数 理 逻 辑

毕富生　著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是国内介绍数理逻辑基本知识的最新读本。著者针对文科学生学习数理逻辑所遇到的困难,尽可能结合传统逻辑来介绍数理逻辑的基础知识,着重介绍逻辑演算部分内容;对其中的自然推理系统做了详细介绍,对公理推理系统仅做一般性介绍;力求以较为通俗的语言来阐述数理逻辑的基本原理和符号表达公式,并编配了练习题,具有较强的针对性和可读性。

本书主要适用于高等院校文科本专科等非数学专业的逻辑教学和文化素质教育,也是自学者的简明读本。

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑/毕富生著. —北京:高等教育出版社,2004.1

ISBN 7-04-013798-4

Ⅰ.数…　Ⅱ.毕…　Ⅲ.数理逻辑-高等学校-教材　Ⅳ.O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 113738 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
排　　版　高等教育出版社照排中心
印　　刷

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	年　月第 1 版
印　　张	8.125	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	170 000	定　　价	10.30 元

前　　言

近年来我国出版了很多逻辑学教材，这些教材大致可以分为两类。第一类逻辑学教材是关于传统逻辑的。这一类教材在写法上有两种：一种是采取传统逻辑的体系，比较陈旧；另一种是采取在传统逻辑的体系中吸收数理逻辑的一些内容的方法，较前一种有所改进，但其基本框架仍是传统的。第二类教材是关于数理逻辑的。由于数理逻辑本身的理论和系统的缘故，在介绍数理逻辑时，不同的作者在写法上和内容介绍上有所不同。这类教材从数理逻辑的理论上看没有问题，都比较详细地介绍了数理逻辑的基本知识，但对文科的学生来说，学习和掌握数理逻辑仍感到有一定的难度。针对文科学生学习数理逻辑的实际情况，本书在写法上注意在介绍数理逻辑的同时，在其框架内保留了一定的传统逻辑的内容，并尽可能结合传统逻辑来介绍数理逻辑的基本知识。

数理逻辑有五个分支学科：逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论。其中逻辑演算是基础的部分，它是数理逻辑中逻辑方面的最主要的内容。在逻辑演算中有两类演算系统，一个是自然推理系统，一个是公理推理系统。本书着重介绍自然推理系统，对公理系统仅做一般性介绍。

波兰控制论专家 H. 格林尼斯基说："作者总是他的前辈的继承者，甚至在他反对前人的意见时也是这样。他的声音，

在一定程度上，往往是老师、朋友、同事告诉他的话的回声。”本书也正是这样，在撰写时，作者参考了有关著作和学界相关成果。在此，我向这些著作的作者和学界的有关同仁致谢。

本书的出版得到了山西大学教务处的支持，在此也表示感谢！

高等教育出版社文科分社王方宪副社长、编辑周亚权同志、责任编辑吴伟同志为本书的出版付出了大量心血，深表谢意！

由于作者学识浅薄，本书可能会有不足，望同仁指正。

毕富生

2003 年 12 月于山西大学

目　　录

第一章
绪　　论

数理逻辑又叫“现代逻辑”，是跟“传统逻辑”相对而言的。传统逻辑主要指传统形式逻辑，它起源于两千多年前的亚里士多德逻辑，它又称为古典逻辑。我们现在见到的“形式逻辑”或“普通逻辑”著作，大多属于用自然语言表述的传统逻辑范围。然而，一旦在逻辑研究中超出这个范围，一旦引入数学方法并且加强对人工符号语言的应用，那便产生了大大优越于传统形式逻辑的数理逻辑。数理逻辑的最初设想起源于 17 世纪的德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716）。到现在，数理逻辑只有短短三百年的历史，但已经是一门门类众多、系统完整的学科。随着现代科学技术的突飞猛进，它同其他许多学科有着密切的联系。数理逻辑研究的可计算性问题，是计算机运算的理论基础，它所揭示的推理的逻辑关系，在计算机的线路设计中得到应用。在 20 世纪 40 年代，数理逻辑在开关线路、电子计算机、自动控制论、各种讯息处理系统等方面获得显著成果。20 世纪 60 年代以后，电子计算机不仅广泛应用在自然科学各领域里，而且应用于企业管理、考古等方面，这些应用不可避免地要进行各种程序设计，而程序设计方面有许多逻辑问题，数理逻辑在这方面的作

用是不可忽视的。数理逻辑的发展和应用，进一步促进了哲学、语言学、法学和心理学等学科的发展，使这些学科的知识水平不断提高，数理逻辑的理论及其应用必将进一步得到发展。

第一节 数理逻辑的研究对象和主要内容

逻辑学是研究思维形式及其规律的科学，它是一门比较抽象的科学，是人们认识真理和证明真理的一种工具。所以，逻辑学研究的对象和成果对任何科学都是必要的。

传统逻辑认为，思维形式就是思维的共有因素的联系形式，如概念、判断和推理。这些思维形式的具体结构就是思维的逻辑结构。让我们来看推理的逻辑结构。

例 1 一切造福于人类的知识都是有价值的；
科学是造福于人类的知识；
所以，科学是有价值的。

例 2 所有哲学上的唯物主义者都是无神论者；
所有马克思主义者都是哲学上的唯物主义者；
所以，所有马克思主义者都是无神论者。

例 1 和例 2 这两个推理的具体内容，即推理涉及的具体对象是不同的，但它们具有相同的逻辑结构。在传统逻辑中，这一结构可用符号表示为下列形式：

所有 M 都是 P；
所有 S 都是 M；
所以，所有 S 都是 P。

我们知道，这种共同的逻辑推理形式是由三个命题构成的。其中，前两个命题是前提，最后一个是结论。这种形式的推理就是传统逻辑中所谓的直言三段论推理。仅根据这一推理形式本身，我们无法辨别其正确与否。为此，传统逻辑制定了一整套复杂的推理规则，来保证三段论推理的正确性。然而这些推理规则中的某些规则，如只准有三个名词的规则，又和自然语言的意义有着十分密切的关系。因此，在传统逻辑中，要对思维和逻辑结构及其规律作精确的、纯形式的研究，实际上是不可能的。

另外，传统逻辑对假言、选言等混合而成的复杂推理及其形式，很难断定它们是否正确。比如，

例 3　如果张三课堂认真听讲而且课后认真复习，那么他就会取得良好成绩。张三课后认真复习，但他并非取得良好成绩。所以，他课堂不是认真听讲。

如果按传统逻辑的方法来处理，那么可以把这个推理形式化如下：

如果 p 而且 q，则 r；
q 而且非 r；

所以，非 p。

其中，p 表示张三课堂认真听讲；q 表示他课后认真复习；r 表示他取得良好成绩。但是从上边的形式化中，我们很难断定此答案是否正确。如果我们采取数理逻辑的方法，那么就可以弥补这些缺陷。在数理逻辑中，我们可以用一系列的符号把上述的三段论的推理形式变成符号公式。在不受自然语言的含混性干扰的情况下，通过对符号公式本身的研究，我们就能确定其相应的推理形式是否正确。

一般地说，传统逻辑推理理论的主要缺陷有：

第一，传统逻辑所讨论的主要限于主宾式语句的三段论，以致在很多方面都显得不适于使用。所谓主宾式语句是指“S是P”式的语句。它所讨论的限于四种：

全称肯定(A)：凡S是P，即SAP

全称否定(E)：凡S非P，即SEP

特称肯定(I)：有S是P，即SIP

特称否定(O)：有S非P，即SOP

然后，在这四种语句之上发展了三段论。

但是，在人们日常思维的领域里，常见的一些关系命题和关系推理是不能简单地被归结为主宾式的。比如，“甲大于乙，乙大于丙，所以，甲大于丙。”和“帝国主义是战争的根源，所以，消灭帝国主义即消灭战争的根源。”这两种推理都是牵涉到关系的推理，不能归结为主宾式。也许有人会说，前一个推理可以变成三段论：

凡大于乙的是大于丙的，

甲是大于乙的，

所以，甲是大于丙的。

这种说法把“大于”关系当作性质，从而把四项变成三项。这是一种混淆。“大于”根本不是性质。在“甲大于乙”这个命题中，甲和乙处于同等地位，都是关系主项，“大于”并不是属于甲的一种性质，而是甲和乙两者之间的关系。这个推理中有四项，即“甲”、“大于乙”、“乙”、“大于丙”。因此这个推理不是由主宾式语句构成的，不属于三段论。至于后一个关系推理更沾不上三段论的边。再如这样两个关系命题：

(1) 有的液体可以溶解一切固体。

(2) 一切固体都可以被有些液体溶解。

这两个关系命题从(1)可以推出(2)，却不能从(2)推出(1)。

(1)意指:有一个 y,使得 y 是液体并且对所有 x 而言,如果 x 是固体,那么 y 溶解 x。(2)意指:对所有 x 而言,如果 x 是固体,那么就有一个 y 使得 y 是液体并且 y 溶解 x。这两个关系命题在传统逻辑中是无法表示的。

第二,传统逻辑的研究限于主宾式语句,这样对量词的研究非常有限,没有抓住量词的实质,而只能得出量词的一些次要性质。请看下边两个命题:

(3)有一个自然数大于其余一切自然数。

这个命题等于说:有一个 y,使得 y 是自然数并且对所有 x 而言,如果 x 是自然数而 $x \neq y$,那么 y 大于 x。

(4)对于任何自然数 n 都有自然数 x 和 y,使得 $2(n+1)=x+y$ 而且 x 和 y 都是质数。

(3)和(4)中量词的使用,无论在日常语言中或者数学中都是不可缺少的,用传统逻辑的全称判断、特称判断显然是很难陈述出来的。

第三,传统逻辑研究一些逻辑结构并使用一些符号来表达逻辑形式,但由于它停留在自然语言上,没有专门的逻辑符号来处理各类思维形式;并由于它没有完全脱离自然语言,所以就不够精确,因之也就不具有演算的性质,不能把推理转化为演算,对于复杂的命题形式及推理它更是无法解决了。

由于上述原因,人们觉得传统逻辑很不够用,需要加以改革和发展。同时,由于理论科学的发展,特别是数学等科学的发展,有力地促进了演绎理论的研究。正是由于上面两方面的原因,从德国数学家兼哲学家莱布尼茨开始逐渐创建了数理逻辑。

什么是数理逻辑?数理逻辑就是采用数学的方法来研究思维形式的逻辑结构及其规律的一门科学。所谓数学的方

法，就是用一套符号（即人工符号语言）的方法。用它来表达思维的逻辑结构和规律，从而把对思维的研究转变为符号的研究。

数理逻辑对推理形式结构的研究，采用了符号化、形式化、公理化等数学方法，因而克服了传统逻辑的种种缺陷。它建立了各种演绎和符号系统，这些系统通常称之为"逻辑演算"或"逻辑推理"的系统。所谓逻辑演算，一般是指演绎逻辑的符号化的形式系统。系统中的公理和定理都是逻辑定律，如同一律、矛盾律、排中律以及演绎推理所依据的各种定律。因为它本身就是关于逻辑的理论，所以它不假定各种推理形式，而只假定几个最基本的推演规则，根据这些推演规则可以从少数几个公理推出全部逻辑定律。

数理逻辑的逻辑演算同传统逻辑对推理的研究相比，有许多不同之点，主要是：

第一，使用一整套符号语言，从而简化了推理形式。数理逻辑使用一套专门的符号来处理各种思维形式，完全消除了自然语言的含混性，摆脱了自然语言的局限。数理逻辑的一系列定理是根据已知前提、推理规则、已证的定理推演出来的。这种演算过程是通过符号公式来进行的，而这种演算系统也就呈现为符号系统。数理逻辑借助人工符号语言来表示推理的形式结构，从而把推理关系表现为公式与公式之间的关系，使推理转化为公式的推演。这样的逻辑运算显然能像算术或代数那样严格、精确，自然要比传统逻辑推理简单得多。

第二，数理逻辑借助人工符号语言，使整个推理形式化。它抽出自然语言的关联词，如"非"、"且"、"如果……则"等。用人工符号语言表示思维形式的结构，把思维形式完全形式化，这样不仅能显示思维形式的结构，使推理换成演算，而且

还有利于获得一系列逻辑定理。在数理逻辑中，逻辑联结词、命题、量词和推理的形式等，都用完全符号化、形式化的方法反映着思维的逻辑结构。当然，传统逻辑也具有形式的特点，但它并不是完全形式化的。

第三，数理逻辑同逻辑学的其他分支相比较，它的主要特征是系统性。它通过符号把思维的各种逻辑形式联系起来，组成一个完整的系统。它研究各种系统（比如推理系统、控制系统等等）的逻辑发展过程，也研究系统之间的相互关联。

从以上分析可知，数理逻辑对思维的逻辑结构及其规律比传统逻辑精确、丰富、系统、深刻。正如哥德尔（Gödel，1906—1978）所说，数理逻辑不外是形式逻辑的精确的和完全的表达。

顺便指出，对数理逻辑的研究，并不意味着抛弃传统逻辑，完全代替传统逻辑的研究。首先，传统逻辑本身不是从纯形式角度来研究思维形式及其规律的，而是从我们日常语言及其表达方式的角度来阐明思维形式正确性的。它的主要作用是帮助人们正确表达思想，正确进行论辩。所以，传统逻辑不能而且也不应该离开人们的日常语言和日常的具体思维。传统逻辑的这一作用是数理逻辑不能胜任的，人们在日常生活中决不会用数理逻辑的语言来表达和论辩。其次，传统逻辑讨论的一些和认识论有关的问题，数理逻辑也是处理不了的，因为这些问题不能用数学方法来处理。

总之，数理逻辑和传统逻辑是既有联系又有区别的，是两门不同的逻辑科学。从根本上讲，数理逻辑是传统逻辑的发展。因此逻辑学的学习不能停留在传统逻辑的阶段，要进一步研究数理逻辑，这样才能达到对思维的逻辑结构及其规律有比较深刻的认识。

迄今为止，数理逻辑已经形成了自己的研究方法和理论体系。一般说来，数理逻辑分五大部分：

（1）逻辑演算；（2）证明论；（3）集合论；（4）模型论；（5）递归论，又叫做能行性理论。

这五大部分内容中，逻辑演算（命题演算和谓词演算）是数理逻辑的基础部分，这部分讨论的内容都是纯逻辑的内容，而另外四部分则是和数学密切相关的，它们或者本身便是数学，从中抽出一部分作为数理逻辑的内容（如集合论、递归论）或者是由数学问题直接引出的（如证明论、模型论），讨论数学时不能不考虑它们，只是因为它们和逻辑有关，才归于逻辑，其实把它们算作数学，作为数学的一个新兴部门是完全可以的，这四部分内容不是哲学、社会科学工作者和高等院校文科学生必须掌握的学问，因此我们就不再一一介绍了。

第二节　数理逻辑的发展概况

迄今为止，数理逻辑仅仅有三百余年的历史，但它同任何一门科学一样，也经历了一个发生和发展的过程。它最初是作为‘运用数学方法的逻辑’产生的，主要是在数学等演绎科学发展的基础上为适应它们的表述和论证的需要而兴起的。随后，数学的发展逐渐正式提出并要求认真解决数学的逻辑和哲学基础问题，于是数理逻辑又进一步发展成主要是‘关于数学的逻辑”，并且与数学基础理论相结合，成了一门数学科学。前一种意义下的数理逻辑，又常称为逻辑演算，它通常作为基础部分包括在后一意义下的数理逻辑之中。后者是逻辑与整个数学相结合的产物，它研究数学中的逻辑问题。大

家知道，数学的一个特点是它的抽象性和逻辑上的严格性。每一条数学定理都要求有严格的逻辑证明。对数学中的特有逻辑问题的研究，既丰富了逻辑学的内容，也促进了数学的发展。由此可见，数理逻辑和数学的关系是相当密切的。

我们知道，数学研究的对象是现实世界的数量关系和空间形式，即数与形。数学的特点是它的高度抽象性、精确性和普遍性（应用的广泛性），17 世纪时，数学的发展日臻完善。通过用字母表示已知数量和未知数量以及用符号表示运算，代数已经完全符号化，即完全用人工符号语言表达数学的运算和定律；解析几何的创立，变量和函数概念的出现，使人们可以用代数方法来描述和研究几何图形。微积分的产生，又使人们可以用几何和代数方法来研究物质运动的形式。以上这些成就，为用代数方法研究思维形式及其规律提供了前提。人们设想，是否可以用代数的方法，把命题的形式结构用符号和公式来表达，把推理中前提与结论之间的关系转换为公式与公式之间的运算。正因为如此，在西方逻辑发展史上，从古希腊的哲学家亚里士多德创立古典逻辑以来，有许多逻辑学家、哲学家都曾设想并探索，把逻辑进一步形式化，把思维形式之间的关系和逻辑推理变成像代数、算术的运算一样，把符号语言运用到逻辑上，以推动逻辑的发展。经过一个不太长的时期，这一设想终于变为现实。具体地讲，从数理逻辑的产生和发展大致可分为三个阶段：

第一阶段——从 17 世纪 60 年代至 19 世纪 80 年代。

这个阶段数理逻辑研究的特点是，用一些初级的数学方法来处理古典逻辑中演绎推理的形式和规律，获得了初步的成功，逻辑代数就是这个阶段的重大成果。

早在古希腊毕达哥拉斯（Pythagoras，约前 580—前 500）

学派的哲学中,就有了把思维归为计算的思想。他们认为数是万物的本原,事物之间的关系就是数与数之间的关系。因此,观念(逻各斯)与数,思维与数学的运算是一回事。其后,伊壁鸠鲁派的斐珞德谟(公元前 1 世纪)曾在他的《哲学的语法》中明确谈到逻辑与计算的同一性。欧洲中世纪时,西班牙逻辑学家瑞蒙·卢尔(R. Lullus,1235—1315)开始用字母即数学符号来表达概念,用 +(加)、-(减)、×(乘)等来表达对概念的运算,试图得到一种逻辑演算。他是第一个提出和设计'逻辑机'的人。17 世纪资本主义还处于上升阶段,随着生产力的发展,自然科学也日益繁荣,在当时的自然科学中,力学占着主导的地位。力学的发展与数学是密不可分的。数学的成就提供了表达运动的形式和计算方法,同时力学的研究又推动了数学的进一步发展。数学的方法在认识自然、发展技术方面起到了重要作用。所以,人们的头脑里就产生了把数学的方法推广到其他科学领域的思想。人们希望能够用数学方法来研究思维,希望能够把思维过程转换为数学的计算。此时一些哲学家、科学家感到数学方法的精确、可靠,提出了把数学方法应用到其他科学领域中去。如英国的哲学家托马斯·霍布士(Thomas Hobbes,1588—1679),他在 1651 年写的《利维坦》一书中,明确提出思维就是计算,逻辑推理就像数学中的加法和减法一样。还有法国哲学家和数学家勒奈·笛卡儿(René Descartes,1596—1650),他也认为思维就是计算,逻辑就是记号的演算,并明确提出要创立一种新的科学的认识世界方法——普遍的数学方法的逻辑,可以应用到一切科学之中。不过大家公认数理逻辑的真正先驱是莱布尼茨。莱氏提出一个关于普遍符号逻辑的计划,即通用语言。他要建立的这种语言,要消除现存语言的局限性、不规则性,