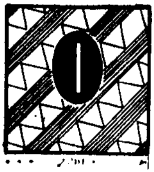
一、数 的 趣 闻

1

“0”的真本领



说起数“0”来，它有很多与众不同的特点，其他几个数码很不服气。

首先最不满意的是 9。它不高兴地说：“任何数后面添上 0，便增加到原来的 10 倍，这又算什么本事呢？添上 9 不是变 10 倍多吗？并且零只能往后添，我们可都是前后可添！要是前面添个 9，不是变得更大吗？”

7 接着说：“一个数的 0 次幂是 1，也值得夸吗？每个数自己除自己都得 1！偏偏 0 不能自己除自己！0 最没本领！”

1 更不甘示弱：“任何数加 0 不变，也不过是 0 沾了加法的光罢了。如果请乘法出面，任何数乘 1 不也是不变吗？”

5 说：“0 是负数和正数的界限，这当然不错，但哪个数不能当界限呢？我 5，不是四舍五入的界限吗？”

6 说：“对呀！界限是人规定的。考试 60 分及格，60 分就成了一个界限。坐火车身高一米以上的儿童要买票，一米也成了界限！”

大家叽叽喳喳，议论不休。特别对于恩格斯说的，一个方程，只有右端为零时，它的意义才能完全表现出来，它们觉得难以接受。为什么恩格斯这样偏爱 0 呢？找恩格斯找不到，大家便去数学医院找张大夫。张大夫说：

“每个数都有自己的特色和作用，例如 9，就有很多妙用，用它可以作许多数学游戏。不是吗？

7也有许多有趣的性质，比如，1除以7得0.142857，142857乘以2，得285714，142857乘以3，得428571，142857乘以4，得571428……。总是这六个数码轮换。

2是唯一的偶素数。2维空间的几何学里，有许多特别有趣的定理。2在哲学上也很重要，一分为“2”嘛！

3也了不起。三角形多么重要，它有“3”个角，还有“3”条边？讨论数学问题，常常分成大于、等于、小于三种情况研究。这叫做“三歧性”！平面上三点确定一个圆，空间三点确定一个平面，所以日常生活中有好多东西是“3”条腿。

张大夫把几个数的特点都摆了一下，最后，见大家慢慢心平气和了，才说：

“0确实有它的真本领。

“以0为界限把实数分成正数、负数和0，这样才有可能同号相乘得正，异号相乘得负，如果用5作界限，规律就不好找了。

“方程右端要搞成0，是有道理的，你看：

$$(x-2)(x-3)=0,$$

写上就知道 $x-2=0$ 或 $x-3=0$。两个根都求出来了。若是

$$(x-2)(x-3)=1,$$

这个方程就还要经过一番周折才解得出来！”

从此，数码们不在为0的特殊地位而愤愤不平了。它们知道了，尽管大家各有特点，0也确有自己的真本领。

2

1987 年前夕，河北东方中学的同学们特拟“1987”数题，举行庆新年迎新春数学晚会，同学们同庆，共欢，有意思极了。他们的题目是：

(1) 试证 $5^{1987}+6^{1987}<7^{1987}$.

略证：$\because \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{1987}+\left(\frac{6}{7}\right)^{1987}<\left(\frac{5}{7}\right)^{3}+\left(\frac{6}{7}\right)^{3}$,

而 $\left(\frac{5}{7}\right)^{3}+\left(\frac{6}{7}\right)^{3}=\frac{5^3+6^3}{7^3}=\frac{125+216}{343}$

$=\frac{341}{343}<1$,

$\therefore \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{1987}+\left(\frac{6}{7}\right)^{1987}<1$.

故 $\qquad 5^{1987}+6^{1987}<7^{1987}$.

(2) 试证：

$$\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}\times\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}+1\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}=100^{1987}.$$

略证：

$$\text{左边}=\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}\times\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}+10^{1987}+\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}\times(\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}+1)+10^{1987}$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{1987\text{个}}\times10^{1987}+10^{1987}$$

$$=10^{1987}(\underbrace{99\cdots9}_{1987个}+1)$$

$$=10^{1987}\times10^{1987}=100^{1987}.$$

（3）试证：$\underbrace{11\cdots1}_{1987个}\underbrace{22\cdots2}_{1987个}$ 能被 $\underbrace{33\cdots3}_{1987个}$ 整除。

略证：$\underbrace{11\cdots1}_{1987}\underbrace{22\cdots2}_{1987}=\underbrace{11\cdots1}_{1987}\times(10^{1987}+2)$，

而 $10^{1987}+2$ 的各位数字之和为 3，所以 $10^{1987}+2$ 能被 3 整除，所以 $\underbrace{11\cdots1}_{1987个}\underbrace{22\cdots2}_{1987个}$ 能被 $\underbrace{11\cdots1}_{1987个}$ 和 3 整除，即能被 $\underbrace{11\cdots1}_{1987个}\times3=\underbrace{33\cdots3}_{1987个}$ 整除。

（4）比较下列两数的大小：

①$1987^{1987}\cdot1986^{1986}$ 和 $1987^{1986}\cdot1986^{1987}$；

②$\log_{1986}1987$ 和 $\log_{1987}1988$。

解 ①$1987^{1987}\cdot1986^{1986}=1987^{1986}\cdot1987\cdot1986^{1986}$

$$>1987^{1986}\cdot1986\cdot1986^{1986}=1987^{1986}\cdot1986^{1987}.$$

②$\log_{1986}1987>0$，$\log_{1987}1988>0$，

又 $\log_{1987}1986=\dfrac{1}{\log_{1986}1987}$，

从而 $\log_{1987}1986>0$.

由 $\sqrt{\log_{1987}1986\cdot\log_{1987}1988}\leqslant\dfrac{1}{2}(\log_{1987}1986+\log_{1987}1988)$

$$=\frac{1}{2}\log_{1987}(1986\times1988)<\frac{1}{2}\log_{1987}1987^2=1.$$

得 $\log_{1987}1986\cdot\log_{1987}1988<1$，

即 $\log_{1986}1987>\log_{1987}1988$.

(5) 设 $a^2+a+1=0$，求证：

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{1987}=a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}.$$

证明：由 $a^2+a+1=0$ 知 $a\neq 1$，$a\neq 0$，于是

$$(a-1)(a^2+a+1)=0$$

即 $$a^3-1=0.$$

∴ $$a^3=1.$$

因此 $$a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=\frac{(a^3)^{663}}{a^2}+\frac{a^2}{(a^3)^{663}}$$

$$=\frac{1}{a^2}+a^2$$

$$=\left(\frac{1}{a}+a\right)^2-2.$$

又由 $a^2+a+1=0$ 知 $a\neq 0$,

于是有 $$\frac{1}{a}+a=-1.$$

∴ $$a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=(-1)^2-2=-1.$$

而 $$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{1987}=(-1)^{1987}=-1,$$

∴ $$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{1987}=a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}.$$

(6) 设以 r 为半径的圆内接正 1987 边形 $A_1A_2\cdots A_{1987}$，与圆心距离为 a 的一点 P。试证：

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_{1987}^2=1987(r^2+a^2).$$

略证：设 $\angle POA_1=\theta$，则

$$\angle POA_2=\theta+\frac{2\pi}{1987},$$

$$\angle POA_3=\theta+2\cdot\frac{2\pi}{1987},$$

……，

$$\angle POA_{1987}=\theta+1986\cdot\frac{2\pi}{1987}.$$

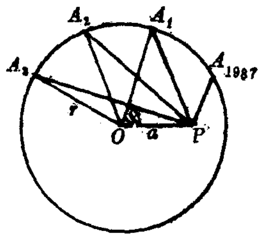


图 1-1

由余弦定理，得：

$$PA_1^2=r^2+a^2-2ra\cos\theta,$$

$$PA_2^2=r^2+a^2-2ra\cdot\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{1987}\right),$$

$$PA_3^2=r^2+a^2-2ra\cdot\cos\left(\theta+2\cdot\frac{2\pi}{1987}\right),$$

……

$$PA_{1987}^2=r^2+a^2-2ra\cdot\cos\left(\theta+1986\cdot\frac{2\pi}{1987}\right).$$

相加，得

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_{1987}^2=1987(r^2+a^2)-2ra\cdot S$$

其中

$$S=\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{1987}\right)+\cos\left(\theta+2\cdot\frac{2\pi}{1987}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+1986\cdot\frac{2\pi}{1987}\right).$$

$$=\frac{\cos\left[\theta+\frac{1986}{2}\cdot\frac{2\pi}{1987}\right]\cdot\sin\left(\frac{1986+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{1987}\right)}{\sin\frac{\frac{2\pi}{1987}}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left[\theta+\frac{1986}{2}\cdot\frac{2\pi}{1987}\right]\cdot\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{1987}}=0^{*}$$

所以，$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_{1987}^2=1987(r^2+a^2)$。

3 1986 与 1987

【问题】有没有这样的自然数,它的最后四位数是1986，并且是 1987 的倍数？

解：假定存在这样的数，设它为 x，并设它是 1987 的 y 倍。y 的末位数字与 1987 的末位数字 7 相乘所得结果的最后一位数字，等于 x 的末位数字 6。所以 y 的末位数字只能是 8：

$$1987\times 8=15896.$$

x 的最后四位数字是1986，把它的前面各位数字暂用“…”代替，可写成

* $\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta+2\alpha)+\cdots+\cos(\theta+n\alpha)$

$$=\frac{\cos\left(\theta+\frac{n}{2}\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$x=\cdots 1986$$

由于 $$\cdots 1986-15896=\cdots 6090,$$

可见 y 的十位数字与 1987 的末位数字 7 相乘，所得结果的最后一位数是 9。即 $\cdots 6090$ 的十位数字．因此 y 的十位数字是 7：

$$1987\times 70=139090,$$

而 $$\cdots 6090-139090=\quad 7000.$$

仿照上面的办法，可得到 y 的百位数字是 0,千位数字是 1。可见 y 至少要有四位，它的最后四位数字一定要是 1078，前面各位数字随便怎样都行．而

$$1987\times 1078=2141986$$

所以，满足问题要求的数有无穷多个，其中最小的一个是 2141986。

分析　这道题固然有趣，它的解法也非常有意思，解题过程中所用到的知识，是初中同学都能接受的，把 10 个数 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，分别与 7 相乘，所得结果的个位数字各不相同：

$$0\times 7=0,\qquad 1\times 7=7,$$
$$2\times 7=14,\qquad 3\times 7=21,$$
$$4\times 7=28,\qquad 5\times 7=35,$$
$$6\times 7=42,\qquad 7\times 7=49,$$
$$8\times 7=56,\qquad 9\times 7=63.$$

所以，根据乘积的个位数字是多少，就能对号入座，确定与 7 相乘的那个一位数是什么．

如果 7 换成 5，情况就很不妙，因为任何数与 5 相乘，所得结果的个位数字，或者是 5，或者是 0，只有两种结果，

所以，仅仅根据一个数与 5 相乘所得结果的末位数字，并不能判断原来这个数的个位数字是多少.

如果把 7 换成 4 ,情况也好不了多少,因为任何数与 4 相乘，其积必为偶数，因而个位数字只有五种不同的可能，也不是十种.

一个数的个位数字,可以看成这个数除以 10所得的余数.数 7 与 10 互质（最大公约数是 1),而 5 或 4 与 10 不互质，(最大公约数是 5 或 2, 不等于 1)。推广一下，把 7 和 10 换成任意自然数 a 和 n ,可以猜想：

如果正数 a 和 n 互质，那么 n 个乘积 $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2a$, … $(n-1)a$ 分别被 n 去除，所得的余数各不相同.

这个猜想对不对呢？请你自己研究一番，得出结论。如果研究不出来，请见本书第 15 个故事.

通过解题和分析，你可以了解怎样从你所熟悉的简单事物出发，逐步深入思考。从而发现一些有价值的研究题目，这对培养我们的研究能力，增强才干和智慧很有好处。

4 神奇的7

“7 ”在古人心目中是个神奇的数字，他们看到金、木、水、火、土五颗行星，加上日和月，便称为“七星”。我国古时所谓的“七政”，就是最先注意到这七个天体的例子.

天空里特别明显的星座，有许多也是七星相连的，如北斗七星，中外都有七姊妹的故事；北冕、仙后、天鹅、双子、室女等星座，好象是自然的安排，爱把六、七颗较亮的

星星连在一起，喜欢穿凿的人，便附会“七”是一个解迷的钥匙了。月亮的形状，隔七天半换一个样子，似乎又与七有关。

底格里斯河和幼发拉底斯河流域，是人类文明的一个摇篮．那里的苏麦尔人和巴比伦人在城市时期之前的一、两万年(古石器时代),就曾创作了大量的艺术品,科学家曾对每个遗址里的全部作品进行过统计学分析，结果发现都是按七个因素分组的．苏麦尔人在五千年之久的文字记载中,也提到有七大仙、七大行星、七种风、七层浮屠和七日大洪水。他们认为，天的意思本身就是用整数七表示的。

和阿基米德、牛顿、高斯并列为有史以来贡献最大的四位数学家的欧拉，解决了历史上流传很久的著名而又有趣的数学难题《哥尼斯堡七桥》问题，也是与七有关。

迷人的彩虹,是红、橙、黄、绿、青、蓝、紫七种颜色的光谱。人们创造的音乐，是七音音阶所组成。古代腓尼基人将埃及金字塔、宙斯神像、摩索拉斯陵墓、巴比伦的“空中花园”阿泰密斯女神庙、罗得岛太阳神巨像和亚历山大的灯塔,称为“世界七大奇迹”。古希腊人也常提到七哲人和七奇迹的神话。

正因为视“7”为神圣的数字,传说古代巴比伦的星占家规定了一个新的时间单位——七天——月亮每圆一次需要的天数28天的四分之一,为一“星期”。后来“星期”由巴比伦传到古罗马，就以七星为古罗马主要神祇的象征：星期日，献给太阳；星期一，献给月亮；星期二，献给火星——战神；星期三，献给水星——商业之神；星期四，献给木星——万神之主；星期五，献给金星——春神、美神；星期六，献给

土星——农业之神。

但在以后，天主教创造了一种星期日的"新理论"，就是象《圣经·旧约·创世纪》开头讲的上帝造天地万物及人的故事。他五天造天地万物，第六天造人，第七天即太阳司职的那天，创世主完工休息，人们就拜神祈祷，所以出现了"礼拜日"。后来成了制度，流传到世界各国。

由此不难看出，7在人们的心目中是非常神密的。

5　数字"7"的趣闻

"7"在数字中是一个非常奥妙的数，用"7"除以1至9中的任何一个自然数时，它的商数竟能一样的循环，如，

$$1 \div 7 = 0.142857142857\cdots$$

再演下去，仍然是142857，它的循环节，是由142857六个数组成。

假如，

$$2 \div 7 = 0.285714\cdots$$
$$3 \div 7 = 0.428571\cdots$$
$$4 \div 7 = 0.571428\cdots$$
$$5 \div 7 = 0.714285\cdots$$
$$6 \div 7 = 0.857142\cdots$$

从上面演算来看非常有趣，它的商数都没有离开142857，只是调换了一下位置。

若把商数的循环节，按顺时针方向排列在一个圆周上，（图1-2），相对应的两个数，相加的结果都是"9"（即1对

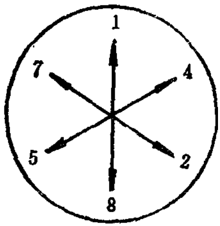


图 1-2

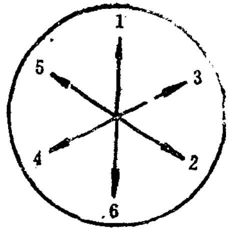


图 1-3

8，4对5，2对7）

更有趣的是，求商数时，每一步的余数也循环.

它的余数是1、3、2、6、4、5也是无限循环的数列,若把这六个数也按顺时针方向排列在一个圆周上（图1-3），则相对应的两个数，相加的结果都是“7”（即1对6，3对4，2对5）.

6　数“1”的自述

在自然数里我是排头，如果是向后转走的队形，我是…

图 1-4

自然数里的最小一个．我受到大哥大姐们的尊重.在自然数的大家庭里我受到优厚的待遇：

我与任何数相乘，原数不变.

$$1\cdot a=a.$$

我可以写成分子和分母相等的分数，

$$1=\frac{a}{a}(a\neq 0);$$

我是两个互为倒数的数的积，

$$1=a\cdot\frac{1}{a}(a\neq 0);$$

我可以写成任何一个不等于零的数的零次幂。

$$1=a^{0}(a\neq 0);$$

我的任意次幂，还是我，

$$1=1^{n}\ (n\text{ 整数});$$

我的任意次算术方根仍为我，

$$1=\sqrt[n]{1}\ (n\text{ 为自然数});$$

我还可以写成底数和真数相等的对数，

$$1=\log_{a}a\quad(a>0);$$

我是一个角 α（不为 0 及$\frac{n}{2}$的整数倍）的正切函数值与余切函数值的积，

$$1=\text{tg}\,\alpha\cdot\text{ctg}\,\alpha;$$

我也可以写成一个角的正弦值与余弦值的平方和，

$$1=\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha;$$

我也可以写成同一个角的正割值与正切值的平方差，

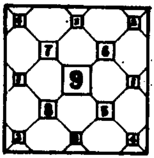
$$1=\sec^{2}\alpha-\text{tg}^{2}\alpha\ (\text{假定右端有意义});$$

我也是一个角的余割值与余切值的平方差，

$$1=\text{ces}^{2}\alpha-\text{ctg}^{2}\alpha\quad(\text{假定右端有意义}).$$

由以上不难看出，我虽没有《西游记》里的齐天大圣孙悟空的本领大，但我也有十一大变的本领，我可以变脸，对不同的人可以变不同的脸。在解决生产实际问题当中，往往把一个工程的整体用我来表示，问题就迎刃而解了。

7 奇趣的数



在自然数里有一些奇趣的数，象“2025”就是一个奇趣的数，因为你如果把“2025”截成两段：“20”和“25”。把它们相加后再自乘，仍得“2025”，象具有这样特点的数还有哪些？

经过分析，我们知道，用简单的代数知识可以回答这个问题。

设四位数的前两位(千位，百位)为 x，后两位(十位，个位)为 y，依题意，得

$$(x+y)^2=100x+y,$$

整理，得

$$x^2-x(100-2y)+y(y-1)=0,$$

解之，得

$$x=50-y\pm\sqrt{50^2-99y}$$

其中 $\sqrt{50^2-99y}$ 为正整数。所以，y 只能为 0，1 和 25。当 $y=0$ 时，$x=0$ 或 100；当 $y=1$ 时，$x=0$ 或 98；当 $y=25$ 时，$x=20$ 或 30，于是得

$$\begin{cases}x=20,\\y=25;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=30,\\y=25;\end{cases}$$

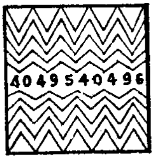
$$\begin{cases}x=98,\\y=1.\end{cases}$$

所以，除“2025”外，还有 3025 和 9801 两数，显然有

$$(30+25)^2=55^2=3025;$$

$$(98+01)=99^2=9801.$$

8 一类有趣的完全平方数



4049540496 是一个有趣的数，它的前五位是 40495，后五位是 40496，后五位构成的数比前五位构成的数多 1．更重要的是，这个数是一个完全平方数，它等于 63636 的平方．

象 4049540496 这样的完全平方数还有吗？用什么方法可以找出来？下面我们就研究这个问题．

设 x 满足 $x^2=4049540496$.

把它变形为

$$x^2-1=40495\times10^5+40495$$
$$=40495(10^5+1).$$

于 是 $(x-1)(x+1)=7\times5785\times11\times9091.$

考虑到左边两个因数相差 2，不难求出它们分别等于

$$x-1=5785\times11,\quad x+1=7\times9091.$$

于是终于找到 $x=63636$.

一般地，可以得出这种完全平方数的下列构成法：

如果 x 是五位数，x^2 是十位数，并且它的后五位构成的数比前五位构成的数大 1，那么 x^2 可以写成

$$x^2=m\times10^5+(m+1),$$

$$x^2-1=m(10^5+1)。$$

利用分解式 $10^5+1=11\times9091$，

有 $$(x-1)(x+1)=m\times11\times9091。$$

若m可继续分解为 $a\times b$，那么应有

$$x-1=a\times11,\qquad x+1=b\times9091。\tag{1}$$

或者 $$x+1=a\times11,\qquad x-1=b\times9091。\tag{2}$$

由此可决定 a，b，从而可决定 x。

如果（1）成立，那么

$$b\times9091-a\times11=2。\tag{3}$$

为决定 a、b，利用辗转相除法，

	9091	11	826
	9086	10	
2	5	1	

即有 $$9091=826\times11+5,\tag{4}$$

$$11=2\times5+1。\tag{5}$$

由（4）、(5)，得

$$5=9091-826\times11。\tag{6}$$

$$1=11-2\times5。\tag{7}$$

（6）代入(7)，得

$$\begin{aligned}1&=11-2\times(9091-826\times11)\\&=11\times1653-2\times9091。\end{aligned}$$

扩大2倍，得

$$2=11\times3306-4\times9091$$

为与(3）对照，进一步化为

$$\begin{aligned}2&=11\times3306-k\times11\times9091+k\times11\times9091-4\times9091\\&=9091\times(11k-4)-11\times(9091k-3306),\end{aligned}$$