实变函数论简明教程

王志林　刘永莉　编著

甘 肃 教 育 出 版 社

【书　名】实变函数论简明教程
【作　者】王志林，刘永莉编著
【出版项】　甘肃教育出版社 ，2004
【ISBN号】　7-5423-1374-6 / O174.1
【原书定价】10.50

内　容　简　介

本书以一维情形为主，精选实变函数的基本内容，由浅入深地讲述了 Lebesgue 测度与积分的主要原理。注重阐明观点与方法，较紧密地结合数学分析，同时在有关章节中指出了 Lebesgue 测度与积分推广到多维情形的思路与步骤。

本书注重师范性，文字简练，深入浅出，范例较多，通俗易懂，便于自学。因此，可作为师范院校的教材或参考书，也可作为函授教材或自学者用书。

前　　言

本书是参照教育部颁发的高等师范院校试用的《实变函数与泛函分析》教学大纲中的实变函数部分,结合多年来讲授此门课程的讲义基础上编写的。

实变函数是在集合论的观点与方法渗入数学分析的基础上产生的,它的主要内容是 Lebesgue 测度与积分理论。这些理论是数学分析课程中微积分理论的进一步发展,它们已经成为分析学各个重要分支的必不可少的工具。通过该门课程的学习,将使学生进一步加深对数学分析中微积分理论的理解,提高中学教师的现代数学素养,以便适应二十世纪以来数学上的飞速发展,跟上时代前进的步伐。

基于本课程的上述目的与意义,考虑到师范学校的培养目标和教学时间,在本书的编写过程中,我们注意到以尽量简明的形式介绍实变函数的核心内容,尽可能做到直观易懂与严密处理相结合,使读者获得进一步学习时所必需的基础知识。

限于我们的水平,本书难免有不少缺点与错误,敬请广大师生、读者批评指正。

王志林　刘永莉

2004 年 1 月

目　　录

第一章 集 合

§1 集合的概念

实变函数论是在实数理论和集合论的观点与方法上,渗入数学分析的基础上产生的.在这门理论中,集合论的许多基本概念得到广泛的应用.集合论是研究集合的一般性质的,属于数学基础的一个分支.关于集合与元素的严谨的定义、集合论的研究范围,这里不予涉及.

一般说来,要说明集合是什么,也就是集合的真正含义,需要涉及比较复杂的数学基础,正好像在几何中的"点"和"直线"一样,要说清楚什么是集合,必须引入一组特定的公理去刻画.就目前来说,我们只要求掌握以下朴素的说法:

"在一定范围内的个体事物的全体,当将它们看做一个整体时,我们把这个整体称为一个集合,其中每个个体事物叫做该集合的一个元素."

这里我们所说的集合概念与集论的创始人德国数学家 G·Cantor 对集合所给出的描述定义基本一致:"集合是我们感觉或思维中那些确定的能够加以区分的许多个体事物的整体."

例如,在代数学中,群、环、域等都是某种集,这种集的各个元素之间具有一定的代数关系;在几何学中,直线、曲线、曲面等都可

以看做是由点所组成的点集;数学分析中的实数集、连续函数集、某函数的定义域等都是常用的集.

以后,我们常用大写字母 $A, B, X, Y, \cdots$ 来表示集,而用小写字母 $a, b, x, y, \cdots$ 表示元素.

一个具体集合 A 可以通过列举其元素 $a, b, c\cdots$ 来定义,并记为

$$A = \{a, b, c, \cdots\};$$

也可以通过该集合的各元素必须且只须满足的条件 P 来定义,并记为

$$A = \{x \mid x \text{ 满足条件 } P\}.$$

例如方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解 x 的全体组成的数集是 $\{-1, 1\}$ 或 $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$.

设 A 是一个集合, x 是 A 的元素,我们称 x 属于 A,记为 $x \in A$; x 不是 A 的元素,称 x 不属于 A,记为 xú A 或 x| A.

一个集合由且只由它的元素所确定.任何事物,就某一个集合而言,或是属于该集,或是不属于该集,二者必居其一.一个集合的元素必须是互异的.因此,两个集合 A 与 B 当且仅当它们有完全一致的元素时,称为相等,记为 $A = B$.例如

$A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 7, 5, 2\}$, $C = \{x \mid x$ 为小于 10 的素数$\}$,

我们有 $A = B = C$.

为了研究问题的需要,我们引入没有元素的集合,称之为空集,记为 .例如

$$= \{x \mid x \neq x, x \in \mathrm{R}\} = \{x \mid x^2 = -1, x \in \mathrm{R}\}.$$

若集合的元素只有有限个(空集的元素个数认为是 0),则称之为有限集;其余的称为无限集或无穷集.

两个集合 A 与 B 如果具有关系: A 的每一个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记为 A B(读做 A 包含于 B),或称 B 包含 A,记为 B A.如果 A B 且(至少)存在 $x \in B$ 而 x

ú A,则称 A 是 B 的真子集.例如,有理数集 Q 是实数集 R 的真子集.

包含关系显然具有下面的性质:

定理 1　对任意集合 A, B, C,均有

(1)　　A, A　A;

(2)　A　B, B　A,则 $A = B$;

(3)　A　B, B　C,则 A　C.

注 1　必须注意∈与　的区别.∈表示集合和它元素之间的关系;　表示集合与集合之间的关系.故当 $a \in A$ 时,不能写成 a　A,但可写成$\{a\}$　A,这里$\{a\}$表示只有一个元素 a 的集合.

注 2　一个集合本身不能是这个集合的元素,即

若 A 为集合,则 $A \in A$ 不成立.

例如一个学生小组绝不是小组的一名学生,因此一般不能说“一切集合构成的集合”.

注 3　类似“全体大个子”并不构成集合.因为一个人究竟算不算“大个子”并没有明确的界限,有时难以判断他是否属于这个“集合”这类不明晰的对象不是古典集合论的对象,不能形成我们现在讲的集合 现代数学的一个领域弗晰(Fuzzy)集合论,是研究不清晰的对象组成的“集合”的.

§2　集合的运算

在实变函数论中,经常要将集合按照需要做各种各样的合并与分解,即通过所谓“集合的运算”做出一些新的集合,其中最常用的运算有“并”、“交”、“差”、“极限”等.

定义 1　设 A, B 是两个集合,将它们所共有的元素构成的一

个新的集合,称为 A 与 B 的并集,简称为并,记为 $A\cup B$.即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$,则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

一般说来,如果 I 是一集合,对于每一个 $\alpha\in I$,都相应地给定了一个集合 A_α,则我们就说给定了(以 I 为下标集的)一族集合 . 那么这族集合的并集,记为 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 即

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{存在某个 } \alpha\in I, \text{使 } x\in A_\alpha\}.$$

当 $I=\{1,2,\cdots,n\}$或$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$时,分别有

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid \text{有 } i\leq n, \text{使 } x\in A_i\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid \text{有正整数 } i, \text{使 } x\in A_i\}.$$

例 1 若 $A_i=\{x\mid i-1<x\leq i\}$, $i=1,2,3,\cdots$,则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid 0<x<+\infty\}=(0,+\infty).$$

例 2 若 $A_i=\{x\mid -1+\frac{1}{i}\leq x\leq 1-\frac{1}{i}\}$, $i=1,2,3,\cdots$,则

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid -1+\frac{1}{n}\leq x\leq 1-\frac{1}{n}\}=\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=A_n,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{x\mid -1<x<1\}=(-1,1).$$

例 3 设 I 是大于零而小于 1 的全体有理数构成的集合,

$$A_\alpha=\{x\mid \frac{\alpha}{2}<x<2\alpha\}, \alpha\in I, \text{则} \bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=(0,2).$$

定义 2 设 A, B 是两个集合,由一切既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的交集,简称为交,记为 $A\cap B$ 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例如 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{5,6\}$,则

$$A\cap B=\{2,3\}, A\cap C= \quad .$$

交的概念也可以推广到任意个集合的情形.设$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$是任意一族集合,则由一切同时属于每个$A_\alpha(\alpha \in I)$的元素所构成的集合称为这族集合的交集,记为$\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$,即

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid \text{对一切 } \alpha \in I, \text{有 } x \in A_\alpha\}.$$

当$A \cap B =$　时,我们说A和B不(相)交.对于集合族$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$,如果对任意$\alpha, \beta \in I$,都有$A_\alpha \cap A_\beta =$　,则说这族集合是互不相交或两两不交的.

例4　若$A_i = \{x \mid 0 \leq x < 1 + \frac{1}{i}\}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$,则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid 0 \leq x < 1 + \frac{1}{n}\} = [0, 1 + \frac{1}{n}) = A_n;$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1].$$

例5　若$A_n = \{x \mid n \leq x \leq n + \frac{3}{2}\}$, $n = 1, 2, 3\cdots$,则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \quad .$$

例6　若$A_i = \{x \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\}$, $i = 1, 2, 3, \cdots$,则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\} = A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}.$$

例7　若I是实数集,$A_\alpha = \{x \mid \alpha \leq x < +\infty\}$, $\alpha \in I$,则

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \quad .$$

根据交与并的定义立即可得:

定理1　下列各式恒成立:

(1)　$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2)　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3)　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha);$$

(4)　$A\cup A=A,A\cap A=A$.

证明:　以证(3)第二式为例.

设 $x\in A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)$,**则** $x\in A$ **且有** $\alpha_0\in I$,**使** $x\in B_{\alpha_0}$,**于是**

$$x\in A\cap B_{\alpha_0}\quad\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),$$

这证明了　$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\quad\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$,

再证反过来的包含关系.设 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$,**则有** $\alpha\in I$,**使** $x\in A\cap B_{\alpha_0}$,**此即** $x\in$ **且** $x\in B_{\alpha_0}$,**当然更有** $x\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$.**因此**, $x\in A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)$,**于是**

$$\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)\quad A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha).$$

综合起来,便得(3)的第二式,证毕.

定理 2　(1)　$(A\cap B)\quad A\quad(A\cup B)$;

(2)　**若** $A_\alpha\quad B_\alpha,\alpha\in I$,**则** $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\quad\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha,\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\quad\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$;

(3)　$\bigcup_{\alpha\in I}(A_\alpha\cup B_\alpha)=(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)\cup(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)$.

定义 3　**设** A、B **是两个集合,由一切属于** A **而不属于** B **的元素构成的集合称为** A **减** B **所得的差集,记为** $A-B$,**即**

$$A-B=\{x|x\in A,x|\quad B\}.$$

注:一般说来, $(A-B)\cup B=A$ **不一定成立.**

如果 $A\quad B$,**则** $A-B$ **称为** B **相对于** A **的余集,记为** $C_A B$.**特别是如果我们在某一问题中所考虑的一切集合都是某一给定集合** S **的子集时,集合** B **相对与** S **的余集** $S-B$ **就简称为** B **的余集,而把** $C_S B$ **简记为** CB **或** B^C.

定理 3　(1)　$S^C=\quad,\quad{}^C=S$;

(2)　$A\cup A^C=S,A\cap A^C=\quad$;

(3)　$(A^C)^C=A$;

(4)　$A-B=A\cap B^C$;

(5)　若 $A \subset B$,则 $A^C \supset B^C$.

定理 4　(De Morgan 公式)

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^C,\ \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^C .$$

证明　以证第一式为例 .

设 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C$,则 $x\notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$,那么,对 $\forall\alpha\in I$, $x\notin A_\alpha$,即 $\forall\alpha\in I$, $x\in A_\alpha^C$,从而 $x\in\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^C$,因此$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C \subset \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^C$;

再设 $x\in\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^C$,则 $\forall\alpha\in I$, $x\in A_\alpha^C$,即 $\forall\alpha\in I$, $x\notin A_\alpha$,从而 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$,亦即 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C$,所以$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^C \subset \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C$.

由所得的两个包含关系,便知等式成立 .证毕 .

这是一个很有用的公式,称之为德摩根(De Morgan)对偶原理 .它使我们能通过余集运算把并集变为交集,把交集变为并集 .

定义 4　设$\{A_i \mid i\in\mathrm{N}\}$为任意集列,由属于上述集列中无限多个集的那些元素的全体构成的集合为集列$\{A_i \mid i\in\mathrm{N}\}$的上限集或上极限,记为 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\ A_n = \{x \mid \text{存在无穷多个 } n, \text{使 } x\in A_n\}.$$

对集列$\{A_i\}$那种除有限个下标外,属于集列中每个集的元素的全体构成的集称为$\{A_i\}$的下限集或下极限,记为$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$,即

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid \text{除至多有限个 } n \text{ 外, 使 } x\in A_n\} .$$

注:　$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

例 8 .　设 A_n 如下定义:

$$A_{2m+1} = \left[0, 2 - \frac{1}{2m+1}\right],\ m = 0,1,2,3\cdots,$$

$$A_{2m} = \left[0, 1 + \frac{1}{2m}\right],\ m = 1,2,3,\cdots,$$

确定$\{A_n\}$的上极限和下极限 .

显然,对 $\forall n\in\mathrm{N}$, $[0,1] \subset A_n \subset [0,2)$,从而

$$[0,1] \quad \varliminf_{n\to\infty} A_n \quad \varlimsup_{n\to\infty} A_n \quad [0,2) .$$

对 $\forall x\in(1,2)$, $\exists N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,$1+\dfrac{1}{2n}<x<2-\dfrac{1}{2n+1}$,再由$\{A_n\}$定义,则有,当 $n>N$ 时,$x\in A_{2n+1}$,但 $x\notin A_{2n}$.因此,$\varlimsup_{n\to\infty} A_n=[0,2)$,$\varliminf_{n\to\infty} A_n=[0,1]$.

例 9. 设 对 $\forall n\in\mathbf{N}$,

$$A_{2n}=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 2n, 0\leq y\leq \frac{1}{2n}\}, n=1,2\cdots,$$

$$A_{2n+1}=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq \frac{1}{2n+1}, 0\leq y\leq 2n+1\}, n=0,1,2,\cdots,$$

则

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n=\{(x,0)\mid x\geq 0\}\cup\{(0,y)\mid y\geq 0\},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n=\{(x,0)\mid x\geq 0\}\cap\{(0,y)\mid y\geq 0\}=\{(0,0)\}.$$

对于集列$\{A_n\}$的上极限与下极限都可以用 A_n 的交和并来表示:

定理 5 $\varlimsup_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$, $\varliminf_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$.

证明 以证第一式为例.

记 $P=\varlimsup_{n\to\infty} A_n$, $Q=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$,下证 $P=Q$.

设 $x\in P$,则对 $\forall n$, $\exists m>n$,使 $x\in A_m$,即 $\forall n$,总有 $x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$,从而 $x\in Q$.

反之,设 $x\in Q$,即 $x\in(\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m)\cap\cdots\cap(\bigcup_{m=N}^{\infty}A_m)\cap\cdots$,从而对 $\forall N$,总有 $x\in\bigcup_{m=N+1}^{\infty}A_m$,此即 $\forall N$, $\exists m>N$,有 $x\in A_m$,即 $x\in P$.

因此,$P=Q$. 证毕.

定义 5 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$,则称集列$\{A_n\}$收敛,且将这一集称为$\{A_n\}$的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

例 10 . 设 $A_n = [0,1+\frac{1}{n}]$, $n=1,2,3,\cdots$,易知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,1],$$

从而$\{A_n\}$收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = [0,1]$.

定义 6 若集列$\{A_n\}$满足条件 $A_n \quad A_{n+1}$ ($A_n \quad A_{n+1}$), $n=1,2,3,\cdots$,则称$\{A_n\}$为单调增加(减少)集列,单调增加或单调减少的集列统称为单调集列 .

定理 6 单调集列总是收敛的:

(1)若$\{A_n\}$为单调增加集列,则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

(2)若$\{A_n\}$为单调减少集列,则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$;

证明 以证(1)为例 .

由$\{A_n\}$单调增加得:对 " $n\in\mathbb{N}$,有

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} A_m, \quad \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = A_n,$$

再由定理 5 即得:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

从而$\{A_n\}$收敛,并且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 证毕 .

§3 集合的对等与基数

在抽象地研究集合(即不考虑集合中元素的特性)时,一个集

合中元素的多少应该是基本的概念,比如一个由五个苹果组成的集合和一个由五个草莓组成的集合,当然是两个不同的集合,但是如果我们不计较它们的元素的具体属性时,它们却具有共同的特性,即它们的元素的多少是相同的(它们都是由五个元素组成的).相反,一个由五个苹果组成的集合和一个由六个苹果组成的集合之间却没有这种共同点.可见在抽象地研究集合时,元素的多少是值得重视的属性.

对于有限集合,对由有限多个元素组成的集合来说,表明元素多少的概念自然就是元素的个数.空集 的元素的个数是零,任意一个非空的有限集的元素个数都是一个正整数.为了求得一个有限集 M 中的元素个数,我们只要一个个地数它的元素就可以了,最后数到的那个数是多少,元素的个数就是多少.一个个地去数 M 中的元素,实际上就是依次用正整数去给 M 中的元素编号,比如说数到 5 了,那就是从 M 中挑出了一个元素 e,把它叫做第五号,它可以记做 e_5,这时必定已经先有了 e_1, e_2, e_3, e_4.因此,如果一个集合 M 含有 n 个元素,那么经过这样的"数"以后,就排成了下述形式:

$$M = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}.$$

现在设 M'是另外一个也是由 n 个元素组成的集合,那么对它的元素数过以后自然也就排成了

$$M' = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}.$$

由于 M 和 M'的元素个数相同,我们让 M'中编号为 i 的元素 e'_i 和 M 中具有同一编号的元素 e_i 相对应,则这个对应是一对一的.反之,如果 M''是另一个集合,元素的个数并不知道,但是若有一种使它的元素 e''和 M 的元素 e 一个一个地能对应起来,则 M'' 的元素个数必定是 n.就好像我们如果已知有 80 个人,另外还有一堆书,不知有多少本,但是当每人拿一本时,正好拿完,既没有人拿两本,也没有人没有拿,那么恰好就是 80 本,用不着再一本本地

去数.如果人数事先也是未知的,那么我们当然还是不知道书有多少本,但是我们可以肯定人和书的数目必定是相同的,即这个“人的集合”和这个“书的集合”的元素个数相同.

以上的分析表明:要说明两个有限集合 M 和 M' 具有同样多的元素,我们并不需要知道它们元素的个数是多少,而只要能在它们的元素之间建立起一个一一对应的关系来就可以了.这个事实启示我们如何去研究无穷集合中元素的数量,即如何鉴别两个无限集合的元素的数量是否有差别.要注意,对无限集合来说,元素的“个数”这个概念已经完全没有意义了.

下面我们来严格叙述映射和一一对应的概念.

大家知道,数学分析中所讲的函数可以看成是数集与数集之间的一种对应关系:

$$f:\begin{cases} X\to Y & (X,Y\quad \mathrm{R}),\\ x(\in X)\to y=f(x)\in Y. \end{cases}$$

把这种函数概念一般化后,得到下面映射的概念.

定义 1　设 A、B 是两个非空集合,若存在某个法则 f,对于 A 中每一个元素 x,都有 B 中惟一确定的元素 y 与 x 对应,则称 f 为从 A 到 B 的一个映射,记做

$$f: A\to B.$$

且称 x 所对应的 y 为 x 的象,记做 $y=f(x)$;而称 x 为 y 的原象,又称 A 为 f 的定义域,而称集合 $\{y\mid y=f(x),x\in A\}$ 为 f 的值域.如果 f 的值域为整个 B,即 " $y\in B$,v $x\in A$,使 $y=f(x)$,则称 f 为 A 到 B 的一个满射,记为 $B=f(A)$.

一般说来,对 $x_1,x_2\in A$,$x_1\neq x_2$,可能有 $f(x_1)=f(x_2)$,因此,我们特给出下述定义:

定义 2　设 f 为 $A\to B$ 的一个映射.若 $f(x_1)=f(x_2)$ 时,必有 $x_1=x_2$(也即 $x_1\neq x_2\quad f(x_1)\neq f(x_2)$),则称 f 为 $A\to B$ 的一个单射.