1)和句(2)是原子命题,因为其中不包含和自身不同的命题。而句(3)、句(4)和句(5)不是原子命题,因为这些命题中都包含了和自身不同的命题(划横线的部分),这样的命题称为支命题。

像句(3)、句(4)和句(5)这样的命题,虽然都是包含支命题的非原子命题,但它们之间存在重要的区别。句(3)和句(4)的真值是由其支命题的真值惟一地确定的,而句(5)则不是。

如果“癌症是遗传的”是真的,则句(3)是假的;如果“癌症是遗传的”是假的,则句(3)是真的。

如果“癌症是遗传的”是真的,并且“老李患癌症是不可避免的”是假的,则句(4)是假的;在支命题的其他真假情况下,句(4)

都是真的。

句(5)的真值却不是由其支题的真值惟一地确定的:如果“癌症是遗传的”是真的,则句(5)可以是真的,也可以是假的。

像句(3)和句(4)这样的命题,称为复合命题。

在命题逻辑中,复合命题指这样的命题:第一,它包含和自身不同的命题作为支命题;第二,它的真值由其支命题的真值惟一地确定。

复合命题的支命题可以是原子命题,也可以是复合命题。复合命题最终是由原子命题依据一定的逻辑关系构成,依据这种逻辑关系,原子命题的真值,惟一地确定由其构成的复合命题的真值。表达这种逻辑关系的语词,称为联结词。因此,复合命题的终极构成成分只有两个,一个是原子命题,另一个是联结词。例如,上例句(3)中的联结词是“并非”;句(4)中的联结词是“如果……,那么……”。

§ 2. 真值联结词·真值形式·常用真值联结词

真值联结词和真值形式

日常语言所表达的联结词,除了表达原子命题和复合命题的真假关系之外,在特定的语境下,还会表达其他某些意思。例如:

(1) 小张和小李结了婚,并且有了孩子。

如果交换句(1)中两个支命题的位置,得到:

(2) 小张和小李有了孩子,并且结了婚。

句(2)的含义显然较之句(1)有了变化。这说明,这里联结词“并且”除了断定两个支命题都是真的以外,还表达了其他什么意思。

如果只保留联结词中对于真假关系的断定,我们就从联结词得到了真值联结词。