自然数

自然数是在人类的生产和生活实践中逐渐产生的。人类认识自然数的过程是相当长的。在远古时代，人类在捕鱼、狩猎和采集果实的劳动中产生了计数的需要。起初人们用手指、绳结、刻痕、石子或木棒等实物来计数。例如：表示捕获了 3 只羊，就伸出 3 个手指；用 5 个小石子表示捕捞了 5 条鱼；一些人外出捕猎，出去 1 天，家里的人就在绳子上打 1 个结，用绳结的个数来表示外出的天数。这样经过较长时间，随着生产和交换的不断增多以及语言的发展，渐渐地把数从具体事物中抽象出来，先有数目 1，以后逐次加 1，得到 2、3、4……，这样逐渐产生和形成了自然数。因此，可以把自然数定义为，在数物体的时候，用来表示物体个数的 1、2、3、4、5、6……叫做自然数。自然数的单位是“ 1 ”，任何自然数都是由若干个“ 1 ”组成的。自然数有无限多个，1 是最小的自然数，没有最大的自然数。

零

可以说，自然数是从表示“有”多少的需要中产生的。在实践中还常常遇到没有物体的情况。例如：盘子里一个苹果也没有。为了表示“没有”，就产生了一个新的数“零”。

“零”是一个数，记作“0”，“0”是整数，但不是自然数，它比所有的自然数都小。“0”作为一个单独的数，不仅可以表示“没有”，而且是一个有完全确定意义的数，是一个起着很多重要作用的数。具体作用有：

（1）表示数的某位上没有单位，起到占位的作用。例如：103.04，表示十位和十分位上一个单位也没有。0.10 为近似数时，表示精确到百分位。5.00 元表示特别的单价是 5 元整。

（2）表示某些数量的界限。例如在数轴上 0 是正数与负数的界限。“0”既不是正数，也不是负数。在摄氏温度计上“0”是零上温度与零下温度的分界。

（3）表示温度。在通常情况下水结冰的温度为摄氏“0”度。说今天的气温为零度，并不是指今天没有温度。

（4）表示起点。如在刻度尺上，刻度的起点为“0”。从甲城到乙城的公路上，靠近路边竖有里程碑，每隔 1 千米竖一个，开始第一个桩子上刻的是“0”，表明这是这段公路的起点。

在四则运算中，零有着特殊的性质。

（1）任何数与 0 相加都得原来的数。例如：5+0=5，0+32=32。

（2）任何数减去 0 都得原来的数。例如：5-0=5，42-0=42。

（3）相同的两个数相减，差等于 0。例如：5-5=0，428-428=0。

（4）任何数与 0 相乘，积等于 0。例如：5×0=0，0×78=0

（5）0 除以任何自然数，商都等于 0。例如：0÷5=0，0÷345=0。因此 0 是任意自然数的倍数。

（6）0 不能作除数。因为任何自然数除以零，都得不到准确的商。例如：5÷0，找不到一个数与 0 相乘可以得 5。零除以零时有无数个商，因为任何数与 0 相乘都能得到 0，所以像 5÷0、0÷0 都无意义。

为什么 1 不是素数

全体自然数可以分为三类：

（1）只能被“1”和它本身整除的数叫素数，如：2、3、5、7、11……。

（2）除了“1”和它本身以外，还能被其他数整除的数叫合数，如：4、6、8、9……。

（3）“1”既不是素数也不是合数。

有人要问，“1”也只能被 1 和它本身整除，为什么不能算素数呢？而且“1”算作素数后，全体自然数分成素数和合数两类，岂不是更简单吗？

这要从分解素因数谈起。比如，1001 能被哪些数整除，其实质是将 1001 分解素因数，由 1001=7×11×13，而且只有这一种分解结果，知道 1001 除了被 1 和它本身整除以外，还能被 7、11、13 整除。若把“1”也算作素数，那么 1001 分解素因数就会出现下面一些结果：

1001=7×11×13

1001=1×7×11×13

1001=1×1×7×11×13

……

也就是说，分解式中可随便添上几个因数“1”。这样做，一方面对求 1001 的因数毫无必要，另一方面分解素因素结果不唯一，又增添了不必要的麻烦。因此“1”不算作素数。

整数

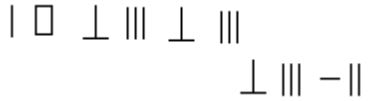
正整数、零、负整数统称为整数。正整数：1、2、3、4 ……；零：0；负整数：-1、-2、-3……。正整数即自然数。在小学阶段不学负数，小学学的自然数和零都是整数，也就是说，小学只学习了大于零和等于零的整数。

小数的经历

小数是十进制分数的另一种表示方法。有了小数，使记数更方便了。如圆周率近似值3.1416，若用分数表示，就得写成$\frac{3927}{1250}$，书写、计算都很麻烦。

有位著名美国数学家说：“近代计算的奇迹般的动力来自三项发明：印度计数法，十进分数和对数。”这里所说的十进分数就是指小数。

最早使用小数的是中国人。公元 3 世纪，我国魏晋时期刘徽在注《九章算术》时就指出，开方不尽时，可用十进制分数（小数）来表示，比西方早 1300 年。元朝刘瑾（1300 年左右）著《律吕成书》中记 106368.6312 为：



把小数部分降低一格，可以说是世界上最早的小数表示法。

中国之外第一个应用小数的是阿拉伯人卡西，他用十进分数（小数）给出了π的 17 位有效数值。

在欧洲，比利时人斯蒂文于 1585 年第一次明确地阐述了小数的理论，他把 32.57 记为

⓪ ① ②

3　2　5　7　　或 32⓪5①7②

1492 年法国人佩洛斯出版的算术书中首次应用了小数点“.”，但他的意思是做除法时，如果除数是 10 的倍数，例如，12356÷600，先将末两位用点分开然后除以 6，即 123.56÷6，仅仅为了做除法时的方便。

直到 1608 年意大利人克拉乌斯出版的代数书中才明确地以小点“.”作为整数部分和小数部分的分界，即现代用法。

同时也有人用“，”来作小数点的记号。直到 19 世纪末，小数点还有种种写法，如 2.5 可写为 2 5；2.5；2·5；2△5 等。

现代小数点的使用大体分为两大派，欧洲大陆派（德国、法国、苏联等）用逗号作小数点，圆点“·”用作乘法记号，面不用“×”号，因它易与“x”相混。英美派小数点用圆点“.”，逗号用来作分节号（每三位分为一节）。如一亿五千万，记作 150，000，00，而大陆派则写作 150 000 000，不用分节号而每三位数空一格。

无论是东方还是西方，人们对小数的认识，都经历了几百年甚至上千年的演变。

负数的引入

今天人们都能用正负数来表示两种相反意义的量。例如若以冰点的温度表示 0℃，则开水的温度为+100℃，而零下 10℃则记为-10℃。若以海平面为 0 点，则珠穆朗玛峰的高度约为+8848 米，最深的马里亚纳海沟深约-11034 米。在日常生活中，人们常用“ + ”表示收入，用“ - ”表示支出。可是在历史上，负数的引入却经历了漫长而曲折的道路。

古人在实践活动中遇到了一些问题：如两人相互借用东西，对借出方和借入方来说，同一东西具有不同的意义；再如从同一地点，两人同时向相反方向行走，离开出发点的距离即使相同，但其表示的意义却不同。久而久之，古人意识到仅用数量表示一个事物是不全面的，似乎还应加上表示方向的符号。因此为了表示具有相反意义的量和解决被减数小于减数等问题，逐渐产生了负数。

我国是世界上最早使用负数概念的国家。《九章算术》中已经开始使用负数，而且明确指出若“ 卖 ”是正，则“ 买 ”是负；“ 余钱 ”是正，则“ 不足钱 ”是负。刘徽注《九章算术》，定义正负数为“ 两算得失相反 ”，同时还规定了有理数的加、减法则，认为“ 正、负术曰：同名相益，异名相除。 ”这“ 同名 ”、“ 异名 ”即现在的“ 同号 ”、“ 异号 ”、“ 除 ”和“ 益 ”则是“ 减 ”和“ 加 ”，这些思想，西方要迟于中国八九百年才出现。

印度在公元 7 世纪才采用负数，公元 628 年，印度的《婆罗摩修正体系》一书中，把负数解释为负债和损失。在西方，直到 1484 年，法国的舒开才给出了二次方程的一个负根。1544 年，德国的史提菲把负数定义为比任何数都小的数。1545 年，意大利的卡当著《大法》，成为欧洲第一部论述负数的著作。虽然负数早已出现在人们的计算过程中，但却迟迟得不到学术界的承认，直到 17 世纪，数学、力学、天文学获得广泛发展，使用负数可以大大简化计算，所以负数才正式进入了数学。特别是 1637 年，法国数学家笛卡尔发明了解析几何学，建立了坐标点，将平面点与负数、零、正数组成的实数对应起来，使负数得到了解释，从而加速了人们对负数的承认。但直到 19 世纪，德国数学家魏尔斯特拉斯等人为整数奠定了逻辑基础以后，负数才在现代数学中获得巩固的地位。

无理数的风波

无限不循环小数叫无理数。据说，它的发现还曾掀起一场巨大的风波。

公元前 6 世纪，古希腊有个毕达哥拉斯学派——一个宗教、科学和哲学性质的帮会，在数学研究上有很大成绩，以勾股定理、无理数的研究最为著名。毕达哥拉斯学派有一个信条：宇宙间的一切数都能归结为整数或整数之比。毕氏的一个门徒希伯索斯，在研究等腰直角三角形斜边与一直角边之比，或正方形对角线与其一边之比时，发现其比不能用整数之比表达时，便很吃惊。他们证明了这个数不是整数，绞尽脑汁也找不到这个分数，所以希伯索斯等人阐述了这个发现。因其理论违背毕氏学派的信条而引起同伴们的狂怒，竟被抛入大海。另有传说，毕氏学派规定，每当有新的发现发明，都要保守秘密，不得外传，否则要受到严厉制裁。他们发现无理数后，视无理数为一种不能言说的记号。有一门徒泄露了这一发现，便遭到覆舟毙命的惩罚。然而真理是封不住的，不管毕氏门徒如何反对，无理数终于闯入了数的圣地，使数的概念又扩展了一步。无理数是稠密的，任何两个有理数之间，不管它们多么接近，都存在着无限多个无理数。

真实的虚数

“虚数”这个名词，使人觉得挺玄乎，好像有点“虚”，实际上它的内容却非常“实”。

虚数是在解方程时产生的。求解方程时，常常需要将数开方，如果被开方数是正数，就可以算出要求的根；但如果被开方数是负数，那怎么办呢？

比如，方程$x^2+1=0$，$x^2=-1$，$x=\pm\sqrt{-1}$。那么$\sqrt{-1}$有没有意义呢？很早以前，大多数人都认为负数是没有平方根的。到了16世纪，意大利数学家卡当在其著作《大法》（1545年）中，把$\sqrt{-15}$记为$R\cdot\tilde{m}\cdot 15$，这是最早的虚数记号。但他认为这仅仅是个形式表示而已。1637年法国数学家笛卡尔，在其《几何学》中第一次给出“虚数”的名称，并和“实数”相对应。1777年，欧拉在一篇论文中首次用“i”来表示$\sqrt{-1}$，但以后很少有人注意它。直到19世纪初，高斯系统地使用了这个符号，并主张用数偶（a、b）来表示a+bi，称为复数，虚数才逐步得以通行。

由于虚数闯进数的领域时，人们对它的实际用处一无所知，在实际生活中似乎没有用复数来表达的量，因此在很长一段时间里，人们对它产生过种种怀疑和误解。笛卡尔称“虚数”的本意就是指它是虚假的；莱布尼兹则认为：“虚数是美妙而奇异的神灵隐蔽所，它几乎是既存在又不存在的两栖物。”欧拉尽管在许多地方用了虚数，但又说一切形如$\sqrt{-1}$、$\sqrt{-2}$的数学式都是不可能有的，纯属虚幻的。

继欧拉之后，挪威测量学家维塞尔提出把复数（a+bi）用平面上的点来表示。后来高斯又提出了复平面的概念，终于使复数有了立足之地，也为复数的应用开辟了道路。现在，复数一般用来表示向量（有方向的量），这在水利学、地图学、航空学中的应用十分广泛，虚数越来越显示出其丰富的内容。真是：虚数不虚！

虚数的发展说明了：许多数学概念的产生并不直接来自实践，而是来自思维，但只有在实际生活中有了用处时，这些概念才能被接受而获得发展。

π的“马拉松计算”

圆的周长同直径的比值，一般用π来表示，人们称之为圆周率。在数学史上，许多数学家都力图找出它的精确值。约从公元前2世纪，一直到今天，人们发现它仍然是一个无限不循环的小数。因此，人们称它为科学史上的‘马拉松”。

关于π的值，最早见于中国古书《周髀算经》的“周三经一”的记载。东汉张衡取$\pi = 3.1466$（又取$\pi = \sqrt{10}$）。第一个用正确方法计算π值的，要算我国魏晋之际的杰出数学家刘徽，他创立了割圆术，用圆内接正多边形的边数无限增加时，其面积接近于圆面积的方法，一直算到正192边形，算得$\pi = 3.14124$，又继续求得圆内接正3072边形时，得出更精确的$\pi = \frac{3927}{1250} = 3.1416$，割圆术为圆周率的研究，奠定了坚实可靠的理论基础，在数学史上占有十分重要的地位。

随后，我国古代数学家祖冲之又发展了刘徽的方法，一直算到圆内接正24576边形，求出$3.1415926 < \pi < 3.1215927$，又求得$\pi = \frac{355}{113}$（密率），$\pi = \frac{22}{7}$（约率），使中国对π值的计算领先了1000年。为此，有人建议把$\pi = \frac{355}{113}$称为“祖率”，以纪念祖冲之的杰出贡献。

17世纪以前，各国对圆周率的研究工作仍限于利用圆内接和外切正多边形来进行。1427年伊朗数学家阿尔·卡西把π值精确计算到小数16位，打破祖冲之千年的记录。1596年荷兰数学家鲁多夫计算到35位小数，当他去世以后，人们把他算出的π数值刻在他的墓碑上，永远纪念着他的贡献（而这块墓碑也标志着研究π的一个历史阶段的结束，欲求π的更精确的值，需另辟途径）。

17世纪以后，随着微积分的出现，人们便利用级数来求π值，1873年算至707位小数，1948年算至808位，创分析方法计算圆周率的最高纪录。

1973年，法国数学家纪劳德和波叶，采用7600CDC型电子计算机，将π值算到100万位，此后不久，美国的科诺思，又将π值推进到150万位。1990年美国数学家采用新的计算方法，算得π值到4.8亿位。

早在1761年，德国数学家兰伯特已证明了π是一个无理数。

将π计算到这种程度，没有太多的实用价值，但对其计算方法的研究，却有一定的理论意义，对其他方面的数学研究有很大的启发和推动作用。

运算符号的由来

表示计算方法的符号叫做运算符号。如四则计算中的+、-、×、÷等。

加号“+”是加法符号，表示相加。

减号“-”是减法符号，表示相减。

“+”与“-”这两个符号是德国数学家威特曼在 1489 年他的著作《简算与速算》一书中首先使用的。在 1514 年被荷兰数学家赫克作为代数运算符号，后又经法国数学家韦达的宣传和提倡，开始普及，直到 1630 年，才获得大家的公认。

乘号“×”是乘法符号，表示相乘。1631 年，英国数学家奥特轩特提出用符号“×”表示相乘。乘法是表示增加的另一种方法，所以把“+”号斜过来。另一个乘法符号“·”是德国数学家莱布尼兹首先使用的。

除号“÷”是除法符号，表示相除。用这个符号表示除法首先出现在瑞士学者雷恩于 1656 年出版的一本代数书中。几年以后，该书被译成英文，才逐渐被人们认识和接受。

关系符号

表示数与数、式与式或式与数之间的某种关系的特定符号，叫做关系符号。有等号，大于号，小于号，约等于号，不等号等等。

等号：表示两个数或两个式或数与式相等的符号，记作“ = ”，读作“ 等于 ”。例如：3+2=5，读作三加二等于五。第一个使用符号 “ = ” 表示相等的是英国数学家雷科德。

大于号：表示一个数（或式）比另一个数（或式）大的符号，记作“ ＞ ”，读作 “ 大于 ”。例如：6＞5，读作六大于五。

小于号：表示一个数（或式）比另一个数（或式）小的符号，记作“ ＜ ”，读作 “ 小于 ”。例如：5＜6，读作五小于六。大于号和小于号是英国数学家哈里奥特于 17 世纪首先使用的。

约等于号：表明两个数（或式）大约相等的符号，记作“ ≈ ”，读作“ 约等于 ”。例如：π≈3.14，读作π约等于三点一四。

不等号：表示两个数（或式）不相等的符号，记作 “ ≠ ”，读作 “ 不等于 ”。例如 4+3≠9，读作四加三不等于九。

“$\sqrt{\quad}$”的来源

最早用“$\sqrt{}$”表示根号的，是法国数学家笛卡尔。17世纪，笛卡尔在他的著作《几何学》一书中首先用了这种数学符号。

“$\sqrt{}$”这个符号表示两层意思：左边部分“$\sqrt{}$”是由拉丁字母“r”演变而来的，它表示“root”即“方根”的意思；右上部的一条横线，正如我们已经习惯的表示括号的意思，也就是对它所括的数求方根。

正因为“$\sqrt{}$”既表示方根，又表示括号，所以凡在运算中遇到“$\sqrt{}$”，必须先做括号内的算式，然后再做其他运算。也就是说先要做根号运算。

奇妙的数字“9”

将循环小数化成分数，是解决有关循环小数的基本方法。怎样才能将循环小数化成分数呢？这要请我们的老朋友——9 来帮助解决问题。我们知道，

在数列计算中，有一个无穷等比数列的求和公式：$S=\frac{a}{1-q}$。其中a是这个数列的第一项，q 是公比。下面要用这个公式来研究化循环小数为分数的方法。先观察下面两个循环小数：0.6666……=0.6，0.242424……=0.24。它们都是从小数点后的第一位开始循环的，叫做纯循环小数。为了便于计算，先将它们写成分数的和的形式：

$$0.666\cdots\cdots=0.6+0.06+0.006\cdots\cdots$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\Lambda\ \Lambda$$

$$0.242424\cdots\cdots=0.24+0.0024+0.000024\cdots\cdots$$

$$=\frac{24}{100}+\frac{24}{10000}+\frac{24}{1000000}+\Lambda\ \Lambda$$

这就变成了无穷递缩等比数列的形式。$0.6666\cdots\cdots$的公比是$\frac{1}{10}$，而$0.242424\cdots\cdots$的公比是$\frac{1}{100}$。根据求和公式得：

$$0.66\Lambda\ \Lambda\ \frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{6}{10-1}=\frac{6}{9}$$

$$0.242424\Lambda\ \Lambda\ \frac{\frac{24}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{24}{100-1}=\frac{24}{99}$$

由此可以看出，要把纯循环小数化为分数，只要把一个循环节的数字化为分子，让分母由 9 组成，循环节有几位数字，分母是几个 9 就行了。例如：

$$0.4444\Lambda\ \Lambda=0.\dot{4}=\frac{4}{9}$$

$$0.5656\Lambda\ \Lambda=0.\dot{5}\dot{6}=\frac{56}{99}$$

$$031233123\Lambda\ \Lambda=0.\dot{3}12\dot{3}=\frac{3123}{9999}=\frac{347}{1111}$$

下面再来看看以下两个循环小数：

$0.2888\cdots\cdots=0.2\dot{8}$，$0.3545454\Lambda\ \Lambda=0.3\dot{5}\dot{4}$ 它们都不是从小数点后的第一从小数点后的第一位开始循环，这叫混循环小数。用分数的和可表示为：

$$0.28888\Lambda\ \Lambda = \frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}+\Lambda\ \Lambda$$

$$0.35454\Lambda\ \Lambda = \frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100000}$$

这种和的形式，从第二项起，构成了一个分别以$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{100}$为公比的无穷递缩等比数列。由求和公式得：

$$0.2888\Lambda\ \Lambda = \frac{2}{10}+\frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{2}{10}+\frac{8}{100-10}$$

$$= \frac{2}{10}+\frac{8}{90} = \frac{2\times 9+8}{90}$$

$$= \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$$

$$0.35454\Lambda\ \Lambda = \frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{3}{10}+\frac{54}{1000-10}$$

$$= \frac{3}{10} = +\frac{54}{990} = \frac{3\times 99+54}{990}$$

$$= \frac{351}{990} = \frac{39}{110}$$

由此可以看出：把混循小数化为分数，先去掉小数点，再用第二个循环节以前的数字减去不循环部分的数字，将得到的差作为分子；分母由 9 和 0 组成，9 的个数等于一个循环节的位数，9 的后面写 0，0 的个数等于循环部分的位数。例如：

$$0.27777\Lambda\ \Lambda = 0.2\dot{7} = \frac{27-2}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

$$0.31252525\Lambda\ \Lambda\ 0.312\dot{5}\dot{2} = \frac{3125-31}{9900} = \frac{1547}{4950}$$

数学的变化虽是无穷的，在研究了大量的现象或大量的例题后，应学会从特殊的问题中，善于总结出一般规律的思考方法。

神奇的“缺 8 数”

“缺 8 数”——12345679，颇为神秘，故许多人在进行探索。

清一色　菲律宾前总统马科斯偏爱的数字不是 8，却是 7。于是有人对他说：“总统先生，你不是挺喜欢 7 吗？拿出你的计算器，我可以送你清一色的 7。”接着，这人就用“缺 8 数”乘以 63，顿时，777777777 映入了马科斯先生的眼帘。

“缺 8 数”实际上并非对 7 情有独钟，它是“一碗水端平”，对所有的数都“一视同仁”的：你只要分别用 9 的倍数（9，18……直到 81）去乘它，则 111111111，222222222……直到 999999999 都会相继出现。

三位一体　“缺 8 数”引起研究者的浓厚兴趣，于是人们继续拿 3 的倍数与它相乘，发现乘积竟“三位一体”地重复出现。例如：

12345679×12=148148148
12345679×15=185185185
12345679×57=703703703

轮流“休息”　当乘数不是 3 的倍数时，此时虽然没有“清一色”或“三位一体”现象，但仍可看到一种奇异性质：乘积的各位数字均无雷同。缺什么数存在着明确的规律，它们是按照“均匀分布”出现的。另外，在乘积中缺 3、缺 6、缺 9 的情况肯定不存在。

让我们看一下乘数在区间[10～17] 的情况,其中 12 和 15 因是 3 的倍数，予以排除。

12345679×10=123456790（缺 8）
12345679×11=135802469（缺 7）
12345679×13=160493827（缺 5）
12345679×14=172869506（缺 4）
12345679×16=197530864（缺 2）
12345679×17=209876543（缺 1）

乘数在[19～26]及其他区间（区间长度等于 7）的情况与此完全类似。

乘积中缺什么数，就像工厂或商店中职工“轮休”，人人有份，但也不能多吃多占，真是太有趣了！

一以贯之　当乘数超过 81 时，乘积将至少是十位数，但上述的各种现象依然存在，真是“吾道一以贯之”。随便看几个例子：

（1）乘数为 9 的倍数

12345679×243=2999999997，只要把乘积中最左边的一个数 2 加到最右边的 7 上，仍呈现“清一色”。

（2）乘数为 3 的倍数，但不是 9 的倍数

12345679×84=1037037036,只要把乘积中最左边的一个数 1 加到最右边的 6 上，又可看到“三位一体”现象。

（3）乘数为 3k+1 或 3k+2 型

12345679×98=1209876542，表面上看来，乘积中出现雷同的 2，但据上所说，只要把乘积中最左边的数 1 加到最右边的 2 上去之后，所得数为 209876543，是“缺 1”数，而根据上面的“学说”可知，此时正好轮到 1 休息，结果与理论完全吻合。

走马灯　冬去春来，24 个节气仍然是立春、雨水、惊蛰……其次序完全

不变，表现为周期性的重复。“缺 8 数”也有此种性质，但其乘数是相当奇异的。

实际上，当乘数为 19 时，其乘积将是 234567901，像走马灯一样，原先居第二位的数 2 却成了开路先锋。深入的研究显示，当乘数成一个公差等于 9 的算术级数时，出现“走马灯”现象。例如：

12345679×28=345679012

12345679×37=456790123

回文结对　携手同行　“缺 8 数”的“精细结构”引起研究者的浓厚兴趣，人们偶然注意到：

12345679×4=49382716

12345679×5=61728395

前一式的积数颠倒过来读（自右到左），不正好就是后一式的积数吗？（但有微小的差异，即 5 代以 4，而根据“轮休学说”，这正是题中的应有之义。）

这样的“回文结对，携手并进”现象，对 13、14、22、23、31、32、40、41 等各对乘数（每相邻两对乘数的对应公差均等于 9）也应如此。例如：

12345679×67=827160493

12345679×68=839506172

遗传因子　“缺 8 数”还能“生儿育女”，这些后裔秉承其“遗传因子”，完全承袭上面的这些特征，所以这个庞大家族的成员几乎都同其始祖 12345679 具有同样的本领。

例如，506172839 是“缺 8 数”与 41 的乘积，所以它是一个衍生物。

我们看到，506172839×3=1518518517。

如前所述，“三位一体”模式又来到我们面前。

能被 2 和 5 整除的数

一个数的末一位数能被 2 和 5 整除，这个数就能被 2 和 5 整除。具体地说，个位上是 0、2、4、6、8 的数，都能被 2 整除。个位上是 0 或是 5 的数，都能被 5 整除。

例如：128、64、30 的个位分别是 8、4、0，这 3 个数都能被 2 整除。

281、165、79 的个位分别是 1、5、9，那么这 3 个数都不能被 2 整除。

在上面的 6 个数中，30 和 165 的个位分别是 0 和 5，这两个数能被 5 整除，其他各数均不能被 5 整除。