

赣南师范学院学术著作出版基金资助项目

# 趣谈闭折线的 $k$ 号心

曾建国 熊曾润 著

江西高校出版社

# 目 录

前 言 .....	(1)
§ 1 从三角形的七个心谈起 .....	(1)
§ 2 平面闭折线的 $k$ 号心概念 .....	(7)
§ 3 $k$ 号心与原点的距离公式 .....	(13)
§ 4 $k$ 号心与顶点的距离公式 .....	(18)
§ 5 $k$ 号心到特殊直线的距离 .....	(22)
§ 6 与 $k$ 号心相关的面积定理 .....	(28)
§ 7 与 $k$ 号心相关的平行线定理 .....	(33)
§ 8 与 $k$ 号心相关的共点线定理 .....	(38)
§ 9 与 $k$ 号心相关的多点共圆定理 .....	(43)
§ 10 与 $k$ 号心相关的多线切圆定理 .....	(49)
§ 11 与 $k$ 号心相关的不等式 .....	(54)
§ 12 与 $k$ 号心相关的轨迹定理(1) .....	(59)
§ 13 与 $k$ 号心相关的轨迹定理(2) .....	(64)
§ 14 双圆闭折线 $k$ 号心的几个性质 .....	(68)
练习与思考 .....	(74)

# 前 言

由已知三角形按某种法则所确定的一些特殊点,通常称为三角形的心.它们是欧氏几何学中一类重要而有趣的研究对象.

众所周知,三角形的外心、重心、垂心和欧拉圆心(也称九点圆心)在同一条直线上,三角形的内心、重心、奈格尔点和斯俾克圆心也在一条直线上.考察这些心的向量表示,容易发现它们的共同特征.根据这种共同特征,我们建立了一般平面闭折线的“ $k$ 号心”概念,它是上述诸心定义的一种统一的推广.

本书探讨了平面闭折线的“ $k$ 号心”的众多有趣的性质,轻松地推广了平面几何中一系列著名的定理.凡对研究初等几何具有浓厚兴趣的读者,都可从中得到一些有益的启示.

阅读本书并不需要具备高深的数学知识,熟悉平面向量的读者便不难理解本书的全部内容.当然,它要求读者具有一定的抽象思维和空间想象能力.

本书可供中学高年级学生和师范院校数学系学生学习和研究,也可供中学数学教师及数学爱好者参考.书中不当或谬误之处,敬请读者批评指正.

作 者

2006年10月于赣南师范学院

## § 1 从三角形的七个心谈起

所谓三角形的“心”，是指由已知三角形按某种法则所确定的特殊点. 这是欧氏几何学中一类重要而有趣的研究对象.

早在公元前的“欧几里得时期”，人们就发现了与三角形相关的一些重要的心. 例如：

(1) 三角形的三条边的垂直平分线必相交于同一点，这个点到三顶点的距离相等，它是三角形的外接圆的圆心，称为三角形的外心，通常记作  $O$ ；

(2) 三角形的三个内角的平分线必相交于同一点，这个点到三边的距离相等，它是三角形的内切圆的圆心，称为三角形的内心，通常记作  $I$ ；

(3) 三角形的三条中线必相交于同一点，这个点到任一顶点的距离，等于它到对边中点距离的 2 倍，这个点称为三角形的重心，通常记作  $G$ ；

(4) 三角形的三条高所在的直线必相交于同一点，这个点称为三角形的垂心，通常记作  $H$ .

到 18 ~ 19 世纪，人们又发现了与三角形相关的另外一些重要的心，例如：

(5) 若  $\triangle ABC$  的三条边  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  各与旁切圆相切于  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ，则  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  交于同一点(图 1-1)，这个点叫做  $\triangle ABC$  的奈格尔(Nagel)点，通常记作  $N$ ；

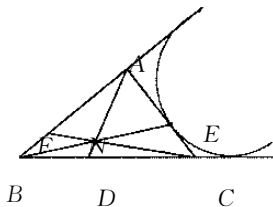


图 1-1

(6) 设  $\triangle ABC$  的三条边  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  的中点分别为  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，那么  $\triangle A_1B_1C_1$  的外接圆(图 1-2) 称为  $\triangle ABC$  的欧拉(Euler)圆，这个圆的圆心称为  $\triangle ABC$  的欧拉圆心，通常记作  $E$ ；

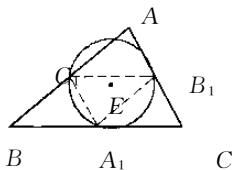


图 1-2

(7) 设  $\triangle ABC$  的三条边  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  的中点分别为  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，那么  $\triangle A_1B_1C_1$  的内切圆(图 1-3) 称为  $\triangle ABC$  的斯俾克(Spieker)圆，这个圆的圆心称为  $\triangle ABC$  的斯俾克圆心，通常记作  $S$  等等。

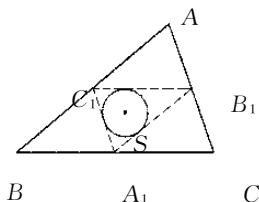


图 1-3

三角形还有众多其他的心，这里就不陈述了。

从欧几里得的几何学诞生到现在，两千多年来，人们对三角形的上述七个心作过非常深入地研究，不仅发现了这七个心的许多优美性质，而且还揭示了它们之间的一些内在的联系。这七个心之间的主要联系，可以用如下两个定理来描述：

定理 1.1 三角形的外心  $O$ 、重心  $G$ 、欧拉圆心  $E$ 、垂心  $H$  四点共线，且  $OG : GE = 2 : 1$ ， $OG : GH = 1 : 2$ 。

定理 1.2 三角形的内心  $I$ 、重心  $G$ 、斯俾克圆心  $S$  及奈格尔点  $N$  四点共线，且  $IG : GS = 2 : 1$ ， $IG : GN = 1 : 2$ 。

关于这两个定理的证明，请参看《平面闭折线趣探》(熊曾润著，中国工人出版社 2002 年出版)，这里从略。我们感兴趣的是，根据这两个定理，可以推得如下命题：

定理 1.3 设  $\triangle A_1A_2A_3$  的外心为  $O$ ，垂心为  $H$ 、欧拉圆心为  $E$ 、重心为  $G$ ，则

$$\overrightarrow{OH} = \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{OA_i} ; \quad (1-1)$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{OA_i} ; \quad (1-2)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{OA_i} . \quad (1-3)$$

定理 1.4 设  $\triangle ABC$  的内心为  $I$ , 奈格尔点为  $N$ , 斯俾克圆心为  $S$ , 重心为  $G$ , 则

$$\overrightarrow{IN} = \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{IA_i} ; \quad (1-4)$$

$$\overrightarrow{IS} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{IA_i} ; \quad (1-5)$$

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{IA_i} . \quad (1-6)$$

下面证明定理 1.3 :

证明 先证等式(1-3). 如图 1-4, 设  $A_2A_3$  的中点为  $D$ , 则有  $\overrightarrow{A_2D} = \overrightarrow{DA_3}$ . 根据向量的减法, 这个等式可以写成

$$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OD} ,$$

$$\therefore 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} . \quad (1)$$

但重心  $G$  在  $A_1D$  上, 且  $A_1G =$

$2GD$ , 所以有  $\overrightarrow{A_1G} = 2\overrightarrow{GD}$ , 即  $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA_1} = 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG})$ .

$$\therefore 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA_1} + 2\overrightarrow{OD} \quad (2)$$

将①代入②, 可得  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{OA_i}$ . 这就证明了(1-3)式.

再证(1-1)式. 由定理 1.1 可知  $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$ . 即  $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} =$

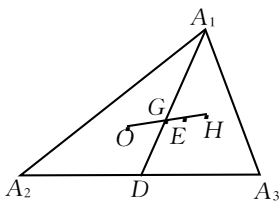


图 1-4

$2\overrightarrow{OG}$ , 所以  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{OA_i}$ . 这就证明了(1-1)式.

最后证等式(1-2). 由定理 1.1 可知  $2\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{OG}$ . 即  $2(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{OG}$ , 由此可得  $\overrightarrow{OE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \overrightarrow{OA_i}$ . 这就证明了(1-2)式. 命题得证.

类似地可以证明定理 1.4, 证明过程请读者自己完成.

观察等式(1-1)、(1-2)、...、(1-6)的共同特点, 归纳它们的共同规律, 我们可以建立三角形的“ $k$ 号心”概念如下:

定义 1.1 设  $P$  为  $\triangle A_1A_2A_3$  所在平面内的定点,  $k$  为任意给定的正整数, 若点  $Q$  满足

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{PA_i}, \quad (1-7)$$

则点  $Q$  称为  $\triangle A_1A_2A_3$  关于点  $P$  的  $k$  号心, 定点  $P$  称为原点.

我们把等式(1-7)称为三角形的“ $k$ 号心的向量公式”.

显然, 按这个定义, 三角形关于其外心  $O$  的 1 号心、2 号心和 3 号心, 就是它的垂心、欧拉圆心和重心; 三角形关于其内心  $I$  的 1 号心、2 号心和 3 号心, 就是它的奈格尔点、斯俾克圆心和重心. 由此可知, 三角形  $k$  号心的概念, 是三角形的重心、垂心、奈格尔点、欧拉圆心和斯俾克圆心等概念的统一推广.

例 1.1 设  $\triangle ABC$  关于原点  $P$  的 1 号心为  $Q$ , 边  $BC$  的中点为  $D$  (图 1-5) 求证:  $AQ \parallel PD$ , 且  $|AQ| = 2|PD|$ .

证明 因为  $D$  是  $BC$  的中点, 所以有

$$2\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \quad \textcircled{3}$$

又因为  $Q$  是  $\triangle ABC$  关于点  $P$  的 1

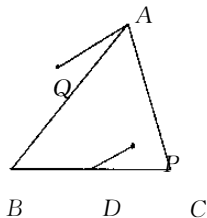


图 1-5

号心,由定义 1.1 可知

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}. \quad (4)$$

根据 ③ 和 ④,由向量的运算可得

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PD}.$$

由此可知  $AQ \parallel PD$ ,且  $|AQ| = 2|PD|$ .命题得证.

显然,在这个例题中,令原点  $P$  为  $\triangle ABC$  的外心  $O$  或内心  $I$ ,可以得到如下二命题:

命题 1.1 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O$ ,垂心为  $H$ ,边  $BC$  的中点为  $D$ ,则  $AH \parallel OD$ ,且  $|AH| = 2|OD|$ .

命题 1.2 设  $\triangle ABC$  的内心为  $I$ ,奈格尔点为  $N$ ,边  $BC$  的中点为  $D$ ,则  $AN \parallel ID$ ,且  $|AN| = 2|ID|$ .

例 1.2 设  $\triangle ABC$  关于原点  $P$  的 1 号心为  $Q$ ,线段  $AQ$  和  $BC$  的中点分别为  $M$  和  $D$ ,求证 线段  $MD$  被  $\triangle ABC$  关于原点  $P$  的 2 号心平分.

证明 应用同一法.如图 1-6,设线段  $MD$  的中点为  $T$ ,那么只需证明点  $T$  是  $\triangle ABC$  关于点  $P$  的 2 号心就行了.

因为  $M$  和  $D$  分别是  $AQ$  和  $BC$  的中点,所以

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ});$$

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$$

又因为  $T$  是  $MD$  的中点,所以有

$$\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PQ}).$$

注意到  $Q$  为  $\triangle ABC$  关于点  $P$  的 1 号心,可知  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ (定义 1.1),代入上式就得

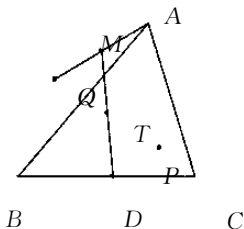


图 1-6

$$\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$$

由此可知,点  $T$  是  $\triangle ABC$  关于点  $P$  的 2 号心(定义 1.1). 命题得证.

显然,在这个例题中,令原点  $P$  为  $\triangle ABC$  的外心  $O$  或内心  $I$ , 可以得到如下二命题:

命题 1.3 设  $\triangle ABC$  的垂心为  $H$ , 线段  $AH$  和  $BC$  的中点分别为  $M$  和  $D$ , 则线段  $MD$  被  $\triangle ABC$  的欧拉圆心平分.

命题 1.4 设  $\triangle ABC$  的奈格尔点为  $N$ , 线段  $AN$  和  $BC$  的中点分别为  $M$  和  $D$ , 则线段  $MD$  被  $\triangle ABC$  的斯俾克圆心平分.

由以上两个例题可以看出,三角形的  $k$  号心概念,不但拓宽了三角形的心的领域,对研究三角形的某些已知的心的性质也有重要意义.

## § 2 平面闭折线的 $k$ 号心概念

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是同一平面内的  $n$  个点 ( $n \geq 3$ ), 其中  $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$  三点不在同一条直线上 ( $i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $A_{n+1}, A_{n+2}$  分别为  $A_1, A_2$ ), 那么, 由线段  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  组成的图形, 称为平面闭折线, 简称为闭折线, 记作  $A_1A_2\dots A_nA_1$  或简记为  $A(n)$ .

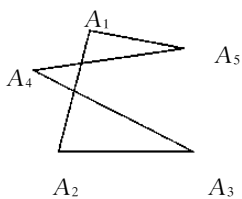


图 2-1

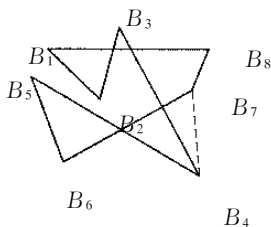


图 2-2

例如, 图 2-1 是由 5 条线段  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$  组成的闭折线, 记作  $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$  或简记为  $A(5)$ . 图 2-2 是由 8 条线段  $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_8B_1$  组成的闭折线, 记作  $B_1B_2\dots B_8B_1$  或简记为  $B(8)$ . 特别的, 由三条线段  $C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1$  组成的闭折线(图略)就是三角形, 习惯上记作  $\triangle C_1C_2C_3$ .

在闭折线  $A(n)$  中, 线段  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  称为这条闭折线的边, 点  $A_1, A_2, \dots, A_n$  称为这条闭折线的顶点, 同一条边上的两端的顶点称为相邻的顶点, 从同一顶点出发的两条边称为相邻的边, 连结不相邻的两个顶点的线段称为对角线.

如果闭折线  $A(n)$  的所有顶点都在同一个圆周上(图 2-3),

那么  $A(n)$  称为这个圆的内接闭折线, 这个圆称为闭折线  $A(n)$  的外接圆, 其圆心称为  $A(n)$  的外心.

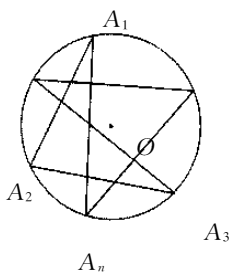


图 2-3

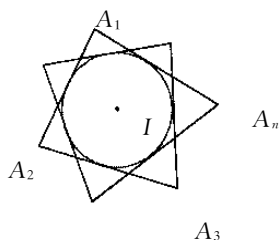


图 2-4

如果闭折线  $A(n)$  的所有各边都与同一个圆相切(图 2-4), 那么  $A(n)$  称为这个圆的外切闭折线, 这个圆称为闭折线  $A(n)$  的内切圆, 其圆心称为  $A(n)$  的内心.

三角形是最简单的闭折线. 仿效三角形的  $k$  号心概念, 运用类比方法, 我们可以建立一般闭折线的  $k$  号心概念如下:

定义 2.1 设  $P$  为闭折线  $A(n)$  所在平面内的定点,  $k$  为任意给定的正整数, 若点  $Q$  满足

$$\vec{PQ} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \vec{PA}_i, \quad (2-1)$$

则点  $Q$  称为闭折线  $A(n)$  关于点  $P$  的  $k$  号心, 定点  $P$  称为原点.

我们把等式(2-1)称为闭折线的“ $k$  号心的向量公式”.

特别的, 本书约定:

(1) 闭折线  $A(n)$  关于点  $P$  的  $n$  号心, 称为闭折线  $A(n)$  的重心(不难验证, 闭折线  $A(n)$  的重心的位置, 与原点  $P$  的选择无关).

(2) 若闭折线  $A(n)$  内接于  $\odot O$ , 则  $A(n)$  关于其外心  $O$  的

1号心和2号心分别称为闭折线  $A(n)$  的垂心和欧拉圆心(关于圆内接闭折线  $A(n)$  的欧拉圆概念, 请参看本书 §9).

(3) 若闭折线  $A(n)$  外切于  $\odot I$ , 则  $A(n)$  关于点  $I$  的1号心和2号心分别称为闭折线  $A(n)$  奈格尔点和斯俾克圆心(关于圆内接闭折线  $A(n)$  的斯俾克圆概念, 请参看本书 §10).

根据上述定义及约定, 我们可以推得

**定理 2.1** 设闭折线  $A(n)$  关于点  $P$  的  $k$  号心为  $Q(k \neq n)$ , 其重心为  $G$ , 则  $P, G, Q$  三点共线, 且  $\overline{PG} : \overline{GQ} = k : (n - k)$ .

**证明** 应用同一法. 在直线  $PQ$  上取一点  $M$ , 使  $\overline{PM} : \overline{MQ} = k : (n - k)$  (图略), 那么只需证明点  $M$  是闭折线  $A(n)$  的重心  $G$  就行了.

因为  $P, M, Q$  三点共线, 且  $\overline{PM} : \overline{MQ} = k : (n - k)$ , 所以有  $(n - k)\overline{PM} = k\overline{MQ}$ , 但由向量的减法知  $\overline{MQ} = \overline{PQ} - \overline{PM}$ , 代入上式, 经化简可得

$$n\overline{PM} = k\overline{PQ}.$$

又依题设, 点  $Q$  是  $A(n)$  关于点  $P$  的  $k$  号心, 所以  $\overline{PQ} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \overline{PA}_i$  (定义 2.1), 代入上式, 经整理就得

$$\overline{PM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overline{PA}_i.$$

这就表明点  $M$  是  $A(n)$  关于点  $P$  的  $n$  号心, 即为  $A(n)$  的重心. 命题得证.

特别的, 在这个定理中令  $A(n)$  内接于  $\odot O$  或外切于  $\odot I$ , 令  $P$  为圆心  $O$  或圆心  $I$ ,  $k = 1, 2$ , 可得

**推论 2.1** 圆内接闭折线  $A(n)$  的外心  $O$ , 重心  $G$ , 欧拉圆心  $E$ , 垂心  $H$ , 四点共线, 且  $OG : GE = 2 : (n - 2)$ ,  $OG : GH = 1 : (n - 1)$ .

**推论 2.2** 圆外切闭折线  $A(n)$  的内心  $I$ , 重心  $G$ , 斯俾克圆

心  $S$ , 奈格尔点  $N$  四点共线, 且  $IG : GS = 2 : (n - 2)$ ,  $IG : GN = 1 : (n - 1)$ .

显然, 在这两个推论中令  $n = 3$  是就得到 §1 中的定理 1.1 和定理 1.2, 由此可知, 定理 2.1 是定理 1.1 和定理 1.2 的统一推广.

**定理 2.2** 若同一平面内的两条闭折线  $A(n)$  和  $B(n)$  的重心重合, 则这两条闭折线关于任一定点  $P$  的  $k$  号心必定重合.

**证明** 设闭折线  $A(n)$  和  $B(n)$  的重心分别为  $G, G'$ , 这两条闭折线关于定点  $P$  的  $k$  号心分别为  $Q$  和  $Q'$ . 依题设, 点  $G$  与  $G'$  重合, 所以由定义 2.1 可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG} &= \overrightarrow{PG'} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PB}_i \\ &\Rightarrow \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA}_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PB}_i \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}.\end{aligned}$$

由这里的最后一个等式可知, 点  $Q$  和  $Q'$  重合. 命题得证.

特别的, 在这个定理中令  $A(n)$  和  $B(n)$  内接于同一个圆  $O$ , 或外切于同一个圆  $I$ , 且令原点  $P$  为圆心  $O$  或圆心  $I$ ,  $k = 1, 2$ , 可得

**推论 2.3** 若闭折线  $A(n)$  和  $B(n)$  内接于同一个圆, 且它们的重心互相重合, 则它们的垂心必重合, 欧拉圆心也重合.

**推论 2.4** 若闭折线  $A(n)$  和  $B(n)$  外切于同一个圆, 且它们的重心互相重合, 则它们的奈格尔点必重合, 斯俾克圆心也重合.

**例 2.1** 考察闭折线  $A(n)$  的四个顶点  $A_1, A_2, A_l, A_m$  ( $2 < l < m \leq n$ , 如图 2-5), 求证: 若  $\triangle A_1 A_l A_m$  和  $\triangle A_2 A_l A_m$  关于定点  $P$  的  $k$  号心分别为  $Q_1$  和  $Q_2$ , 则

$$Q_1 Q_2 \parallel A_1 A_2, \text{ 且 } |Q_1 Q_2| = \frac{1}{k} |A_1 A_2|.$$

**证明** 依题设,  $Q_1$  和  $Q_2$  分别是  $\triangle A_1 A_l A_m$  和  $\triangle A_2 A_l A_m$  关

于定点  $P$  的  $k$  号心,由定义 2.1 可知

$$\overrightarrow{PQ_1} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PA_l} + \overrightarrow{PA_m});$$

$$\overrightarrow{PQ_2} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PA_l} + \overrightarrow{PA_m});$$

$$\therefore \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{PQ_2} - \overrightarrow{PQ_1} =$$

$$\frac{1}{k}(\overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{PA_1}) = \frac{1}{k}\overrightarrow{A_1A_2}.$$

由此可知,  $Q_1Q_2 \parallel A_1A_2$ , 且

$$|Q_1Q_2| = \frac{1}{k}|A_1A_2|. \text{ 命题得证.}$$

显然,在这个例题中令  $A(n)$  内接于  $\odot O$ , 且令原点  $P$  为圆心  $O$ ,  $k=1, 2$ , 可得

命题 2.1 如果两个三角形有公共的底边, 且内接于同一个圆, 那么:

(1) 它们的垂心的连线, 平行且等于它们的顶点的连线;

(2) 它们的欧拉圆心的连线, 平行于它们的顶点的连线, 且等于后者的一半.

例 2.2 设五边形  $A_1A_2A_3A_4A_5$  内接于  $\odot O$ , 这五边形关于点  $O$  的  $k$  号心为  $Q$ , 三角形  $A_1A_2A_3$  关于点  $O$  的  $k$  号心为  $Q'$ , 求证:  $Q'Q \perp A_4A_5$ .

证明 依题设(图略), 由定义 2.1 可知

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^5 \overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OQ'} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^3 \overrightarrow{OA_i}.$$

$$\therefore \overrightarrow{Q'Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OQ'} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5}).$$

于是有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q'Q} \cdot \overrightarrow{A_4A_5} &= \frac{1}{k}(\overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5})(\overrightarrow{OA_5} - \overrightarrow{OA_4}) \\ &= \frac{1}{k}(OA_5^2 - OA_4^2). \end{aligned}$$

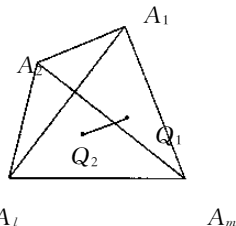


图 2-5

但顶点  $A_4$  和  $A_5$  都在  $\odot O$  上, 可知  $OA_4^2 = OA_5^2$ . 代入上式, 就得到  $\overrightarrow{O'Q} \cdot \overrightarrow{A_4A_5} = 0$ , 由此可知  $Q'Q \perp A_4A_5$ . 命题得证.

### § 3 $k$ 号心与原点的距离公式

由闭折线  $k$  号心的定义(即定义 2.1)可知,对于给定的闭折线  $A(n)$  来说,其  $k$  号心的位置由原点所确定.考察它们之间的距离,我们发现了如下结论:

定理 3.1 设闭折线  $A(n)$  关于原点  $P$  的  $k$  号心为  $Q$ , 则

$$QP^2 = \frac{1}{k^2} \left( n \sum_{i=1}^n PA_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 \right). \quad (3-1)$$

证明 由闭折线的“ $k$  号心的向量公式”可知

$$k \overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PA}_i,$$

此等式的两边分别平方,可得

$$k^2 \cdot QP^2 = \sum_{i=1}^n PA_i^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} \overrightarrow{PA}_i \cdot \overrightarrow{PA}_j \quad ①$$

又根据向量的减法有  $\overrightarrow{A_i A_j} = \overrightarrow{PA}_j - \overrightarrow{PA}_i$ , 所以有

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\overrightarrow{PA}_i - \overrightarrow{PA}_j)^2 \\ &= (n-1) \cdot \sum_{i=1}^n PA_i^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} \overrightarrow{PA}_i \cdot \overrightarrow{PA}_j. \quad ② \end{aligned}$$

将等式 ① 与 ② 的两边分别相加,可得

$$\begin{aligned} k^2 \cdot QP^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 &= n \sum_{i=1}^n PA_i^2, \\ \therefore QP^2 &= \frac{1}{k^2} \left( n \sum_{i=1}^n PA_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 \right). \end{aligned}$$

命题得证.

等式(3-1)称为闭折线的“ $k$  号心与原点的距离公式”.

在定理 3.1 中令  $k = n$ , 可得

定理 3.2 设  $G$  为闭折线  $A(n)$  的重心,  $P$  为原点, 则

$$GP^2 = \frac{1}{n^2} \left( n \sum_{i=1}^n PA_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 \right). \quad (3-2)$$

这个等式称为闭折线的“重心与原点的距离公式”。

在定理 3.1 中, 令  $A(n)$  内接于  $\odot O$  或外切于  $\odot I$ , 且令  $P$  为圆心  $O$  或圆心  $I$ , 又可得

定理 3.3 设闭折线  $A(n)$  内接于  $\odot(O, R)$ , 且  $A(n)$  关于点  $O$  的  $k$  号心为  $Q$ , 则

$$QO^2 = \frac{1}{k^2} \left( n^2 R^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 \right). \quad (3-3)$$

这个等式称为圆内接闭折线的“ $k$  号心与外心的距离公式”。

定理 3.4 设闭折线  $A(n)$  外切于  $\odot I$ , 且  $A(n)$  关于点  $I$  的  $k$  号心为  $Q$ , 则

$$QI^2 = \frac{1}{k^2} \left( n \sum_{i=1}^n IA_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 \right). \quad (3-4)$$

这个等式称为圆外切闭折线的“ $k$  号心与内心的距离公式”。

特别的, 在定理 3.3 和定理 3.4 中令  $k = 1, 2$ , 可得

推论 3.1 设闭折线  $A(n)$  内接于  $\odot(O, R)$ , 其垂心为  $H$ , 欧拉圆心为  $E$ , 则

$$(1) HO^2 = n^2 R^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2;$$

$$(2) EO^2 = \frac{1}{4} \left( n^2 R^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 \right).$$

推论 3.2 设闭折线  $A(n)$  外切于  $\odot I$ , 其奈格尔点为  $N$ , 斯俾克圆心为  $S$ , 则

$$(1) NI^2 = n \sum_{i=1}^n IA_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2;$$

$$(2) SI^2 = \frac{1}{4} \left( n \sum_{i=1}^n IA_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j^2 \right).$$