

内 容 提 要

本书被教育部列入全国高等教育“面向 21 世纪课程教材”,主要内容有:函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程等。本书内容丰富,取材广泛,注重体现素质教育与创新能力的培养,突出应用数学能力的培养,体现数学建模思想。

本书各节后配有适量习题,以巩固所学内容。每章后均配有自测题,其题型包括选择题、判断题、填空题、证明题,供报考研究生者选用。本书附有习题及自测题答案,使内容和体系更加完善。

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂。可作为高等院校农、林、牧、生物、经管、财会等专业的教科书,也可作为各类专业技术人员的参考书。

面向21世纪课程教材

Text book Series for 21st Century

高等数学

梁保松 陈 涛 主编

中国农业出版社

主 编	梁保松	陈 涛	
副主编	张玉峰	赵玉祥	
参 编	叶耀军	杨德彰	党耀国
	曹殿立	潘正义	
审 稿	石东洋		

前 言

本教材被教育部列入全国高等教育“面向 21 世纪课程教材”。

数学是科学的基本语言,是研究和探索物质世界的重要手段。对于现代化的工农业技术和现代化工程而言,数学则是表达技术原理、进行复杂的工程设计和计算必不可少的工具。特别是随着计算机技术的快速发展,数学的社会化程度日益提高,现代化产业和经济的组织与管理,已完全离不开数学所提供的方法和技术。因此,高等数学在大学教育中占有举足轻重的地位。

数学给予人们的不仅是知识,最重要的是能力。这种能力包括直观思维、逻辑思维、精确计算和准确判断。所以,高等数学在素质教育中的作用是其他课程无法企及的。

高等数学博大精深,要使学生在有限的时间内深刻地掌握其思想和方法,首先需要有好的教材。对于高等农林院校来说,要培养学生应用于农林技术、农林工程、生物技术等领域的数学思想和方法,在教材内容和体系的安排上就必须体现高等农林教育的特色。

本书按照“面向 21 世纪高等农林教育高等数学教学大纲”的基本要求,结合作者多年来教学研究和科学研究等方面的成果编写而成。注意渗透现代数学思想,注重体现素质教育和创新能力的培养,以适应现代化农林科学对农林人才数学素质的要求。本书在具体内容的安排上具有以下特点:

1. 保持体系完整。全书结构严谨,内容由浅入深,循序渐进,通俗易学,努力突出高等数学的基本思想和基本方法。一方面使学生能够较好地了解各部分的内在联系,从总体上把握高等数学的思想方法;另一方面,培养学生严密的逻辑思维能力。

2. 追求简明实用。删去了一些繁琐的理论证明,直接地从客观世界所提供的模型和原理中导出高等数学的基本概念、法则和公式,使表达更加简明;引导学生理解概念的的内涵和背景,培养学生用高等数学的思想和方法分析、解决实际问题的能力,突出了数学的应用性。

3. 体现农林特色。较多地设置了生物科学、生命科学、农林经济管理等方面的实例,突出了高等数学在农林科学中的应用,促进了高等数学与农林专业课程的结合,为学生学习专业提供了“接口”。

参加本书编写的有:梁保松、陈涛、张玉峰、赵玉祥、潘正义、党耀国、叶耀军、杨德彰、曹殿立,最后由梁保松统一定稿。

郑州大学石东洋教授仔细审阅了全书,并提出了宝贵建议,在此表示衷心的感谢。

最后,对中国农业出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动和大力支持,表示衷心感谢。

错漏之处,敬请得到专家、同行和读者的批评指正。

编者

2001年12月24日

目 录

前 言

第一章 函数的极限与连续	1
第一节 函数的基本概念	1
一、函数定义	1
二、分段函数	2
三、复合函数	2
四、初等函数	3
习题 1-1	4
第二节 数列的极限	5
一、数列的概念	5
二、数列极限的定义	6
三、数列极限的性质	7
习题 1-2	9
第三节 函数的极限	10
一、自变量趋向于无穷大时函数的极限	10
二、自变量趋向于有限值时函数的极限	11
三、函数极限的性质	13
习题 1-3	13
第四节 无穷小量与无穷大量	14
一、无穷小量	14
二、无穷大量	15
习题 1-4	16
第五节 函数极限的运算法则	17
习题 1-5	20
第六节 两个重要极限	21

一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	21
二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$	22
习题 1-6	24
第七节 无穷小量的比较	24
习题 1-7	26
第八节 函数的连续性与间断点	26
一、函数的连续性	26
二、函数的间断点	28
习题 1-8	29
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	30
一、连续函数的运算	30
二、初等函数的连续性	31
三、利用函数的连续性求极限	31
四、闭区间上连续函数的性质	32
习题 1-9	33
第一章自测题	34
第二章 导数与微分	36
第一节 导数的概念	36
一、问题的提出	36
二、导数的定义	37
三、导数的几何意义	39
四、可导与连续的关系	40
习题 2-1	41
第二节 函数的求导法则	42
一、函数的和、差、积、商的求导法则	42
二、反函数的求导法则	44
三、复合函数的求导法则	46
习题 2-2	48
第三节 高阶导数	50
习题 2-3	51
第四节 隐函数及参数方程确定的函数的导数	52
一、隐函数的导数	52
二、由参数方程所确定的函数的导数	54
习题 2-4	55

第五节 函数的微分	56
一、微分的概念	56
二、微分的几何意义	58
三、微分基本公式和微分运算法则	58
四、高阶微分	60
五、微分的简单应用	60
习题 2-5	62
第二章自测题	63
第三章 微分中值定理与导数的应用	66
第一节 微分中值定理	66
一、费尔马定理	66
二、罗尔定理	66
三、拉格朗日中值定理	68
四、柯西定理	70
习题 3-1	71
第二节 洛必达(L'Hospital)法则	71
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式	72
二、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	73
三、其他类型的未定式	74
习题 3-2	75
第三节 泰勒公式	76
习题 3-3	78
第四节 函数的增减性	78
习题 3-4	80
第五节 函数的极值	81
习题 3-5	84
第六节 函数的最大值和最小值	85
一、最大值和最小值	85
二、应用举例	85
习题 3-6	86
第七节 函数作图法	87
一、函数的凸凹与拐点	87
二、曲线的渐近线	89
三、函数图形的作法	90

习题 3-7	90
第八节 导数在经济分析中的应用	91
一、边际分析	91
二、弹性分析	94
习题 3-8	97
第三章自测题	97
第四章 不定积分	100
第一节 原函数与不定积分	100
一、原函数	100
二、不定积分	101
三、不定积分的几何意义	102
四、基本积分公式和不定积分的性质	103
习题 4-1	105
第二节 换元积分法	105
一、第一换元积分法(凑微分法)	105
二、第二换元积分法	109
习题 4-2	112
第三节 分部积分法	114
习题 4-3	117
第四节 几种特殊类型函数的积分	117
一、有理函数的不定积分	117
二、三角函数有理式的积分	122
三、简单无理函数的积分	124
习题 4-4	125
第五节 不定积分的应用	126
一、不定积分在农业经济中的应用	126
二、不定积分在生物科学中的应用	128
习题 4-5	130
第四章自测题	131
第五章 定积分	133
第一节 定积分的概念与性质	133
一、定积分问题举例	133
二、定积分的定义	134
三、定积分的几何意义	135
四、定积分的性质	136

习题 5-1	139
第二节 微积分基本公式	140
一、积分上限的函数	140
二、牛顿—莱布尼茨公式	142
习题 5-2	144
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法	145
一、换元积分法	145
二、分部积分法	147
习题 5-3	148
第四节 广义积分与 Gamma 函数	149
一、积分区间为无穷区间的广义积分	149
二、被积函数具有无穷间断点的广义积分	151
三、Gamma 函数	152
习题 5-4	152
第五节 定积分的应用	153
一、微元法	153
二、平面图形的面积	154
三、体积	156
四、平面曲线的弧长	157
五、变力沿直线所做的功	158
六、经济应用问题举例	159
习题 5-5	160
第五章自测题	161
第六章 多元函数微分学	164
第一节 空间解析几何简介	164
一、空间直角坐标系	164
二、空间两点间的距离	165
三、空间曲面	166
四、空间曲线	167
五、常见的曲面	167
六、空间曲线在坐标面上的投影	169
习题 6-1	170
第二节 多元函数	171
一、区域	171
二、二元函数	172
习题 6-2	173

第三节 二元函数的极限与连续性	173
一、二元函数的极限	173
二、二元函数的连续性	174
习题 6-3	175
第四节 偏导数	175
一、偏导数的概念	175
二、二元函数偏导数的几何意义	176
三、高阶偏导数	177
习题 6-4	178
第五节 全微分	179
一、全微分的定义	179
二、全微分在近似计算中的应用	181
习题 6-5	182
第六节 复合函数与隐函数的微分法	182
一、多元复合函数的求导法则	182
二、隐函数的求导法则	184
习题 6-6	185
第七节 多元函数的极值及其应用	185
一、极值的概念	185
二、条件极值	188
习题 6-7	190
第六章自测题	191
第七章 二重积分	194
第一节 二重积分的概念与性质	194
一、二重积分的定义	194
二、二重积分的基本性质	196
习题 7-1	197
第二节 直角坐标系下二重积分的计算	197
习题 7-2	200
第三节 二重积分的换元法	201
习题 7-3	205
第四节 二重积分的应用	206
一、体积	207
二、曲面的面积	207
三、其他	208
习题 7-4	209

第七章自测题	209
第八章 无穷级数	213
第一节 数项级数	213
一、级数的敛散性	213
二、收敛级数的基本性质	214
习题 8-1	216
第二节 数项级数的敛散性判别法	216
一、正项级数及其敛散性判别法	216
二、交错级数及其敛散性判别法	220
习题 8-2	222
第三节 幂级数	223
一、幂级数的收敛性	224
二、幂级数的运算	226
习题 8-3	227
第四节 泰勒级数	228
一、泰勒级数	228
二、函数的泰勒展开式	229
习题 8-4	231
第八章自测题	231
第九章 微分方程与差分方程	234
第一节 微分方程的基本概念	234
习题 9-1	236
第二节 一阶微分方程	236
一、可分离变量的微分方程	237
二、齐次方程	239
三、一阶线性微分方程	241
习题 9-2	244
第三节 可降阶的高阶微分方程	246
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	246
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	246
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	247
习题 9-3	249
第四节 二阶常系数线性微分方程	249
一、二阶常系数齐次线性微分方程	249
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	251

习题 9-4	254
第五节 差分方程基础	255
一、差分	255
二、差分方程	256
习题 9-5	257
第六节 一阶常系数线性差分方程	257
一、解的结构	257
二、一阶常系数齐次线性差分方程	257
三、一阶常系数非齐次线性差分方程	258
四、二阶常系数线性差分方程	259
习题 9-6	261
第九章自测题	261
 参考答案	 263
参考文献	294

第一章

函数的极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象. 所谓函数关系就是变量之间的对应关系. 极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章介绍函数、函数的极限和函数的连续性等基本概念, 这些内容构成了全书的基础.

第一节 函数的基本概念

在初等数学中, 读者已学过函数概念, 本节仅就这方面内容归纳和补充.

一、函数定义

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则 f 有惟一确定的数值与 x 对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域, f 叫做对应法则, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时, 对应的函数值的全体组成的数集:

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

由函数的定义可知, 一个函数由对应法则 f 及定义域 D 所完全确定, 选用什么字母表示函数不是本质的. 也就是说, 两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应法则完全相同. 例如 $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$ 这两个函数的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 而且对应法则也相同, 因而这两个函数是相同的. 函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ 是不相同的, 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. 显然, $f(x) = 1 + x^2$ 与 $g(t) = 1 + t^2$ 是同一个函数.

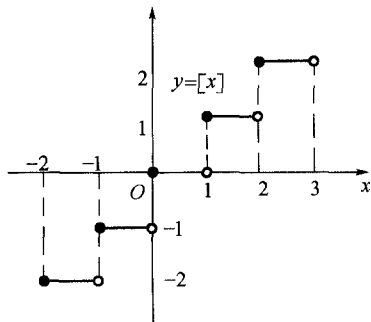


图 1-1

例 1 对任意实数 x , 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

例如 $[\sqrt{2}] = 1, [-\pi] = -4, [\pi] = 3, [0] = 0$, 称 $f(x) = [x]$ 为取整函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域是整数集. 其图形如图 1-1 所示.

二、分段函数

例 2 函数

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 其图形关于 y 轴对称(图 1-2). 这个函数称为绝对值函数.

例 3 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} -1 + x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1 + x^2, & x > 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = (-1, +\infty)$, 其图形如图 1-3 所示.

在例 2 和例 3 中看到, 有时一个函数要用几个式子表示, 这种在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同式子来表示的函数, 称为分段函数. 例 2 和例 3 都是分段函数.

例 4 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + x, & x > 1 \end{cases}$$

是一个分段函数, 它的定义域 $D = [0, +\infty)$. 分段函数的对应法则是由自变量所在的范围所确定的, 在求分段函数的函数值

时, 应根据自变量所在的范围, 选择相应的对应法则. 例如 $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, 所以 $f(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. $4 \in (1, +\infty)$, 所以 $f(4) = 1 + 4 = 5$.

三、复合函数

定义 2 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 E , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 若 $W \cap E$ 非空, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, u 为中间变量.

由定义可知, 复合函数是说明函数对应法则的某种表达方式的一个概念. 利用这一概念, 一方面也可以产生新的函数, 另一方面, 可以把函数分解成几个函数.

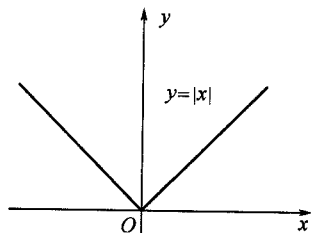


图 1-2

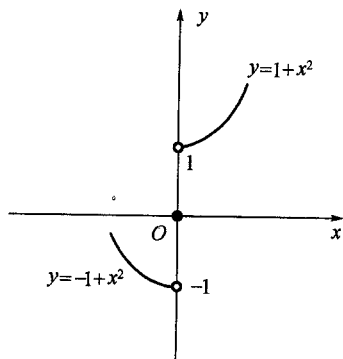


图 1-3

例5 设 $y = f(u) = u^2, u = \varphi(x) = 1 - x^2$, 则复合而成的函数为

$$y = f[\varphi(x)] = (1 - x^2)^2 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

例6 设 $y = f(u) = \sqrt{u}, u = \varphi(x) = 1 - x^2$ 则复合而成的函数为

$$y = f[\varphi(x)] = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

虽然函数 $u = \varphi(x) = 1 - x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 但为了使复合后的函数有意义, 必须使 $u \geq 0$, 故限制 x 的范围为 $[-1, 1]$.

例7 设函数 $y = f(u) = \arcsin u, u = \varphi(x) = 3 + x^2$, 则由于 x 无论取何值均有 $u \geq 3$, 故 $u = \varphi(x)$ 的值域 $W = [3, +\infty)$, 而 $y = f(u)$ 的定义域 $E = [-1, 1], W \cap E = \emptyset$, 故 $y = f[\varphi(x)]$ 无定义.

例7表明, 并非任何两个函数都能够复合成一个复合函数.

例8 设 $f(x) = x^2, g(x) = 3x$. 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2, g[f(x)] = g(x^2) = 3x^2$.

例8表明: $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 一般来说是不同的.

关于复合函数, 重要的是把一个复合函数分解成若干个简单函数.

例如 $y = \ln \sin \sqrt{x^2 + 1}$ 可以分解为

$$y = \ln u, \quad u = \sin v, \quad v = \sqrt{w}, \quad w = x^2 + 1.$$

例9 设 $f(\sin t) = 1 + \cos 2t$, 求 $f(x) (|x| \leq 1)$.

解 因为 $1 + \cos 2t = 2(1 - \sin^2 t)$, 故 $f(\sin t) = 2(1 - \sin^2 t)$. 它可以看做是由 $f(x) = 2(1 - x^2)$ 与 $x = \sin t$ 复合而成的复合函数, 从而

$$f(x) = 2(1 - x^2)$$

例10 设 $\varphi(x+1) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求 $\varphi(x)$.

解 因为 $\varphi(x+1) = \begin{cases} (x+1-1)^2, & 1 \leq x+1 \leq 2 \\ 2(x+1-1), & 2 < x+1 \leq 3 \end{cases}$,

令 $t = x+1$, 得 $\varphi(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 2(t-1), & 2 < t \leq 3 \end{cases}$, 所以

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2(x-1), & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

四、初等函数

下列函数称为基本初等函数:

- (1) 常数 $y = C$ (C 为常数);
- (2) 幂函数 $y = x^a$ (a 为实数, $a \neq 0$);
- (3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);
- (4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);

(5)三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$;

(6)反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

定义 3 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的能用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如, $y = (1 + \sin x)\sqrt{e^x - 1}, y = e^{\sin x} + x \ln \tan^2 x$ 均为初等函数.

为今后应用,现介绍邻域的概念.以 a 为中心的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ ($\delta > 0$) 称为 a 的 δ 邻域,记为 $N(a, \delta)$.在 $N(a, \delta)$ 中去掉中心点 a 后,称为 a 的去心邻域,记为 $N(\hat{a}, \delta)$.

邻域是极限理论中的一个基本概念,可用来表示点 x 与 a (即数 x 与 a) 的接近程度.如

$$|x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in N(a, \delta), 0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow x \in N(\hat{a}, \delta).$$

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sqrt{2 + x - x^2}; \quad (2) y = \arcsin(x + \frac{1}{2}); \quad (3) y = \frac{x}{\sin x};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+3)}} + \lg(x+1)(4-x).$$

2. 下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(2) f(x) = \ln u^2, \quad g(x) = 2 \ln u;$$

$$(3) f(x) = 1, \quad g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x;$$

$$(4) f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad g(x) = \arcsin x + \arccos x.$$

3. 求下列函数值.

$$(1) \text{ 设 } f(x) = \arcsin x, \text{ 求 } f(0), f(-1), f(\frac{\sqrt{3}}{2}), f(-\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

$$(2) \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}, \text{ 求 } \varphi(\frac{\pi}{4}), \varphi(-\frac{\pi}{6}), \varphi(-3).$$

4. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 求 $f(x^2)$ 、 $f(\sin x)$ 、 $f(\frac{1}{x})$ 的定义域.

$$5. (1) \text{ 设 } f(x) = x^2 + 1, \text{ 求 } f(x^2 + 1), f(\frac{1}{f(x)}).$$

$$(2) \text{ 设 } f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1 + x^2}, x > 0, \text{ 求 } f(x).$$

$$(3) \text{ 设 } f(x-1) = x^2, \text{ 求 } f(x+1).$$

$$(4) \text{ 设 } \varphi(x+1) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, \text{ 求 } \varphi(x).$$