数海探幽

数与猜想

一首小牛写的《数的青春》的诗说：

从小时候就开始数了，
那缓缓流过你手臂的
　　稠密的阿拉伯数，
数到懂事，数到成熟，
还没有完全掌握数的含义。
为什么数字的海洋这般莫测？
像记忆和幻想，
永远背负着固执的谜。

如果不是古老的数字
　　焕发出青春的魅力，
我们会像原始人那样，
把石子拣回来，
进行简单的计数。
然而，历史已将一个个数字，
变幻成电子计算机的指令，
存贮智慧，存贮理想，
输出一丝丝生活的甜蜜。

你可曾知道，数海里蕴藏着无比瑰丽的世界，它像明珠，闪烁着奇异的光彩。笔者从五彩缤纷的明珠中，给你介绍几颗，让我们共同享受这甘美的“人类智慧之果”！

1

一颗难找的珍珠
——魅力无穷的完全数

在渺渺茫茫的数海中，蕴藏着许多迷人的数的珍珠，其中有一颗最难觅的千古珍稀“完全数”。

发现完全数的先驱

公元前 3 世纪时，古希腊数学家对数字情有独钟。他们在对数的因数分解中，发现了一些奇妙的性质，如有些数的真因数之和（包括 1）彼此相等，于是诞生了亲和数；而有些数的真因数之和（包括 1）居然等于自身，于是发现了完全数。

例如，6 的真因数有 1，2，3，真因数之和恰好等于 6 即 $1+2+3=6$。因此，6 是人们最先认识的完全数。

研究数字的先师毕达哥拉斯（Pythagoras，前 580？—前 501）发现 6 的真因数之和等于 6 后，十分感兴趣地说：“6 象征着完满的婚姻以及健康和美丽，因为它的部分是完整的，并且其和等于自身。”

历史上最早有文字记载完全数的是古希腊哲学家柏拉图（Plato，前 430—前 349）在他的《共和国》一书中提出了完全数的概念。

约公元前 300 年，几何大师欧几里得（Euclid），在他的巨著《几何原本》中有这样一段话：“在自然数中，

恰好等于其全部真因子（包括 1）的数叫完全数。”(与柏拉图提出的概念一样）他并且在第九章最后一个命题首次给出了寻找完全数的方法，被誉为欧几里得定理：“如果 2^n-1 是一个素数①，那么自然数 $2^{n-1}(2^n-1)$ 一定是一个完全数。”并给出了证明。②

公元 1 世纪，毕达哥拉斯学派成员、古希腊著名数学家尼可马修斯（Nichomacius）在他的数论专著《算术入门》一书中，正确的给出了 6，28，496，8128 这四个完全数，并且通俗地复述了欧几里得寻找完全数的定理及其证明。由于完全数少之又少，且有趣味，曾使他感慨地赞叹道：“奇迹发生了，世界上善和美寥寥可数，恶和丑的东西却比比皆是。自然数中遍布着杂乱无章的盈数和亏数，完全数却以它特有的性质熠熠发光，珍奇而稀少。”他在此将自然数划分为三类：盈数、亏数和完全数，其意义分别是大于、小于和等于所有真因数之和。

千年跨一步

完全数先在古希腊诞生以后，吸引着众多数学家和数学爱好者像淘金般去寻找。可是，自然数浩如烟海，完全数又如沧海一粟，在茫茫一片的数海中捞针，寻找这稀有的“数字之珠”，一代又一代人付出了无数的心血，第五个完全数还是没有露面。

① 大于 1 的自然数，如果只能被 1 与自身整除，这样的数称为素数，也可称为质数。

② 证明十分简单，若 2^n-1 是素数，则 $2^{n-1}(2^n-1)$真因数之和为 $(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})+[(2^n-1)+2(2^n-1)+2^2(2^n-1)+\cdots\cdots+2^{n-2}(2^n-1)]=(2^n-1)+(2^{n-1}-1)(2^n-1)$(据等比数列)$=(2^n-1)\cdot(1+2^{n-1}-1)=2^{n-1}(2^n-1)$。根据完全数定义获证

古代科学发展非常缓慢，长期停滞不前。在尼可马修斯以后，由于欧洲不断进行战争，希腊、罗马科学逐渐衰退。在群雄割据，烽火连天，陷于一片混乱下，一些优秀的科学家带着他们的成果和智慧纷纷逃往阿拉伯、印度、意大利等地，“凤凰台上凤凰游，凤去台空江自流”。从此，希腊、罗马文明一蹶不振。接着中世纪的欧洲又处在黑暗时期，科学园地一片荒芜，人们又经历了一千多年的探索，仍无进展。

直到 1202 年才出现一线曙光，意大利的斐波那契(L. Fibonacci，1170？—1250)，青年时随父游历古代文明的希腊、埃及、阿拉伯等地区，学到了不少数学知识。他才华横溢，回国后潜心研究所搜集到的数学，写出了名著《算盘书》，成为 13 世纪在欧洲传播东方文化、系统将东方数学介绍到西方的第一个人，并且成为西方文艺复兴前的数学启明星。斐波那契慧眼识珠，没有放过完全数的研究，他经过推算，宣布找到了一个寻找完全数的有效法则，可惜没有人产生共鸣，成为过眼烟云。

光阴似箭，1460 年，正当人们迷惘之际，有人偶然发现在一位无名氏的手稿中，竟神秘地给出了第五个完全数 33550336，比起第四个完全数 8128 大了 4000 多倍。跨度如此之大，在计算落后的古代可想发现者之艰辛了。但是，手稿里没有说明他用什么方法得到的，作者也没有公布自己的姓名，这更使人迷惑不解了。

当时的欧洲，有一种风气，发现惊人的结果不愿公布姓名，一方面是为了增加问题的神秘感；另一方面是怕暴露身份，引来是非。当时科学水平不高，要找出著作的不足是一点也不费力的。

发现不是一帆风顺

在无名氏千年跨出一步的成果鼓励下，15 世纪至 19 世纪是研究完全数不平凡的日子，其中 17 世纪出现了小高潮。许多数学家扬起生命的风帆在黑暗中颠簸，幸好命运之神的匣子里不全是失败与错误，它还有成功与希望，伴随着一代又一代的人生搏击，朝着阳光灿烂的目标迈进。

16 世纪意大利数学家塔尔塔利亚（N. Tartaglia，1499? —1557)，小时曾被法国入侵者伤及口舌，落下了口吃的疾病（“塔尔塔利亚”意大利语就是“结巴”的意思），后来靠自学成为一位著名数学家。他研究发现：当 $n=2$ 和 $n=3$ 至 39 的奇数时，$2^{n-1}(2^n-1)$ 是完全数。

17 世纪“神数术”大师庞格斯（Pongers）在一本洋洋 700 页的巨著《数的玄学》中，一口气列出了 28 个所谓“完全数”，他是在塔尔塔利亚给出的 20 个的基础上补充了 8 个。可惜两人都没有给出证明和运算过程，后人发现其中有许多是错误的。

1603 年，数学家克特迪历尽艰辛，终于证明了无名氏手稿中第五个完全数是正确的，同时他还正确地发现了第六个和第七个完全数 $2^{16}(2^{17}-1)$ 和 $2^{18}(2^{19}-1)$，但他又错误地认为 $2^{22}(2^{23}-1)$、$2^{28}(2^{29}-1)$ 和 $2^{36}(2^{37}-1)$ 也是完全数。这三个数后来被大数学家费马（Fermat，1601—1665)和欧拉(L. Euler，1707—1783）先后否定了。

1644 年，法国神甫兼大数学家梅森（M. Mersenne，1588—1648）指出，庞格斯给出的 28 个“完全数”中，只有 8 个是正确的，即当 $n=2$，3，5，7，13，17，19，

31 时，$2^{n-1}(2^n-1)$ 是完全数，同时他又发现第九、十、十一个完全数，即 $n=67$、127 和 257。在未证明的情况下他武断地说：当 $n\leqslant 257$ 时，只有这 11 个完全数。这就是著名的“梅森猜测”，其中形如“2^n-1”的素数被誉为“梅森素数”。

“梅森猜想”吸引了许多人的研究，哥德巴赫认为是对的；微积分发现者之一的德国人莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716）也认为是对的。他们低估了完全数的难度，结果屡屡出错，致使“梅森猜测”统治了 200 多年。

1730 年，被称为世界四大数学家雄狮之一的欧拉，时年 23 岁，正值风华茂盛。他出手不凡，给出了一个出色的定理：“每一个偶完全数都是形如 $2^{n-1}(2^n-1)$ 的自然数，其中 n 是素数，2^n-1 也是素数”，并且给出了他一直没有发表的证明。这是欧几里得定理的逆定理。

有了欧几里得与欧拉两个互逆定理，公式 $2^{n-1}(2^n-1)$ 成为判断一个偶数是不是完全数的充要条件了。

欧拉研究“梅森猜测”后指出：“我冒险断言：每一个小于 50 的素数，甚至小于 100 的素数使 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是完全数的仅有 n 取 2，3，5，7，13，17，19，31，41，47 共 10 个，我从一个优美的定理出发得到了这些结果，我自信它们具有真实性。”

42 年后的 1772 年，欧拉因过度拼命研究数学双目已经失明了，但他仍未停止研究，他在致瑞士数学家丹尼尔（B. Daniel，1700—1782）的一封信中说：“我已经心算证明 $n=31$ 时，$2^{30}(2^{31}-1)$ 是第 8 个完全数。”同时他发现他过去说 $n=41$ 和 $n=47$ 时是完全数是错

误的。

欧拉定理和他发现的第 8 个完全数的方法，使完全数的研究发生了深刻变化，可是，人们仍不能彻底解决“梅森猜测”。

232 年后的 1876 年，法国数学家吕卡（F. Lucas）创立了一种检验素数的新方法，证明 $n=127$ 时确实是一个完全数，这使“梅森猜测”之一变成事实。吕卡的新方法给研究完全数者带来生机，同时也动摇了“梅森猜测”。因数学家借助他的方法发现猜测中 $n=67$，$n=257$ 不是完全数，从此拉开了最后攻克“梅森猜测”的序幕。

在以后 1883—1931 年的 48 年间，数学家发现“梅森猜测”中 $n \leqslant 257$ 范围内漏掉了 $n=61$、89、107 时三个完全数。

至此，人们前赴后继，不断另辟新路径，创造新方法，利用笔算纸录，耗时二千多年，只找到 12 个完全数，即 $n=2$，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127 时，$2^{n-1}(2^n-1)$ 是完全数。

稀奇古怪的传说

解析几何学发现者之一，法国数学家笛卡尔（R. Descartes，1596—1650），在科学挚友梅森的要求下，也曾“下海”去寻找完全数这颗珍珠，聪明的笛卡尔经过努力失败了，认为要多找出一个完全数实非易举，他公开预言：“能找出完全数是不会多的，好比人类一样，要找出完美的人亦非易事。”

历史证实了他的预言。

从 1946 年以后，人们开始用计算机发现完全数。

我们容易看到，前面所讲的完全数都是偶数，后人称之为“偶完全数”。根据欧几里得与欧拉两个互逆定理，找到一个 2^n-1 型素数,即找到一个偶完全数,而 2^n-1 型素数恰好为梅森素数。至此人们终于发现：偶完全数与梅森素数一一对应着。这就是说，发现一个梅森素数，即相当于找到一个偶完全数，反之成立。

由此，人们至 1998 年 1月止，至少已找到 37 个梅森素数（见本章第三节）。如此一来，人类至少也已找到 37 个偶完全数。第 37 个完全数是 $n=3021377$ 时，$2^{3021376}(2^{3021377}-1)$ 是完全数，它有 909526 位。

从公元前到 1946 年间，历时二千多年，用笔算共找到 12个完全数，约平均 200 年才找到一个；1952 年至 1998 年用计算机，历时 46 年共找到 25 个，约平均二年找到 1个。因计算机功能与数学方法不够，至今还没有结束这项工作。

由于完全数稀少，“物稀为贵”，极难找到，被一些人编出了许多美丽动人的传说，其中还带上迷信色彩。

例如，中世纪《圣经·创世纪》的注释者，在开篇中记载：“上帝造物之始，第一天传播光明，第二天创造空气，第三天聚水成海，第四天日月经天，第五天游鱼飞雀，第六天塑造人类与走兽。这时，上帝完成了创造世界，开始了第七天的休息。”他们通过神学家的口说：“上帝 6 天创造了世界，所以 6 是最神圣、最理想、最完全的数。’直到 19 世纪，意大利还把数字 6 比作维纳斯，喻为美的象征。

对于完全数 28，《圣经》的注释者又说：“上帝创造的月亮周而复始一轮是 28 天，而 28 恰是第二个完

全数。”

甚至神学家荒诞地说：在洪水淹没世界之后，上帝第二次创造世界时，诺亚方舟上救得的是 8 个神灵下凡的人，而不是 6 个，因 8 是亏数 $(8>1+2+4)$，因此，世界是个混乱的。

这些注释是十分荒唐的，中世纪著名学者奥古斯丁曾风趣地说：“6 是个自身完美的，并非鬼使神差”，至于 28 与日月周期的关系，更是牵强附会，因为月球绕地球运行一周只用了 27.3 天，因此，这些美丽的传说与评注，只能解释为局外人对有趣的完全数的厚爱与崇拜。

迷人的性质和待揭之谜

完全数是数而不是神，它有许多迷人的性质，例如：

(1) 每一个完全数都可以写成连续自然数之和，如 1952 年数学家发现：$6=1+2+3$；$28=1+2+3+4+5+6+7$；$496=1+2+3+\cdots\cdots+31$；$8128=1+2+3+\cdots+127$

(2) 除 6 外，完全数可以表示成连续奇数的立方和，如：$28=1^3+3^3$；$496=1^3+3^3+5^3+7^3$；$8128=1^3+3^3+5^3+7^3+11^3+13^3+15^3$

(3) 每一个完全数，它所有的因数的倒数和都等于 2，如 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$；$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$；$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=2$。

完全数都是偶数，人们不禁要问，存不存在奇完全数？

1633 年 11 月，法国数学家笛卡尔给梅森一封信中

首次开创奇完全数的研究，他认为每一奇完全数必具有 pq^2 的形式,其中 p 是素数。声称不久他会找到，可是不仅直到他死时未能找到，而且至今没有任何一个数学家发现一个奇完全数，它成为世界数论又一大难题。至今，谁也不知道它们是否存在，也没有人证明过它们不可能存在。但经过一代又一代数学家研究计算，有一点是明确的，那就是如果存在一个奇完全数的话，那么它一定是非常大的。

有多大呢？远的不说，当代大数学家奥尔（Ore）检查过 10^{18}以下自然数没有一个奇完全数； 1967 年，塔克曼宣布，如果奇完全数存在，它必须大于 10^{36} ,这是一个 37 位数；1972 年，有人证明它必大于 10^{50}；1982 年，有人证明，它必须大于 10^{100}……这种难于捉摸的奇完全数也许可能有，但它实在太大，以至超出了人们能够用计算机计算的范围了。

对奇完全数是否存在，就急忙产生如此多的估计，也许是数学界的一大奇闻！

完全数至今还有许多待揭之谜，如完全数之间有什么关系；完全数是有限还是无穷多个？奇完全数存在吗？除 6 外，把一个完全数的各位数字加起来得到一个数，再把这个数的各位数字加起来，又得到一个数，一直这样做下去，结果一定是 1，对吗？如 $28\Rightarrow2+8=10\Rightarrow1+0=1$; $496\Rightarrow4+9+6=19\Rightarrow1+9=10\Rightarrow1+0=1$ 等等。

以上这些问题，与数学难题一样，有待人们去攻克。尽管我们现在还看不到完全数的实际用处，但它反映了自然数的某些规律。探索自然数规律，揭开科学上的未知之谜，正是科学追求的目标。

2

看似平凡最崎岖
——艰辛寻找亲和数

人和人之间讲友情，有趣的是，数与数之间也有相类似的关系，数学家把一对存在特殊关系的数称为“亲和数,,。如 220 的所有真因数 1、2、4、5、10 11、20、22、44、55、110 ,其和是 284；而 284 的所有真因数 1、2、4、71、142 ，其和又恰是 220，像这样的两个自然数称之为一对“亲和数”。

常言道，知音难觅，寻找亲和数更使数学家绞尽了脑汁。亲和数是数论王国中的一朵小花，它有漫长的发现历史和美丽动人的传说。

第一对亲和数

故事还需从公元前 5 世纪的毕达哥拉斯学派说起。毕氏学派视数为世界万物的本源，提出“万物皆数”的名言。正如毕氏的弟子菲罗芬斯断言：“如果没有数和数的性质，世界上任何事物本身或其与别的事物的关系都不能为人所清楚了解……”他们还把数加以人性化，如说奇数象征男性，起名“男人数”；偶数象征女性，叫“女人数”（也有史书记载，把奇数象征女性，偶数象征男性）;数 5 是第一个男人数与第一个女人数之和，故“5”表示结婚或联合；数“6”则象征完满的婚姻以及健

康和美丽。他们又把世间的一切事物用数来表示，即把数加以事物化，如“1”代表“同一”，“2”代表“对立”或“意见”，“3”代表“实在”，“9”代表“正义”，“10’，代表“理性”或“完满”等等。

相传，有一次毕氏学派的成员在一起讨论“万物皆数”的一个问题：“数对于万物有什么作用？”讨论十分热烈。一位门徒问道：“我结交朋友时，存在着数的作用吗？”毕氏果断地回答说：“朋友是你的灵魂的倩影，要像 220 和 284 一样亲密。”又说：“什么叫朋友？就像这两个数，一个是你，另一个是我。”后来毕氏解释说，人与人之间讲友谊，数与数之间也有“相亲相爱”的。从此，人们便把 220 与 284 叫做“亲和数”或“友数”、“相亲数”。这就是“亲和数”来源的传说。

古欧洲人推崇亲和数，赋予其种种神秘色彩，《圣经·创世纪》第 32 章 14 节中写道：“人类的始祖雅各曾送给他哥哥伊绍 200 只母山羊，20 只公山羊和 200 只母绵羊，20 只公绵羊，以表达他内心的深情。”山、绵羊数之和各是 220，其中隐含着它的亲和数 284，以体现送礼和受礼人之间的亲密。这又是一种表示友好的吉祥传说。

传说不足为据，可供旁证。在数学历史上，有文字记载的第一对亲和数就是 220 和 284。它最早出现在公元 320 年左右一位有影响的新柏拉图哲学家伊安布利库斯（Iamblichus 的书中，他是在对希腊数学家、毕氏学派成员尼可马修斯的《算术入门》一书的注释中首次记载的。这是远古时期数学家发现惟一的一对亲和数。亲和数概念的发现，归功于毕氏学派。

二千多年跨出一步

毕氏学派发现第一对亲和数以后的 1500 年间，凡涉足探寻亲和数的数学家，都深感难度迷津，面对茫茫的数海难以大海捞针。经过一代又一代人的穷思皓首，却没有收获。第二对亲和数你在哪里？

公元 9世纪，酷爱数学的伊拉克哲学、医学、天文学和物理学家泰比特 · 依本 · 库拉(Tabite Yiben Kula，836—901）凝神苦索，提出了一个求亲和数的法则：

设形如 $p = 3 \cdot 2^n - 1, q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ 的三个数是素数，则 $2^n pq$ 和 $2^n r$ 是一对亲和数（$n > 1$ 的正整数）。

这位生活在《天方夜谭》故乡的科学家所发现的公式，因繁杂，难以实际操作，尤其是 n 很大时，无法运算或辨其真伪，所以它并没有给人们带来希望或者走出困境。数学家花几百年时间仍没有找到第二对亲和数。

到 16 世纪，甚至有人认为自然数王国里，就仅有这一对独苗苗了。一些无聊之士，过分偏爱这对亲和数，视为珍宝，借机给它抹上一层迷信色彩，增添神秘感，大谈其魅力之深，作用之大，编出了许许多多神话故事。如说是用亲和数可以预测婚姻大事，两人佩带写上这两个数护身符的人，必将保持良好的友谊，还宣传这对亲和数在魔术、法术、占星术和占卦上都起着重要作用等等。

历史的时针转到 17 世纪，距第一对亲和数诞生 2000 多年之后，法国数学家重新点燃寻找亲和数的火炬，他们经过穷思猛算，在黑暗中找到光明，在绝路中得以复生，终于在数海中捞出两枚“金针”，迸发出两束

夺目的火花。1636年，法国“业余数学家之王”费马向世人宣布，他找到了第二对亲和数17296和18416。两年后，法国“解析几何之父”笛卡尔于1638年3月31日也宣布找到了第三对亲和数9437056和9363584。

费马和笛卡尔越过一座座高山峻岭，跨过一个个礁石险滩，以极顽强的精神，坚持不懈，进行了大量冗长乏味的计算，终于跨出了极为重要的一大步，在两年的时间内，他俩打破了2000多年的沉寂。给平静的世界数坛，投下了两颗不大不小的“石头”，激起了数学界重新寻找亲和数的层层波澜。

历史的宏篇，艰难地翻动了一页又一页，在17世纪以后的岁月，许多数学家绞尽脑汁，投身到寻找新的亲和数的行列。他们殚思极虑，企图用灵感与枯燥的计算发现新大陆，他们磨秃了一枝又一枝的笔，结果是“上穷碧落下黄泉，两处茫茫皆不见”(白居易诗)。这时，数学家才省悟到他们已经陷入了数学迷宫，恐怕很难再出现法国人的辉煌了。

一鸣惊人的欧拉

正当数学家陷入数学迷宫不能自拔的百余年之后的1747年，年仅39岁的瑞士著名应用数学大师、博学多产的欧拉突然向全世界宣布：他一口气找到了30对亲和数，后来又扩展到60对，不仅列出了亲和数的数表，而且还公布了全部运算过程。

欧拉的方法与众不同，他将亲和数划分为五种类型加以讨论。例如第一类是寻找形如 apq, ar 的亲和数对，这里 p、q、r 是不能整除 a 的互异素数，$a = 2^n$，他用试的

方法讨论了 $2^2\times5\times11=220$，$2^2\times71=284$，得到了第一对亲和数，依此又分别讨论其他情况，在第一类型里经过计算一共得到了 11 对亲和数。

欧拉超人的数学思维，不仅发现几十对亲和数，在后来的 1766 年在他双目失明以后，还心算找到困扰数坛百年很难寻觅的一个梅森素数。引起人们对欧拉超人的计算技巧刮目相看。法国物理学家阿拉哥（Arago）赞誉地说：“欧拉进行复杂的演算不费吹灰之力，就像常人进行呼吸，或如雄鹰翱翔于天空那样轻松自如。”

欧拉发现的亲和数，解开了令人止步 2000 多年的难题，使数学家惊喜叫绝，无人与他争雄。可是，由于方法与工具受限，人们却难以一个一个地验算核对，只好将信将疑：“试玉要烧三日满，辨材须待七年期”（白居易诗）。

时间又过了 120 年，到 1867 年，意大利有一个爱动脑筋，勤于计算的 16 岁的中学生白格黑尼（Pagahini），初生牛犊不怕虎，运用欧拉的方法也不停地算呀算呀，竟然发现了数学大师欧拉的疏漏，把大师眼皮下溜走的一对较小的亲和数 1184 和 1210 捉住了。这戏剧性的发现使数学家如痴如醉，致使有人叹道：神奇绝妙的亲和数呀，你这个精灵，怎么同数学大师欧拉开玩笑？这只证明智者千虑，必有一失，何况科海茫茫，学无止境，玉有瑕疵也斑斓。

时光在流失的半个多世纪里，数学家在前人的基础上更新方法，陆陆续续又找到了许多对新的亲和数。到 1923 年，数学家麦达其（Madachg）和叶维勒（Elvinlee）汇总前人研究成果与自己研究所得，发表了 1095 对亲和数，其中最大的数有 25 位。同年，另一个荷

兰数学家里勒（Riele）找到了一对有 152 位的亲和数。

随着时间的推移，人们靠笔算很难像欧拉那样一鸣惊人地发现众多的亲和数，随着数位越来越大，发现的亲和数也越来越少。此时有数学家推测：若一对亲和数的数值愈大，则这两个数之比愈接近于 1，这是否是规律，人们企盼着胜利的喜讯。

看似平凡最崎岖

1946 年，第一台计算机诞生以来，结束了笔算寻找亲和数的历史。据 70 年代统计，人们共找到 1200 多对亲和数，并且，有人还曾有序不漏地用计算机检验与搜寻亲和数，它的基本方法比较简单：对于每一个自然数 n ，先用计算机确定它的所有真因数及它们的和 m ；然后对 m 施行同样的运算，若经过这一运算后回到原来的数 n ，则找到一对亲和数 n 和 m 。例如近 10 年来，美国数学家在耶鲁大学先进的计算机上，对所有 100 万以下的数逐一进行了检验，总共找到了 42 对亲和数，发现 10 万以下的仅有 13 对，如 220 与 284，1184 与 1210，…… 79750 与 88730。部分地消除了对欧拉等人列出的亲和数数表的疑虑。但因计算机功能与数学方法的不足，对亲和数的寻找还没有重大突破，越往下难度更大。但是，数学家与计算机专家寻觅知音的苦楚有胜于终日推演的艰辛，正如我国一首古诗所表达的情怀：

一弹再三叹，
慷慨有余音。
不惜歌者苦，
但伤知音稀。