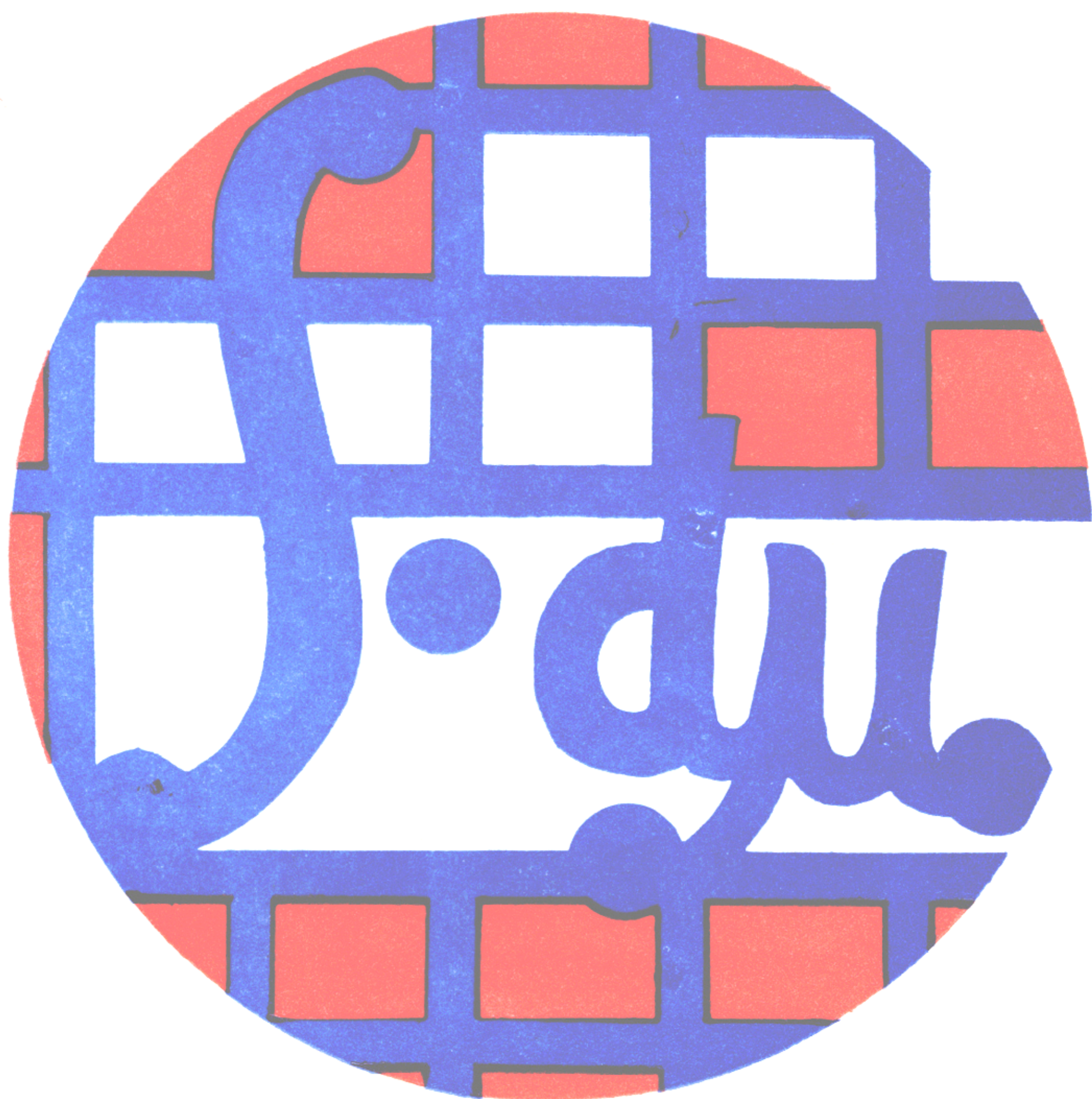


# 实变函数论

杨维奇 编著



北京理工大学出版社

# 实变函数论

杨维奇 编著

北京理工大学出版社

**(京) 新登字 149 号**

## **内 容 简 介**

本书介绍实变函数的基本理论，内容包括：一般集理论，直线上的点集，测度，可测函数，勒贝格积分，积分的一般理论。各节后面有供读者作初步练习的习题，各章后面有补充题。为使读者易于接受抽象的概念和理论从而化难为易，本书作了一些独特的处理。

作为教材，本书具有较广泛的适用性，其内容既符合综合大学数学系教学大纲的基本要求，又可通过删减一些章节使之适合各类院校数学专业与应用数学专业实变课程教学的需要。

本书可供理工科高年级大学生、研究生、教师和其他科技人员参考。

## **实 变 函 数 论**

杨维奇 编著

\*

北京理工大学出版社出版发行

各地新华书店经售

清华大学印刷厂印刷

\*

787 × 1092 毫米 32 开本 8.875 印张 198 千字

1994 年 8 月第一版 1994 年 8 月第一次印刷

ISBN 7-81013-109-5/O · 23

印数：1—2200 册

定价：6.00 元

## 前 言

对于数学专业与应用数学专业的学生，对于从事与分析数学有联系的理论与应用研究的科技工作者，实变课程的训练是至关重要的，这或许是使他们成为高层次人才的阶梯。

所谓实变函数论，即为了克服黎曼积分理论的缺陷而创立的新积分理论。它包含作为其基础的集合与测度的理论，故亦可称为测度与积分理论。

测度理论比较抽象，这就使得实变课程的教与学都有一定的难度。如何化解这个难字，正是笔者近几年在讲授该课程的教学实践中所着力要解决的课题。这也是编写本书所企望达到的目的。

淡化测度理论内容以减小实变课程难度，似乎并非良策；事实上，抽象测度的应用范围日益广泛，已成为科技人员的必备知识。本书则从调整理论体系入手作一点尝试。

本书的理论体系的确定以使得概念引入和思路发展顺乎自然为原则，力求使读者不仅知其然而且能知其所以然。比如，在引入勒贝格积分概念之前先对黎曼积分理论作一番剖析和改写，使得区间上有界函数的勒贝格积分理论几乎成为黎曼积分理论的平凡推广；对难度较大的重积分理论作了适当处理，使之只需一次课（两学时）即可讲述明白；千方百计为新内容与旧知识之间架设尽可能好的桥梁，使得一些比较玄妙深奥的概念变得自然而然，等等。

通过反复向读者展示“从特殊到一般，再从一般到特殊”这一最基本的数学思维方法，不断提出问题和解决问题，试图使读者在潜移默化中得到方法论上的启迪和素质上的提高，能比较轻松地顺着思维逻辑的自然发展登上一个个新台阶。倘能如此，将是笔者最大的快慰。

广泛的适用性是本书的另一追求。它符合综合大学数学系教学大纲的基本要求，又可通过删减一些章节使之适合各类院校数学与应用数学专业实变课教学需要。为便于教学，对使用本教材的教师，将提供本书习题的解答与提示，以供参考。

衷心感谢李忠、王戌堂教授的热情支持和帮助。

希望本书能对广大的科技人员和高等院校理工科师生有所裨益。

编著者

1993年8月于北京

# 目 录

<b>第一章 一般集理论</b> .....	1
§1 集与集的运算.....	1
1. 集的概念.....	1
2. 集的运算.....	3
3. 集列的极限集.....	7
4. 函数与集.....	9
5. 集的特征函数.....	11
§2 映射与势.....	15
1. 映射.....	15
2. 对等集与势.....	17
3. 可列集与最小无限势 $\aleph_0$ .....	21
4. 不可列集与连续点集的势 $\aleph$ .....	24
§3 补充: 商集与序.....	29
1. 等价关系与商集.....	29
2. 序关系与曹恩引理.....	32
<b>第二章 直线上的点集</b> .....	35
§1 实数的构造.....	35
1. 实数的构造.....	35
2. 实数的四则运算.....	36
3. 实数的大小顺序, 绝对值.....	39
4. 实数系的完备性.....	41
5. 实数直线.....	44
§2 直线上的点集.....	46

1. 点与点集的关系	46
2. 开集与闭集	48
3. 直线上开集的构造	51
4. 完全集	53
5. 稠密和疏朗	55
<b>第三章 测度</b>	<b>59</b>
§1 引言	59
1. 问题的提出	59
2. 可测集与测度概念的引入	61
3. 新课题与新途径	64
§2 集类与直线上的波雷尔集	67
1. 具有特定性质的最大集类与最小集类	67
2. 环与代数	68
3. $\sigma$ 环与 $\sigma$ 代数	69
4. $\mathcal{H}(\mathcal{A})$	71
5. 单调类	73
6. 波雷尔集	75
§3 环上的测度	77
1. 定义及基本性质	77
2. $\mathcal{R}_0$ 上的测度 $m$	82
3. 上一小节内容的两点引伸	86
§4 测度的延拓	89
1. 外测度及其性质	89
2. $\mu^*$ 可测集	92
3. 完全测度	97
§5 直线上的勒贝格测度	98
1. 等价定义	98
2. 勒贝格可测集类 $\mathcal{L}$ 的构造	103

3.	勒贝格测度的平移不变性与不可测集	104
4.	唯一性定理	107
5.	$\sigma$ 有限测度	108
6.	勒贝格测度的推广	111
<b>第四章 可测函数</b>		<b>117</b>
§1	可测函数定义及基本性质	117
1.	问题的提出	117
2.	可测空间	118
3.	可测函数的定义	118
4.	可测函数的性质	120
5.	简单可测函数	124
6.	可测函数的充要条件	126
7.	一个例子	127
§2	可测函数序列的收敛性	129
1.	概述	129
2.	测度空间与几乎处处	129
3.	一个引理	131
4.	叶果洛夫定理	132
5.	依测度收敛	133
6.	两种收敛性的关系	134
7.	反例	136
8.	依测度收敛可测函数列的性质	138
§3	勒贝格可测函数的构造	143
1.	从一般到特殊	143
2.	与波雷尔可测函数的关系	143
3.	连续性概念的推广	145
4.	鲁津定理	148
5.	鲁津定理的等价形式	150

<b>第五章 勒贝格积分</b> .....	156
§1 黎曼积分理论的回顾.....	156
1. 区间的分划.....	156
2. 黎曼和, 大和与小和.....	157
3. 黎曼积分定义与可积函数的有界性.....	160
4. 黎曼可积性的等价定义.....	161
5. 黎曼不可积函数.....	166
§2 狭义的勒贝格积分.....	167
1. 勒贝格上积分与下积分.....	167
2. 狭义的勒贝格积分的定义.....	169
3. 狭义勒贝格可积函数的充要条件.....	172
§3 一般的勒贝格积分.....	177
1. 区间上一般勒贝格积分的定义.....	177
2. 直线上的勒贝格积分定义.....	180
3. 勒贝格可测集上的勒贝格积分定义.....	183
4. 勒贝格积分的性质.....	187
5. 勒贝格可积函数与连续函数.....	191
§4 积分与极限可交换的条件.....	194
1. 勒维引理与法都引理.....	194
2. 勒贝格控制收敛定理.....	197
3. 控制收敛定理的应用.....	198
§5 不定积分与全连续函数.....	204
1. 不定积分的全连续性.....	204
2. 不定积分的导函数.....	205
3. 牛顿-莱布尼兹公式.....	208
§6 黎曼可积函数空间的完备化.....	213
1. 距离空间及其完备化.....	213
2. 空间 $L(E)$ 的完备性.....	214

3.	$L[a, b]$ 是 $R[a, b]$ 的完备化空间	215
4.	勒贝格可积函数的另一等价定义	218
§7	重积分与富比尼定理	220
1.	平面勒贝格可测集测度的积分表示	220
2.	重积分与累次积分定义	224
3.	富比尼定理	226
<b>第六章</b>	<b>积分的一般理论</b>	<b>234</b>
§1	一般积分的定义与性质	234
1.	一般积分的定义	234
2.	几个引理	238
3.	一般积分的性质	241
§2	积分的极限定理	247
1.	几个基本的积分极限定理	247
2.	积分极限定理的应用	251
§3	可积函数空间	255
1.	巴拿赫空间	255
2.	可积函数空间的范数及完备性	256
3.	积分的等价定义	258
§4	重积分与富比尼定理的一般形式	260
1.	乘积测度空间	260
2.	乘积空间中可测集测度的积分表示	263
3.	一般重积分与累次积分定义	267
4.	富比尼定理的一般形式	268
<b>附录</b>	<b>勒贝格定理的证明</b>	<b>271</b>

# 第一章 一般集理论

## §1 集与集的运算

德国数学家康托在 19 世纪 80 年代创立的集论，已成为现代数学的基础。实变函数理论正是集论的观点与方法渗入数学分析的产物。集论本身已发展成为数学中一个范围很广的学科；本章所介绍的一般集论及下一章直线上的点集理论，作为学习实变函数论所必需的预备知识，是十分有限的。对集论感兴趣的读者，可参阅阿力山大洛夫《集与函数的泛论初阶》一书或豪斯道夫的《集论》。

### 1. 集的概念

把具有某种特定性质的对象的全体称为集合或简称为集，其中每个对象称为该集的元素。例如自然数的全体是一集，每个自然数都是它的元素；又如直线上点的全体是一集，直线上每一点都是它的元素；实系数多项式全体为一集，每个实系数多项式都是它的元素。

通常用大写字母表示集，用小写字母表示元素。集的表示方式有两种，既可表示为

$$A = \{x: x \text{ 具有性质 } P\}$$

也可在花括号内将具有性质  $P$  的  $x$  穷举出来。例如方程  $x^2 - 1 = 0$  的解所组成的集合可表示为

$$\{x: x^2 - 1 = 0\} \quad \text{或} \quad \{-1, 1\}$$

又如自然数全体所组成的集合  $N$  可表示为

$$N = \{n: n \text{ 是自然数}\}$$

或 
$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

任何对象，对于某一集而言，要么属于该集，要么不属于该集，二者必居其一。

若  $x$  属于集  $A$ （即  $x$  是  $A$  的元素），则记为

$$x \in A$$

若  $x$  不属于集  $A$ （即  $x$  不是  $A$  的元素），则记为

$$x \notin A$$

值得注意的是，集合同它的元素之间的关系是整体与个别的关系，是对立统一的关系。请留意这种关系的对立性；一个集决不能作为它自身的元素，因而“由一切集合组成的集”的提法是荒谬的。同样，读者应当把直线上一点  $a$  同由点  $a$  组成的单点集  $\{a\}$  区别开来，决不要把  $a$  和  $\{a\}$  视为同一物。

考虑如下集合：

$$\{x: x^2 + 1 = 0, x \text{ 是实数}\}$$

这个集合不含任何元素。这样的例子还可以举出很多。我们把不含任何元素的集称为空集，记为  $\emptyset$ 。读者将会看到，空集概念不仅反映了客观存在，而且还具有重要的理论意义。

现在考虑两个集之间的关系。

**定义 1.1** 设  $A$  和  $B$  是两个集合。若集  $B$  的每个元素都是集  $A$  的元素，则称  $B$  为  $A$  的子集，称  $A$  为  $B$  的包集，记为

$$B \subset A \quad \text{或} \quad A \supset B$$

众所周知，一命题与其逆否命题等价。在定义中，“集  $B$  的每个元素都是集  $A$  的元素”这一条件可代之以“非集  $A$  元素均非集  $B$  的元素”。于是知空集是任何集合的子集。

**定义 1.2** 若  $A$  是  $B$  的子集，且  $B$  又是  $A$  的子集，则称集  $A$  与  $B$  相等，记为  $A = B$ 。

若  $B \subset A$  且  $A \neq B$ ，则称  $B$  是  $A$  的真子集。

应当指出，用描述的方式所给出的集与元素定义，并不严谨。不过，对于本书，这已足够了。其严格定义属于集论的研究范围，有所谓公理化集论，本书不予涉及。

## 2. 集的运算

两个集合之间有下列运算：

**定义 1.3** 设  $A$  和  $B$  是两个集。定义运算

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$A \times B = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$$

分别称之为  $A$  和  $B$  的 并集、交集、差集、对称差、直积（或笛卡尔乘积）。

设  $A$  和  $B$  是如图 1.1 所示的两个圆盘，则它们的并、交、差、对称差分别为图 1.2 所示。

两个集的乘积是从第一个集中取一元素，再从第二个集

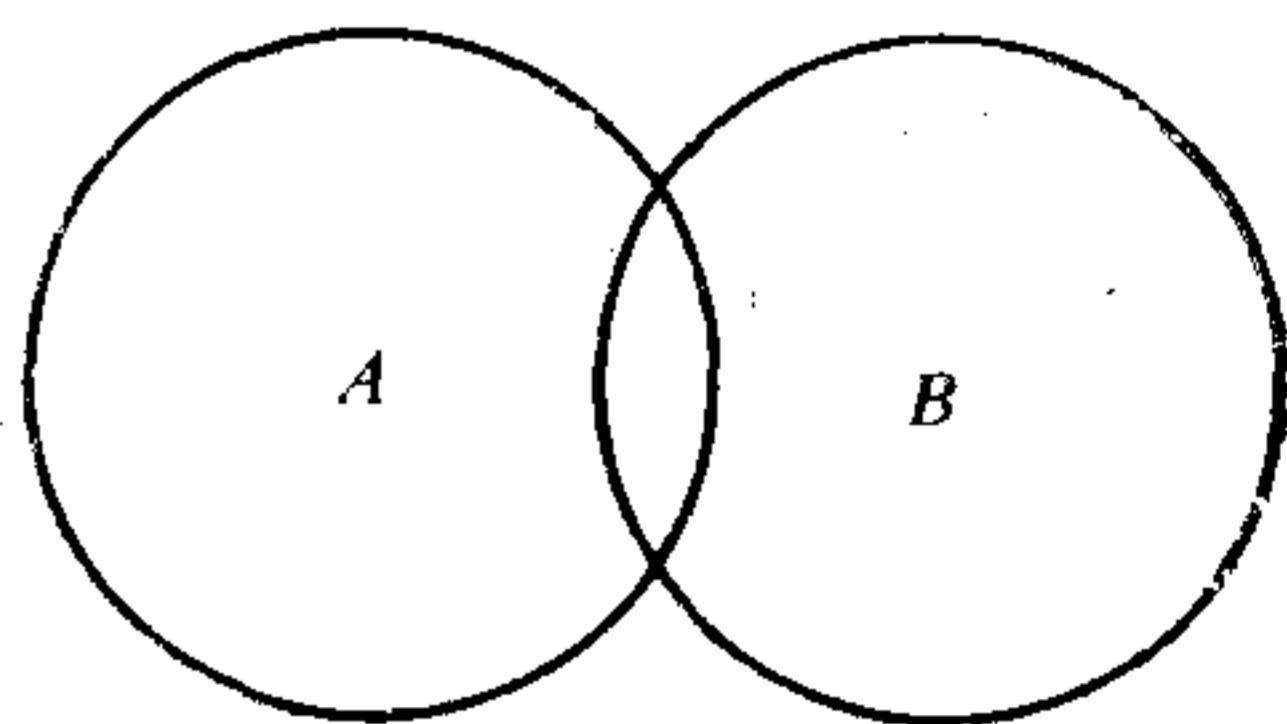


图 1.1

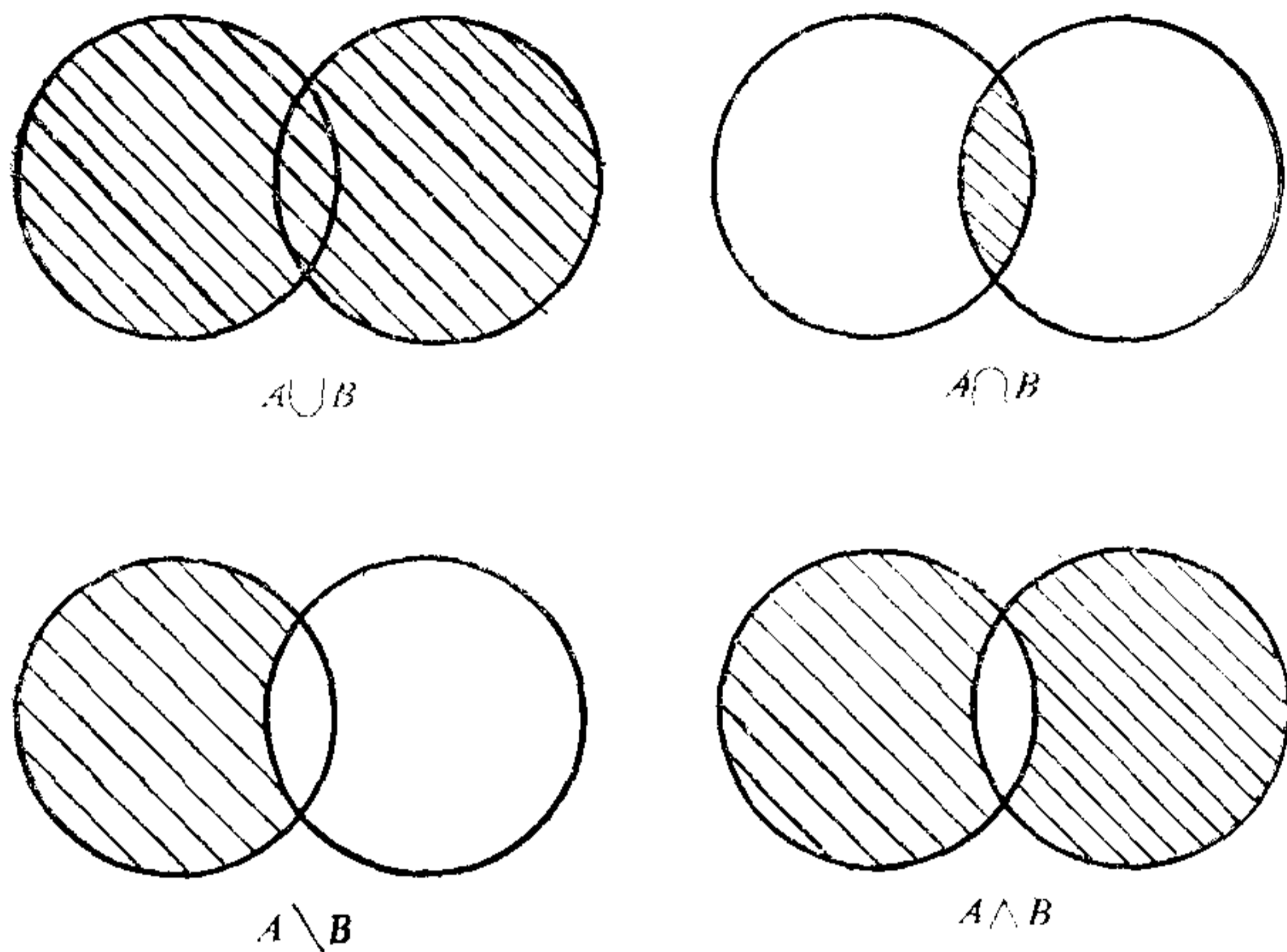


图 1.2

中取一元素，所组成的有序元素对的全体。例如  $[0, 1] \times [0, 1]$  是平面上单位闭正方形；以  $Q$  表示有理数全体，则  $Q \times Q$  是平面上的有理点集。当  $A \neq B$  且  $A$  与  $B$  非空时，显然有

$$A \times B \neq B \times A$$

通常将  $A \times A$  记为  $A^2$ 。

关于并和交运算有下列重要的规律：

**定理 1.1** 设  $A, B, C$  是集合，则有

(i) 交换律： $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(ii) 结合律： $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(iii) 分配律： $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

这些关系式留给读者去证明。

并和交这两种运算不仅可以在有限个集合之间进行，还可以推广到无限多个集合的情形。

设

$$\{A_\alpha: \alpha \in I\}$$

是任意一组集，其中  $I$  称为指标集，对于每个指标  $\alpha \in I$ ，相应有一个集  $A_\alpha$  与之对应。定义这组集合的并集为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x: \text{存在 } \alpha \in I \text{ 使 } x \in A_\alpha\}$$

定义这组集合的交集为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x: x \in A_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$

通常把以集合为元素的集称为集族（或集类），且用花体大写字母表示集族。

分配律的更一般形式为

$$(iii)' \quad A \cup \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup A_\alpha)$$

$$A \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha)$$

当两个集的交集非空时，称这两个集相交。当两个集的交集是空集时，称这两个集不相交。说一个集族是不相交集族是指该集族中任何两个集都不相交。

下面讨论一下差运算。

当  $B$  是  $A$  的子集时，称差集  $A \setminus B$  是集  $B$  相对于  $A$  的补集（或余集），记为  $C_A B$ 。通常，在我们讨论问题的范围内，所涉及的集合都是某个集  $X$  的子集，这时把集  $X$  称为全空间，集  $B$  关于  $X$  的补集就简单地记为  $B^c$ ，并简称其为  $B$  的余集。用式子表达即有：

$$B^c = \{x \in X; x \notin B\}$$

显然，有下列简单事实：

$$A \cup A^c = X, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad (A^c)^c = A$$

$$X^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = X, \quad A \setminus B = A \cap B^c$$

$$A \supset B \Rightarrow A^c \subset B^c$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$$

特别地，有如下的重要关系式。

**定理 1.2** (迪摩根法则)

$$(i) \quad \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \quad (1.1)$$

$$(ii) \quad \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c \quad (1.2)$$

[证明] 先证等式 (i)。

$$\forall x \in \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$$

有  $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

即  $\forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha$

故  $\forall \alpha \in I, x \in A_\alpha^c$

从而  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

这表明  $\left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c \subset \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

反之，

$$\forall x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

有  $x \in A_\alpha^c, \forall \alpha \in I$

即  $\forall \alpha \in I, x \notin A_\alpha$

从而  $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

故  $x \in \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$

这推出  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \subset \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$

因此等式 (i) 成立。

记  $B_\alpha = A_\alpha^c$

则由  $\left( \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha^c$

推出  $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \left( \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha^c \right)^c$

即  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c = \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c$  □

等式 (i) 和 (ii) 可推广为

$$(i)' \quad A \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha) \quad (1.3)$$

$$(ii)' \quad A \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha) \quad (1.4)$$

其证明留给读者去完成。

### 3. 集列的极限集

当集族的指标集是自然数集时，称该集族为集列。故集列总可表示成  $\{A_1, A_2, \dots\}$  的形式。通常简记为  $\{A_n\}$ 。

很自然，对于单调集列可引入极限集的概念。

**定义 1.4** 若  $\{A_n\}$  是递减集列，即