声 明

本电子书由中国农业出版社数字出版，相关权利归中国农业出版社拥有。读者、著作权人和（或）依法可以行使著作权的权利人如有疑问，请与中国农业出版社联系：

地址：北京市朝阳区麦子店街 18 号楼

邮编：100026

电话：010-64194921 010-65005894

E-mail:lishanzhao@sina.com

中国农业出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

全国高等农业院校教材

高 等 数 学

·第 二 版

北京农业大学　主编

中 国 农 业 出 版 社

第二版序言

本书第二版系遵照农牧渔业部关于修订高等农业院校通用教材的指示精神，根据1982年审定的“高等农业院校数学课程教学大纲”，在第一版基础上，做为高等农业院校“高等数学”课程教材而修订编写的。这次修订，对原教材做了较大的修改和补充，与第一版相比，这一版无论在基础理论方面还是科学性系统性方面都有所加强。修订中注意吸收了几年来各高等农业院校对第一版教材的使用经验。在内容方面变动较大的是新增加了空间解析几何和二重积分两章，第二章中大部分内容也进行了改写，其它有些章节根据1982年审订的“大纲”要求也增加了部分内容。凡第一版比较适用的部分都保持原样未动。第一版中“概率论与数理统计初步”一章，根据1982年审订的“大纲”要求，已重新编写，并将单独出版，因此在第二版中，这部分内容没再列入。书中凡附有“*”号的部分，对于高等数学课程学时少的院校或专业可以不讲，其它有些内容，在讲授时也可酌情进一步精简。

本书第二版仍由北京农业大学裴鑫德主编，参加编写和修订的还有张嘉林、戴崇表、胡秉民、袁志发和许煜沂同志。

本书第一版出版后，曾蒙读者提出不少宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢。由于水平所限，第二版内容仍难免有不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1984年8月

主　编　人　裴鑫德（北京农业大学）
编写人员　张嘉林（北京农业大学）
戴崇表（南京农业大学）
胡秉民（浙江农业大学）
袁志发（西北农业大学）
许煜沂（北京农业大学）

第一版序言

本书是根据原农林部1977年关于编写高等农林院校试用教材的指示精神，为高等农业院校编写的《高等数学》教材。

根据农业院校各专业对《高等数学》课程内容的要求，以及我国实现社会主义农业现代化和农业科学技术的不断发展，在内容方面着重介绍了高等数学中微积分的基本内容，同时也考虑了生物统计、遗传育种等有关课程的需要，介绍了概率论与数理统计初步。编写中注意了作为基础课《高等数学》本身的系统性和理论联系实际的原则。为了便于学生自学，在叙述上力求由浅入深、通俗易懂，在讲解基本理论概念的基础上又选配了一定数量的例题，在每章末附了必要的习题，书后附有习题答案，并附有初等数学基本公式、基本积分表及其它统计用表，供教学时参考使用。

在讲授本教材时，各院校可根据各专业的具体情况和学时要求对教材内容作部分的变动或取舍，当然习题也应作些选择，不一定全做。

本书初稿曾蒙杨庆熙、尹仲直、陈振权、张孝玲、陈维博、罗筱鸿、胡关长等同志审阅并提出许多宝贵意见，在此一并表示感谢。

本书除可作为高等农业院校教材外，亦可作为有关院校生物系的教学参考书以及农业科技人员的参考书。

由于水平所限，又加时间仓促，编写中难免有不妥甚至错误之处，欢迎使用本书的同志批评指正。

编　者

1978年2月

需要全本请访问 www.ertongbook.com

目　录

第一章　函数 …… 1

§1.1　函数概念 …… 1

§1.2　基本初等函数及其图形 …… 11

§1.3　复合函数、初等函数 …… 17

习题一 …… 19

第二章　极限与连续 …… 23

§2.1　数列的极限 …… 23

§2.2　函数的极限 …… 27

§2.3　无穷小量与无穷大量 …… 33

§2.4　极限运算法则 …… 38

§2.5　极限存在准则、两个重要的极限 …… 41

§2.6　函数的连续与间断 …… 45

§2.7　初等函数的连续性 …… 50

习题二 …… 51

第三章　导数及其应用 …… 55

§3.1　导数概念 …… 55

§3.2　几个初等函数的导数 …… 60

§3.3　函数的和、差、积、商的导数 …… 64

§3.4　反函数的导数 …… 68

§3.5　复合函数的导数 …… 70

§3.6　隐函数及其导数 …… 73

§3.7　高阶导数 …… 76

§3.8　微分中值定理 …… 77

§3.9　洛必塔法则 …… 81

§3.10　函数单调增减性的判别法 …… 87

§3.11　函数的极值 …… 89

§3.12　函数的最大值与最小值 …… 92

§3.13　曲线的凸凹性与拐点 …… 95

§3.14　曲线的渐近线 …… 98

§3.15　函数的作图 …… 102

习题三 …… 106

第四章　微分及其应用 …… 111

§4.1　微分概念 …… 111

§4.2　微分公式与微分法则 …… 114

§4.3 微分在近似计算和估计误差中的应用 ……117
§4.4 高阶微分 ……121
§4.5 泰勒公式及其应用 ……122
§4.6* 方程的近似解 ……125
习题四 ……130
第五章 不定积分 ……132
§5.1 原函数与不定积分 ……132
§5.2 不定积分的主要性质与积分基本公式 ……134
§5.3 不定积分的计算 ……136
§5.4 积分表的用法举例 ……160
习题五 ……163
第六章 定积分 ……168
§6.1 定积分概念 ……168
§6.2 定积分的基本性质 ……174
§6.3 定积分与不定积分的关系 ……176
§6.4 定积分的计算 ……180
§6.5 广义积分 ……183
§6.6 定积分的应用 ……189
§6.7 定积分的近似计算 ……199
习题六 ……204
第七章 空间解析几何与向量代数 ……210
§7.1 空间直角坐标系 ……210
§7.2* 向量概念 ……212
§7.3* 向量加减法、向量与数量乘法 ……213
§7.4* 向量的坐标 ……215
§7.5* 两向量的数量积与向量积 ……220
§7.6 曲面方程 ……226
§7.7* 平面及其方程 ……230
§7.8* 空间的直线及其方程 ……233
§7.9 二次曲面 ……235
习题七 ……237
第八章 多元函数的微分法 ……243
§8.1 二元函数及其图形 ……243
§8.2 二元函数的极限与连续 ……245
§8.3 偏导数与全微分 ……246
§8.4 二元函数的极值 ……251
§8.5 函数的线性化 ……253
§8.6 应用最小二乘法建立经验公式 ……258
§8.7 复合函数的微分法 ……262
§8.8 隐函数的微分法 ……265
习题八 ……267

第九章　二重积分 ……270
§9.1　二重积分的概念 ……270
§9.2　二重积分的基本性质 ……273
§9.3　二重积分的计算 ……274
§9.4　二重积分应用举例 ……282
习题九 ……284
第十章　微分方程 ……287
§10.1　微分方程的一般概念 ……287
§10.2　一阶微分方程 ……289
§10.3　几个特殊类型的二阶微分方程 ……296
§10.4　常系数二阶线性微分方程 ……300
习题十 ……307
附录一　习题答案 ……309
附录二　常用的初等数学基本公式 ……331
附录三　基本积分表 ……337
附录四　Γ-函数表 ……347
附录五　希腊字母表 ……348

第一章　函　　数

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学。初等数学主要是研究常量和相对静止状态的数学，而高等数学，其中主要部分是微积分，研究的是变量和运动的数学。正如恩格斯在《自然辩证法》中指出："数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生。"①

本章是在初等数学的基础上进一步讨论函数概念。函数概念是高等数学中最基本的概念之一，是微积分研究的主要对象，是客观世界中变量之间依从关系的反映，是许多科学技术中表达自然规律的基本概念。因此，掌握好函数概念具有重要意义。

§1.1　函数概念

一、常量与变量

当我们研究或观察某种自然现象或技术过程时，常常在这种自然现象或技术过程中遇到各种不同的量，其中有些量在整个现象或过程中，始终保持同一数值不起变化，这种量叫做**常量**。而另外有些量却有变化，也就是可取各种不同的数值，这种量叫做**变量**。

例如，某物体自某一高度自由落下时，物体的质量保持常值不变，是常量；但物体与地面的距离、物体下落的速度都在变化，是变量。

需要注意，我们说一个量是常量或是变量，都是指在某一确定的现象或过程中来说的，同一个量在某种情况下，可以看成是常量，而在另外一种情况下，又可能是变量。

例如，对圆的面积 S 这一个量来说，如果圆的半径给定，则 S 就是定值，是常量；如果圆的半径可以取各种不同的值，即取变量时，则 S 又是变量了。

又如，重力加速度 g，在地球表面上某一定地点时可以看成是常量。但是我们知道，重力加速度 g 在地球的赤道和两极这样两个不同的地方又是不同的，这时它又应该看成是变量了。

在高等数学中，为了研究问题方便起见，有时把常量看成是取同一个值的变量。

常量一般用字母 a、b、c 等来表示，而变量用字母 x、y、z 等来表示。

因为量 x 的每一个值都是一个数，因而可以用数轴上的一个点来表示，如果量 x 是常量，则用数轴上一个定点来表示；如果量 x 是变量，则用数轴上的动点来表示。

---

① 恩格斯，《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第236页。

二、区间与邻域

变量的变化范围，常常是介于两个实数之间的全体实数值。我们把介于两个实数之间的全体实数叫做**区间**，而那两个实数叫做**区间的端点**。

设 a、b 为两个已知实数，且 $a<b$，则满足不等式

$$a<x<b$$

的实数 x 的全体叫做**开区间**，用记号 (a,b) 表示。

满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的实数 x 的全体叫做**闭区间**，用记号 $[a,b]$ 表示。

满足不等式

$$a\leqslant x<b$$

或

$$a<x\leqslant b$$

的实数 x 的全体叫做**半开区间**，且分别用记号 $[a,b)$ 及 $(a,b]$ 表示。

如区间 $[a,b)$ 在数轴上的几何表示即为图1.1所示。

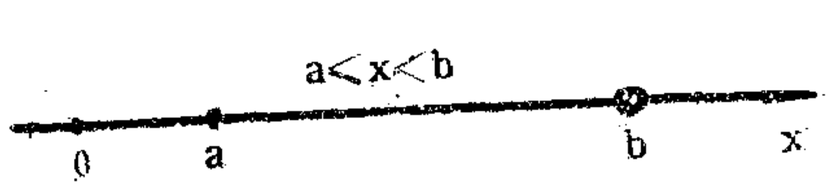


图 1.1

以上谈到的区间，都是在有限范围内，总称为**有限区间**，除有限区间外还有**无限区间**。

例如，全体实数 x 组成的区间，记作 $(-\infty,\ +\infty)$，或记作 $-\infty<x<+\infty$；所有大于 a 的全体实数 x 组成的区间记作 $(a,+\infty)$，或记作 $a<x<+\infty$；所有小于 a 的全体实数 x 组成的区间记作 $(-\infty,a)$，或记作 $-\infty<x<a$。

类似可以规定记号 $[a,+\infty)$ 及 $(-\infty,a]$ 的意义。

对于上述 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”。并需注意，它们仅作为记号表示，而并不是数。

有了区间概念，我们可进一步介绍变量 x 的邻域概念。

设 x_0 与 $\delta(\delta>0)$ 是两个实数，则把满足不等式

$$|x-x_0|<\delta$$

的实数 x 的全体叫做点 x_0 的 δ **邻域**。点 x_0 叫做这邻域的**中心**，δ 叫做这邻域的**半径**。由于上述绝对值不等式等价于

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$

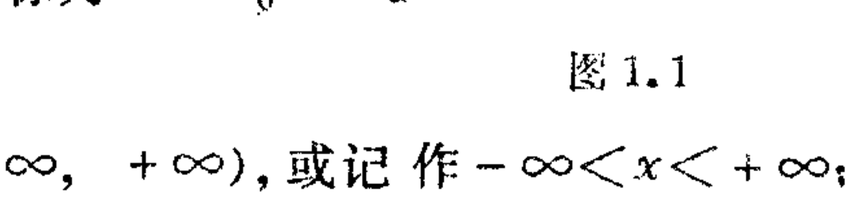


图 1.2

因此，满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的全体就是开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$。由图 1.2 可知，点 x_0 的邻域可以用以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 表示。

三、函数概念

自然界任何事物都处在不断的运动、变化中，而且每一事物的运动、变化都不是孤立的，总是同它的周围其他事物互相联系、互相影响。下面通过几个实际例子来加以说明。

例1 某气象站用温度自动记录仪记下某日从0点到24点的温度变化曲线（图1.3），它形象地表示了温度T随时间t的变化规律。

根据温度变化曲线所表示的规律，对于这天0点到24点中的每一个确定的时刻t，就有一个确定的温度T和它对应。

如当$t=0$时，$T=17$℃；$t=14$时，$T=25$℃；$t=18$时，$T=20$℃。即当t取某值t_0时，在横轴上取点t_0，过此点作平行于T轴的直线交曲线于点P，量出P点的纵坐标T_0，就得到对应于t_0时刻的气温T_0。

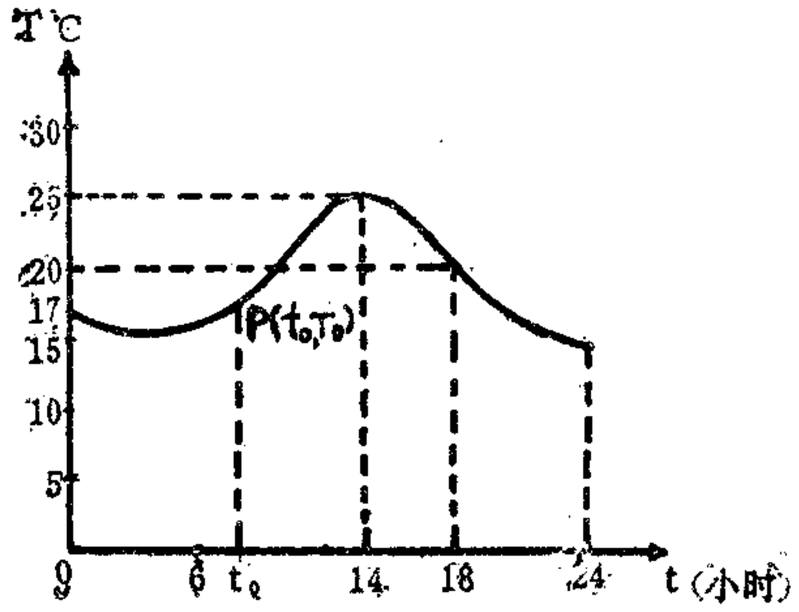


图1.3

例2 常见的保险丝（铅锡合金，铅75%，锡25%），它的熔断电流I和直径D之间的关系，可以列成表1.1：

表1.1

直径D(毫米)	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26
熔断电流I(安)	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.0	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.0

表1.1反映了熔断电流I随保险丝直径D变化的对应关系。对于一个确定的直径就有一个确定的熔断电流的值与之对应。例如当$D=1.63$毫米时，$I=16.0$安。

例3 圆的半径r和圆面积S有如下关系：

$$S=\pi r^2.$$

r可以取大于0的所有实数。当r取定某一数值时，面积S也就有确定的值与它对应，而上面的公式就表示了S和r之间的对应关系。

例4 物体在空中自由落下时，如果忽略空气阻力不计，则落体所经过的路程S和时间t有如下关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中重力加速度$g=9.8$米/秒^2。

由上式可以算出各个时刻落体下落的路程，如表1.2。

在直角坐标系中，画出S和t的对应关系的图形是一条如图1.4所示的曲线。上面的

需要全本请访问 www.ertongbook.com

公式、表 1.2 及图 1.4，都表示了自由落体的运动规律。

表 1.2

时间 t（秒）	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	……
路程 S（米）	0	1.225	4.9	11.025	19.6	30.625	44.1	……

以上四例，虽然反映不同的自然现象，但是从数量规律上看，它们却有共同之点，即每一个例子所反映的过程中，变量与变量之间是相互联系并遵循一定的规律变化着。这种变化规律就由变量在变化过程中的数值对应关系反映出来，我们把这种变量之间确定的对应关系叫做**函数关系**。

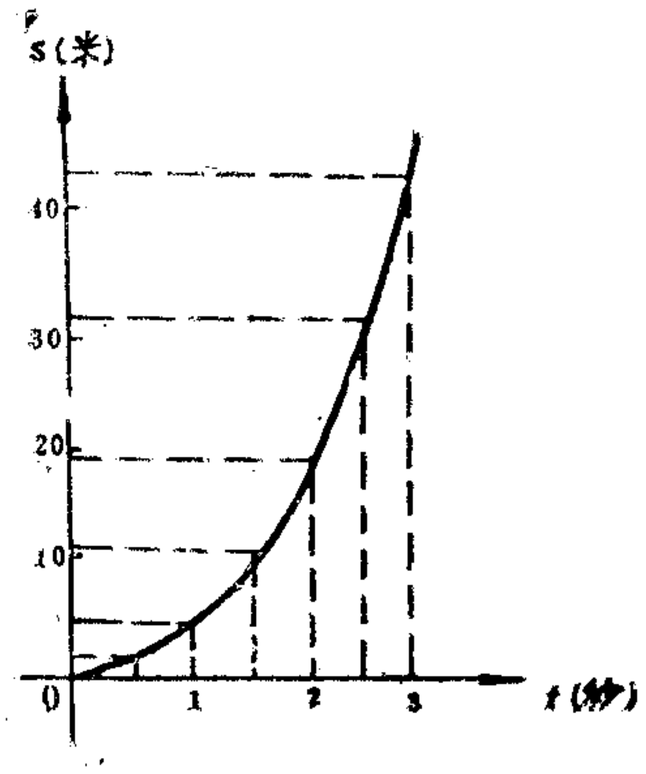


图 1.4

1. 函数的定义

定义　在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在变化范围内的每一个值，按照一定的规律，y 总有一个确定的值和它对应，这时就说 y 是 x 的函数，并且记作

$$y=f(x),$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量。

记号 $y=f(x)$ 中，f 只表示 y 与 x 的对应关系，不能看作 f 乘 x。

常用的函数记号有：$y=f(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$，$y=y(x)$ 等等。如例 4 中，S 是 t 的函数，记为 $S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 或 $S=S(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 均可。

为了避免混淆，在同一问题中，不同的函数要用不同的记号来表示。例如，圆的面积 S 和圆的周长 C 是半径 r 的两个不同的函数，这两个函数可分别用 $S=f(r)=\pi r^2$，$C=\varphi(r)=2\pi r$ 来表示。有时也用 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 等等记号来加以区别。

2. 函数值

函数 $y=f(x)$ 当 $x=a$ 时的对应值，叫做当 $x=a$ 时的**函数值**。用记号 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$ 来表示。

如上面例 4 中，$S(t)=\frac{1}{2}gt^2$。当 $t=1.5$ 时，对应的函数值就是

$$S(1.5)=4.9\cdot 1.5^2=11.025,$$

有时也记为

$$S|_{t=1.5}=11.025.$$

又如函数 $f(x)=3x^2-2x+1$，则有

$$f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0+1=1;$$

$$f(x_0)=3x_0^2-2x_0+1;$$

$$f(a+b)=3(a+b)^2-2(a+b)+1=3a^2+3b^2+6ab-2a-2b+1;$$

$$\begin{aligned} f(x_0+h)&=3(x_0+h)^2-2(x_0+h)+1\\ &=3x_0^2+6x_0h+3h^2-2x_0-2h+1\\ &=3x_0^2+2x_0(3h-1)+(3h^2-2h+1) \end{aligned}$$

可见，求 $x=a$ 时的函数值，只要把函数关系中的自变量 x 用 a 代替就行了。

正如前面已经指出的，为了研究问题方便起见，可把常量看成是取同一个值的变量。因此，我们也可以把常量作为函数看待，它对于自变量的一切值来说，函数值都是相等的。

3. 单值函数与多值函数

上面所讨论的函数，自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都有唯一确定的值与之对应，这种函数叫做**单值函数**。而对于自变量在定义域内任取一个确定值时，函数有两个或两个以上的值与之对应时，则说 y 是 x 的**多值函数**。

例如，在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2,$$

它可以表示为 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 的多值（双值）函数。

为讨论方便，我们总设法避免函数的多值性。在一定条件下，多值函数常可分解为若干个单值支，而每一个都是单值函数。本例，就可以分解为 $y=+\sqrt{r^2-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 两个单值函数。分解的两个单值支，在图形上就相当于把整个圆周分为上下两个半圆周。所以对于多值函数往往设法分解为单值支加以考虑。以后，如无特别说明时，函数都是指单值函数。

4. 函数的定义域

使函数有意义的自变量的取值范围叫做函数的**定义域**。

函数的定义域指明函数关系的适用范围，也就是说，只有当自变量在定义域中取值时，因变量才有确定的对应值，这时，我们就说函数是有定义的。更确切地说，如果自变量取某一数值 x_0 时，函数有唯一确定的值与它对应，这时就说函数在 x_0 处**有定义**。所以，函数的定义域也就是使函数有定义的自变量的全体。

有了区间概念以后，我们还可以说，如果函数 $y=f(x)$，在某区间上每一个 x 值都有定义时，我们就说函数 $y=f(x)$ 在该区间上是有定义的。

如例 4 中，自变量时间 t 不取负值，函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是 $t\geqslant 0$ 或 $[0,+\infty)$。

一般说来，函数的定义域要根据所考虑问题的实际意义来确定，但数学中常常只给出函数的表达式而没说明实际背景，这时函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的变化范围。

函数 $y=\frac{5}{x-3}$ 的定义域是使分母不等于 0 的全体 x 值，这里 $x-3\neq 0$ 亦即 $x\neq 3$，所以它的定义域是区间 $(-\infty, 3)$ 和 $(3, +\infty)$。

函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是使根号内的数大于或等于 0 的全体 x 值，即 $1-x^2\geqslant 0$ 或 $x^2\leqslant 1$，这就是 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 或闭区间 $[-1, 1]$。

函数 $y=\lg(2x-3)$ 的定义域是 $2x-3>0$，即 $x>\frac{3}{2}$ 或 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$。

5. 函数的表示法

函数可以用公式、表格或图形表示出来。如例 1 是用图形表示，例 2 是用列表表示，例 3 是用公式表示，例 4 是三者结合在一起加以表示。

公式表示的函数优点是形式简单，便于应用数学分析的方法进行理论研究。缺点是自变量与函数间的对应关系不够明显，有时要做复杂的运算才能求得函数值。

表格表示的函数优点是由表中的自变量值，可以不经过运算直接查出对应的函数值，如三角函数表、对数表等，特别是列表法可以用来表示还不知道公式的函数，这在许多自然科学中是常用的。缺点是不完备，一般不能在表中把全部数值对应关系表达出来，总有一些自变量值没有列在表里。

图形表示的函数优点是它把自变量与函数间的关系通过图形明显地表示出来，缺点是从图形上得到的自变量与函数的对应值不够准确，并且不能直接运用数学分析方法进行计算。

函数的上述三种表示法各有优缺点，在解决实际问题时应根据问题的特点选用适当的表示法或者结合使用。

高等数学所讨论的函数，主要是用公式表示的函数。需要注意，用公式表示函数时，不一定只用一个式子给出，自变量在不同范围内变化时，有时会遇到几个式子表示函数的情况。例如：

$$y=f(x)=\begin{cases}2 & (\text{当 } x<0),\\ 0 & (\text{当 } x=0),\\ x-2 & (\text{当 } x>0).\end{cases}$$

显然满足函数定义，且定义域为整个数轴。即区间 $(-\infty, +\infty)$。它的图形如图 1.5 所示。

又如，

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x(\text{当 } x\geqslant 0)\\ -x(\text{当 } x<0),\end{cases}$$

这是实数 x 的绝对值的表达式，实数 x 的绝对值是这样一个数：即当 $x\geqslant 0$ 时为 x；当 $x<0$ 时为 $-x$。上式也是确定在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个函数，它的图形如图 1.6 所示。

象这样，函数在不同范围内用不同的式子分段表示出来，这种分段表示函数的方法叫做函数的分段表示法。

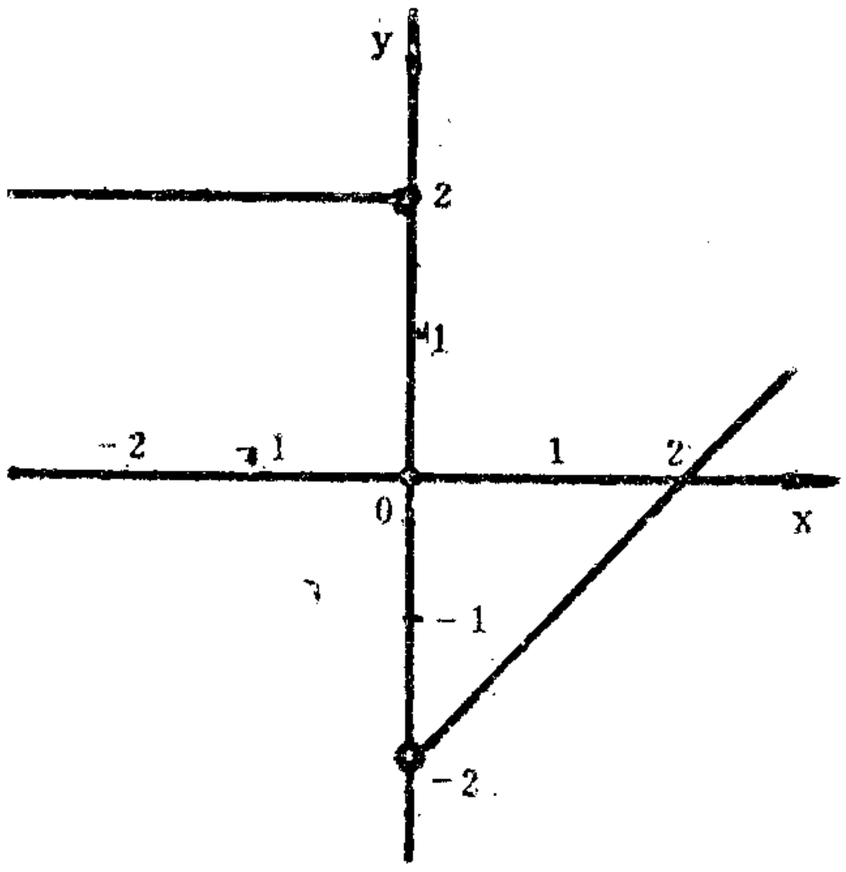


图 1.5

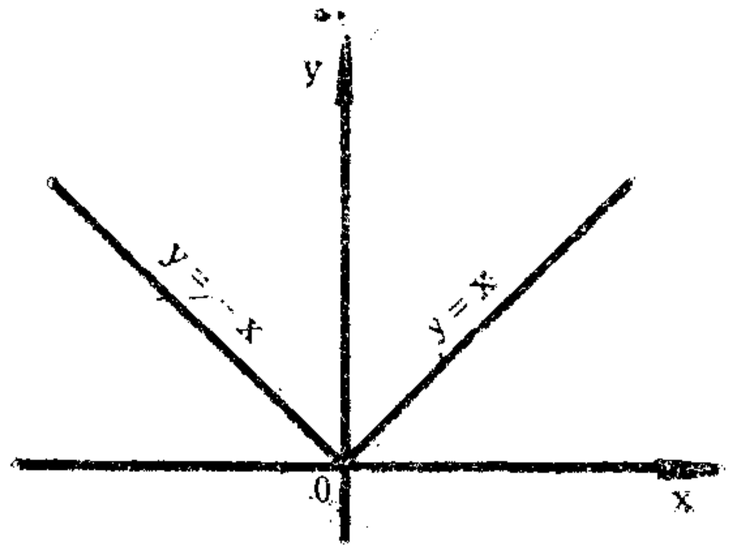


图 1.6

对于用分段表示法表示的函数求函数值时，必须注意不同的自变量值应代入相应范围的公式中去。

例如在图 1.5 所示的函数中，当 $x=2$ 时，$y=2-2=0$；当 $x=-2$ 时，$y=2$。

上面我们讨论了函数的基本概念，下面再利用已学过的知识举例来说明如何建立函数关系式。

例 1 有一块边长为 l 厘米的正方形铁皮，它的四角剪去四块相等的小正方形（见图 1.7 中的阴影部分），制成一只没有盖的容器，求这容器的容积 V 与高 x 的函数关系。

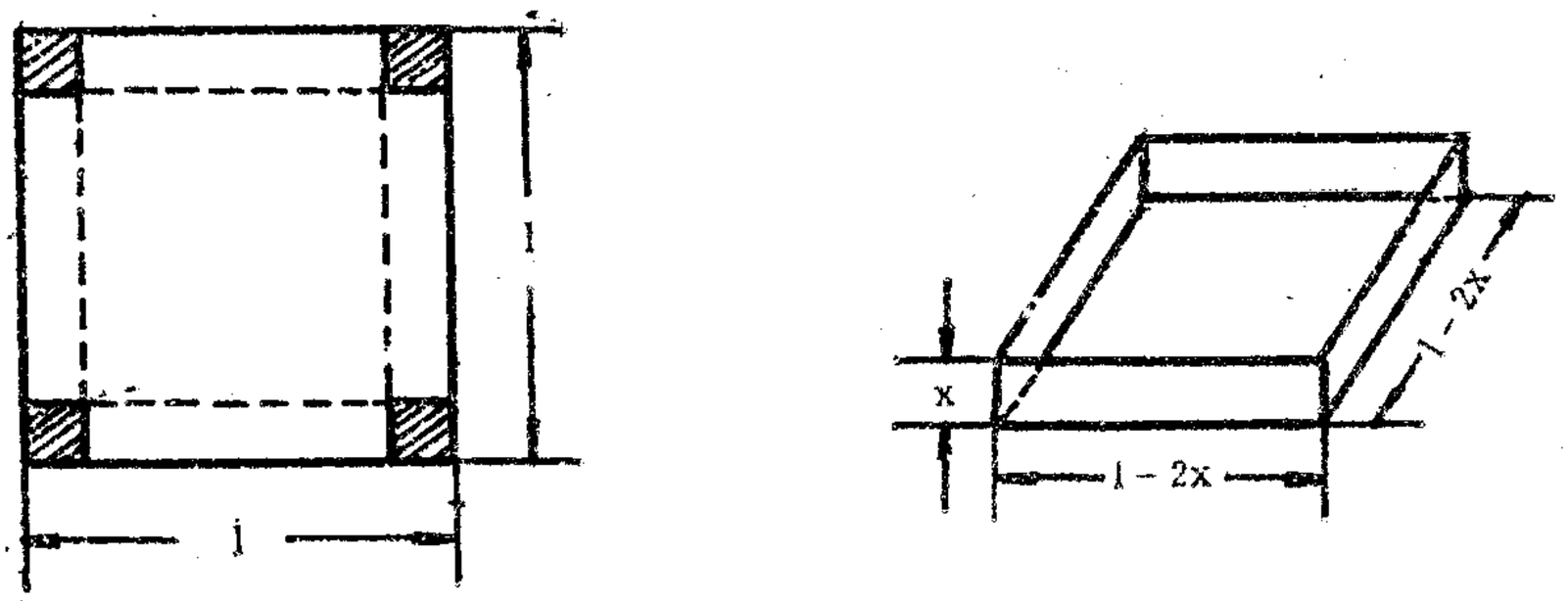


图 1.7

解 容器的容积等于它的底面积乘高。如图 1.7 所示，容器的高 x 就是铁皮被剪下的每个小正方形的边长，而铁皮被剪去四角后，边长只剩下 $l-2x$ 厘米了，它就是容器的底边的边长。因此，容器的底面积是 $(l-2x)^2$，高是 x，容器的容积便是

$$V=x(l-2x)^2,$$

这里容器的高和底边长都应取正值，所以 $0<x<\frac{l}{2}$ 或记作 $\left(0,\frac{l}{2}\right)$，这就是函数 V 的定义域。

例2 欲做一个能容 300 立方米的无盖圆柱形贮水池，池底材料造价为周围材料造价的两倍，并知周围材料造价为 k/米^2，试求总造价 S 与贮水池底半径 r 的函数关系式（图1.8）。

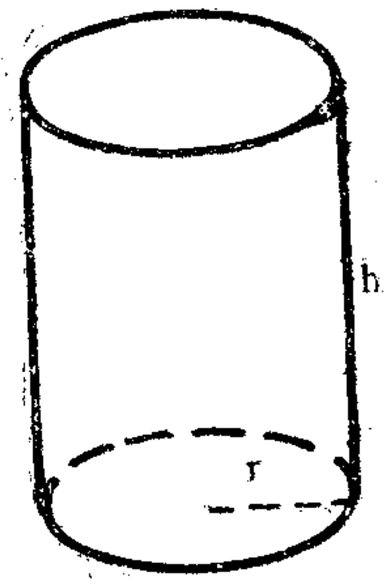


图 1.8

解 因为已知容积 $V=300$立方米，设贮水池的底半径为 r，高为 h，则有

$$V=\pi r^2 h=300. \tag{1}$$

由（1）有

$$h=\frac{300}{\pi r^2}. \tag{2}$$

已知贮水池底部造价为周围造价的两倍，而周围的造价为 k/米^2，则底部造价为 $2k$/米^2。根据圆面积及圆柱侧面积公式，则有总造价

$$S=2\pi r^2 k+2\pi r h k. \tag{3}$$

将（2）代入（3），有

$$S=2\pi r^2 k+2\pi r\cdot\frac{300}{\pi r^2}k$$

$$=\left(2\pi r^2+\frac{600}{r}\right)k.$$

这就是总造价 S 与贮水池底半径 r 的函数关系式。

四、函数的几种特性

下面我们来进一步讨论函数的几种特性。

1. 函数的有界性和无界性 如果有正的常数 M 存在，使函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，这时就说 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**。如果这样的 M 不存在，就说函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**无界**。如果有常数 M 使函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒有

$$f(x)\leqslant M,$$

这时就说 $f(x)$ 在 (a,b) 内**有上界**，M 是它的一个**上界**；如果有常数 m 使函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒有

$$f(x)\geqslant m$$

这时就说 $f(x)$ 在 (a,b) 内**有下界**，m 是它的一个**下界**。由上、下界概念可知，如果函数 $f(x)$ 在某区间内有界，则 $f(x)$ 在此区间内必为既有上界同时又有下界。

如果函数在 (a,b) 内有界，则在此区间内函数的图形必介于两条水平的平行线 $y=\pm M$ 之间。

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都能成立。这里 $M=1$，当然也可取大于 1 的任何数作为 M，其形如图 1.9 所示。

又如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无界，但在闭区间 $[1,2]$ 上是有界的。

2. 函数的单调性　如果在区间 (a,b) 内，对于任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，就说函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调增大的**或者说是**单调增函数**；如果有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，就说函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调减小的**或者叫做**单调减函数**。单调增函数和单调减函数统称为**单调函数**。

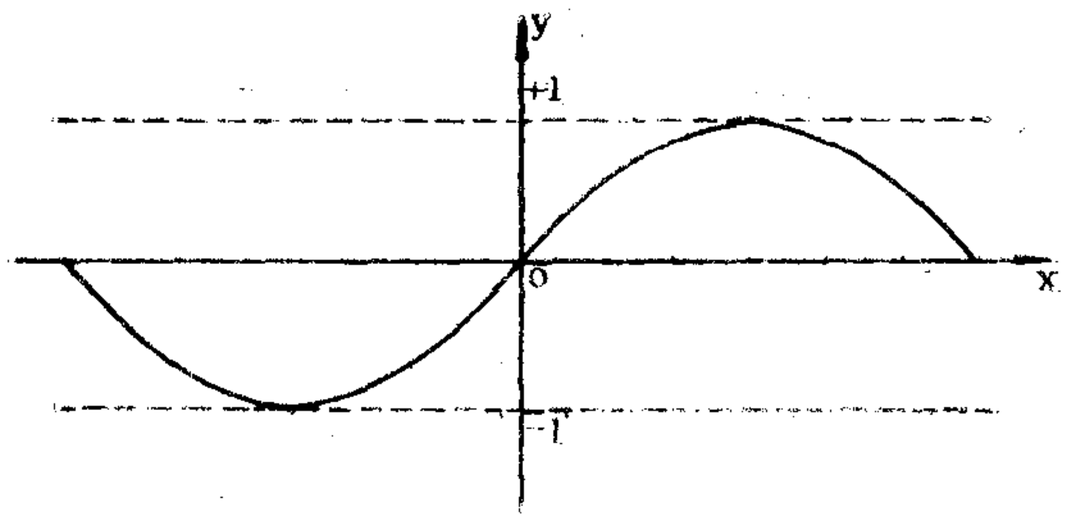


图 1.9

单调增函数的图形由于当 x 增加时，函数 $f(x)$ 也随之增大，所以它是自左至右上升的曲线（图 1.10）；单调减函数的图形由于当 x 增加时，函数 $f(x)$ 反而减少，所以它是自左至右下降的曲线（图 1.11）。

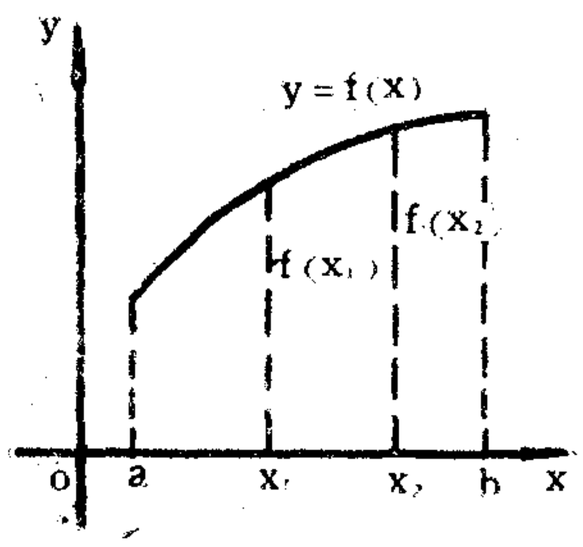


图 1.10

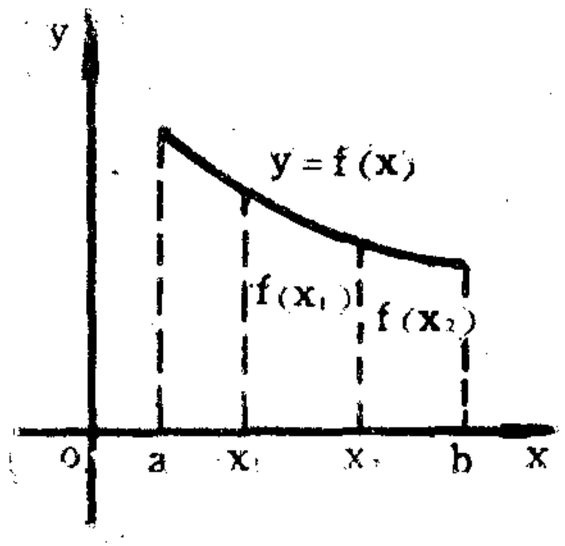


图 1.11

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增函数，图形（图 1.12）在 y 轴右方为上升的。在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减函数，图形在 y 轴左方是下降的。而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数。

又如，函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增函数（图 1.13）。

3. 函数的奇偶性　如果函数 $f(x)$ 在 x 改变符号时，函数值不变，即

$$f(-x)=f(x),$$

则函数 $f(x)$ 叫做**偶函数**。如果满足

$$f(-x)=-f(x),$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com