

第一章 静电场的基本规律

§ 1.1 电 荷

大家知道，用丝绢或毛皮摩擦过的玻璃、塑料、硬橡胶等都能吸引轻小物体，这表明它们在摩擦后进入一种特别的状态。我们把处于这种状态的物体叫做带电体，并说它们带有电荷^①。大量实验表明，自然界的电荷只有两种，一种与丝绢摩擦过的玻璃棒的电荷相同，叫正电荷；另一种与毛皮摩擦过的橡胶棒的电荷相同，叫负电荷 [正负电荷的称谓是由富兰克林 (Franklin) 提出的]。同种电荷间有斥力，异种电荷间有吸力。

利用同性相斥的现象可以制成验电器 (图 1-1)，它是检验物体是否带电的最简单的仪器。验电器的主要部分是一根上端带有金属小球的金属棒，棒的下端悬挂着两片金属箔片。当带电体与金属小球接触时，金属箔便得到同种电荷并张开。为了避免气流的影响，金属棒和箔片被封闭在一个玻璃瓶中。

验电器的工作表明电荷可以从金属棒的一端移至另一端。但并非所有物体都允许电荷流动。允许电荷流动的物体叫导体，不允许电荷流动的物体叫绝缘体或电介质 (绝缘介质)。干燥的玻璃、橡胶、塑料、陶瓷等是良好的绝缘体，而金属、石墨和酸、碱、盐的水溶液 (统称电解液) 则是良好的导体。人体、墙壁和地球也是导体，但导电性不如金属。干燥且未被电离的气体是绝缘体，但被电离的气体却是导体。此外，还有一种导电性介于导体与绝缘体之间而且电性质非常特殊的材料 (例如锗和硅)，叫做半导体。半导体是近代电子技术中的重要材料。



图 1-1 验电器

利用物质的微观结构可对物体的带电以及不同物体具有不同的导电性作出解释。物体由微观粒子 (主要是质子、中子和电子) 构成。电子

带电体是指处于带电状态的物体，电是物体 (包括带电粒子) 的一种属性，但习惯上也常把带电体本身称为电荷。类似的情况很多，例如把“电容器”称为“电容”，今后不再一一指出。

半导体与导体、绝缘体的区别其实远不只是“导电性介于两者之间”这么简单，见小节 5.5.5 小字。

带负电荷，质子带有与电子电荷等值反号的正电荷。当物体由于某种原因获得（失去）某些电子时便处于带电状态。金属之所以导电，是因为内部存在许多自由电子，它们可以摆脱原子核的束缚而自由地在金属内部运动。电解液之所以导电，是因为内部存在许多能作宏观运动的正、负离子。反之，在绝缘体内部，由于电子受到原子核的束缚，基本上没有自由电子，因此呈绝缘性质。

大量实验证明，在一个与外界没有电荷交换的系统内（最大的系统就是整个宇宙），正负电荷的代数和在任何物理过程中始终保持不变，这叫做电荷守恒定律，它反映电荷的一种重要特性，是物理学的重要规律之一。

电荷的另一重要特性是它的量子化，即任何带电体的电荷都只能是某一基本单位的整数倍。这个基本单位就是质子所带的电荷，叫做元电荷，通常记作 e 。

用绳子悬挂着重物虽受重力却没有加速度，是因为绳子对它的张力（拉力）与重力抵消。张力本质上是什么？重物在重力作用下有向下加速的倾向，使绳子被稍微拉长。粗略地说，绳内任意两个上下相邻的原子的距离略有增大，它们的外围电子之间的斥力略有减弱，相当于出现一种使绳子恢复原长的宏观力，这就是张力。可见张力不外是微观电荷之间的电磁力的某种宏观表现。原子与原子之所以可结合为稳定的分子（以及分子与分子可结合为稳定的物体），也是由于原子内部电荷的微观分布状态使原子之间产生电磁吸力。

两个静止质子之间既有静电斥力又有万有引力。哪个大？大多少？利用万有引力定律和库仑定律不难求得 $F_{引}/F_{电} = 10^{-36}$ ，这暗示引力比电磁力通常要弱得多。然而这并不意味着引力与电磁力相比总可被忽略，关键在于电荷有正负两种，它们的效应相互抵消，而任何粒子之间的万有引力都是吸力（或说“引力荷”只有一种），因此它们倾向于积聚到一起，效应互相加强。“团结就是力量”，其后果便是大型物体周围出现强引力场。反之，由于同性相斥，同种电荷却难于积聚在一起而产生强电场。例如，虽然太阳有大量质子，但也有同样数量的电子，于是呈电中性。地球亦然。假定太阳及地球的电子数比质子数多出仅 10^{-18} 倍，即假定 $(\Delta N/N)_{地} = (\Delta N/N)_{太} = 10^{-18}$ 其中 N 代表电子数， ΔN 代表电子数减质子数，则地地间的电斥力将等于万有引力，地球绕太阳的公转将不可能！（请读者证明这一结论。提示：从质子间的 $F_{引}/F_{电} = 10^{-36}$ 出发的证明较简单。）可否存在一种只有质子和中子而没有（或很少）电子的星体？不可能，因为质子之间同性相斥。事实上，在天体物理的许多对象（例如恒星、星系和星系团）中，万有引力起主导作用，而电磁力则“退居二线”。

既然原子核由质子和中子组成，质子之间的静电斥力为什么不使质子四散分飞呢？这是因为你已进入微观领域，在微观领域中除电磁力和引力外还有其他力。在原子核内部，核子之间存在一种很强的力，称为核力（又称强力，即强相互作用力），其特点是：（1）力程甚短，约仅为 10^{-15} m，超过此范围强力将急剧减小，实际上消失（请注意电磁力和引力的力程都是无限长）；（2）非常强，比电磁力还大两个量级 [特点（1）和（2）使强力“不鸣则已，一鸣惊人”]；（3）与核子是否带电无关（质子与质子之间的强力等于质子与中子或中子与中子之间的强力）。因为力程如此之短，强力在宏观现象中自然不起作用，但在核内部却可克服质子间的电斥力从而使核得以“团结”为一个稳定的集体。但是，如果核子太多（例如铀有 92 个质子，加上中子共有 235 个核子），核的尺寸太大，靠强力维系的平衡就比较脆弱，一旦被一个慢中子撞

击就要一分为二(裂变),放出“核能”(这正是原子弹释放能量的机制),但其实它不过是电力足以战胜核力而使核子分散开所释放出的电能.除强力外,还有一种微观力叫弱力,其力程更短(约为 10^{-17} m),强度大约只有强力的 10^{-13} 倍,它弱到无法像强力那样把基本粒子束缚为一个系统,但却很重要,主要表现在支配某些粒子的衰变和俘获现象中(例如中子的 β 衰变).

总之,目前认为自然界中的基本相互作用只有4种,按强度排列为:强力,电磁力,弱力,引力.引力虽然最弱,但因为强、弱力都无宏观表现,而电力又常因正负相消而不起作用,所以引力在涉及天体和宇宙的问题中往往会起主导作用.反之,在微观领域内引力则因为太弱而总可忽略.电磁力是惟一既有宏观又有微观表现的、“身兼二职”的力.我们的生活起居、工作学习都无不与电磁力存在密不可分的关系.

电磁学的重要性还远不止此.事实上,电磁理论对近代理论物理的发展曾不止一次地起过难以估量的启发和推动作用.例如,对几种相互作用的统一起着关键性作用的规范场论就是杨振宁和米尔斯(Mills)从电磁理论获得启发而创立的,电磁场理论是最简单的规范场论.

认识电荷量子化的最早实验是美国物理学家密立根(Millikan)的著名的油滴实验(1909),他因此(以及对光电效应的实验验证)获得1923年度的诺贝尔物理学奖.电荷量子化具有深刻的物理内涵,同许多深刻的近代物理问题都有关系.人们至今仍不知道如何解释这一事实.然而,狄拉克(Dirac)于1931年提出并证明,如果存在磁单极子,则电荷必然是量子化的.传统的电磁理论认为磁单极不存在(磁铁总有两极,而且摔成两段后每段仍有两极).狄拉克的诱人设想就像磁石吸铁般地吸引了许多物理学家通过实验探寻磁单极.1982年有人在美国斯坦福(Stanford)大学宣称测到磁单极并一度引起轰动,然而后来未能取得公认.应该说磁单极的实验存在性至今仍无定论.与电荷量子化有关的另一问题是盖尔曼(Gell-Mann)在1963年提出的夸克模型.这一理论认为质子和中子都有内部结构:它们都由更为基本的粒子——带有分数电荷($\pm e/3$ 或 $\pm 2e/3$)的夸克组成.这一模型已被普遍接受.然而实验至今未能观测到自由夸克,因此人们认为夸克是受到“禁闭”的.

§ 1.2 库仑定律

1.2.1 库仑定律

观察表明,两个静止的带电体之间的静电力除与电荷的数量及相对位置有关外,还依赖于带电体的大小、形状及电荷的分布情况.要用实验直接确立所有这些因素对静电力的影响是困难的.但是,如果带电体的线度比带电体之间的距离小得多,问题就会大为简化.满足这个条件的带电体叫做点带电体或点电荷^①.点电荷的概念类似于力学中质点的概念.带电体能否被看作点电荷,不仅

带电体与电荷是不同概念,前者是指带电的物体(或粒子),后者是指物体的某种属性.但习惯上把两者都称为电荷(点带电体更是普遍地称为点电荷).为了定量地研究带电的数量,需要把电荷定义为一个物理量,过去长期称之为电量,现在把这物理量也统称为电荷.

取决于本身的大小，而且取决于它们之间的距离。例如两个半径为 1 cm 的带电球当球心距离为 100 m 时可相当精确地被看作点电荷；当球心距离为 3 cm 时再看作点电荷就会带来很大误差，但是，究竟带电体的线度比距离小多少才能被看作点电荷（就是说，怎样的误差才可被忽略），却没有一个绝对的标准，它取决于讨论问题时所要求的精确程度。带电体一旦被看作点电荷，就可用一个几何点标志它的位置，两个点电荷的距离就是标志它们的位置的两个几何点之间的距离。

相对于惯性系静止的两个点电荷间的静电力服从的规律叫做库仑定律，包括如下两个内容：

(1) 大小相等方向相反，并且沿着它们的连线；同号电荷相斥，异号电荷相吸。

(2) 大小与各自的电荷 q_1 及 q_2 成正比与距离 r 的平方成反比即

$$k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1-1)$$

其中 k 是比例常量，依赖于各量单位的选取。

库仑定律是法国科学家库仑 (Coulomb) 在 1785 年确立的。他注意到电荷之间的静电力与万有引力有许多类似之处，大胆地假设静电力的规律与万有引力定律有类似的形式，如式 (1-1)。为了证实这一假设，他精心设计了一些实验，其中主要的一个是研究同性电荷相互作用力的“扭秤实验”。扭秤的结构如图 1-2。在银质悬丝下端挂一横杆，杆的一端有一小球 A，另一端有一平衡物 P。A 的旁边还有一固定小球 B。令 A、B 带同性电荷，A 便因 B 的斥力而转开，直至银丝的扭力矩与 A 所受的静电力矩平衡为止。设此时 A、B 的距离为 r 。若沿相反方向转动秤头使银丝扭角增大，球 A 便会重新向 B 靠近。令 A、B 间的距离稳定于 $r/2$ 。读出秤头的转角便不难推知银丝此时的扭角（见小字部分）。库仑发现这个扭角等于当两球相距为 r 时的银丝扭角的 4 倍。注意到扭力矩与扭角成正比以及两球电荷并无变化，便知静电力与距离的平方成反比。

由于银丝下悬横杆，上连秤头，其扭角应由横杆转角及秤头转角共同决定。设横杆转角为 α ，秤头（沿反向）转角为 β （图 1-3）则银丝扭角 $\varphi = \alpha + \beta$ 。 α 及 β 可分别

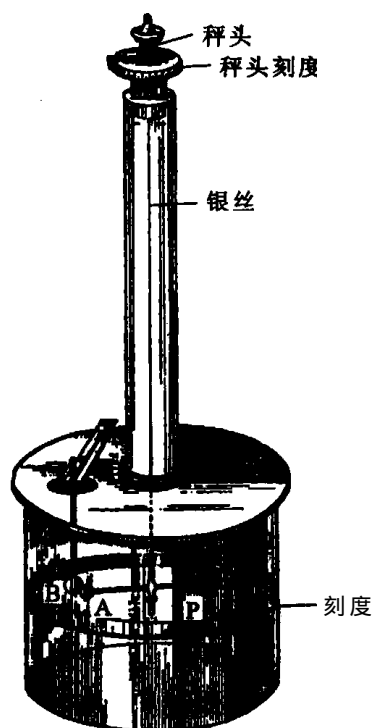


图 1-2 库仑扭秤

由玻璃圆筒及秤头上的刻度读出. 库仑报告了如下一组 (三个) 实验数据 (见表 1-1). 实验 (1): 在 $\beta=0$ 时令球 A、B 带电, A 便因 B 的斥力而转开, 测得平衡时 $\alpha=36^\circ$. 实验 (2) 转动秤头使 $\beta=126^\circ$ 横杆便随之转动, 测得平衡时 $\alpha=18^\circ$. 实验 (3) 再次转动秤头使 $\beta=567^\circ$ 测得平衡时 $\alpha=8.5^\circ$. 这些数据表明斥力与距离的平方成反比. 例如, 从实验 (1) 到实验 (2), A、B 间的夹角减至一半 ($18^\circ/36^\circ=1/2$) 故距离减至一半 (近似认为距离与夹角成正比) 而银丝扭角 φ 增至 4 倍 ($144^\circ/36^\circ=4$) 说明扭力矩增至 2^2 倍.

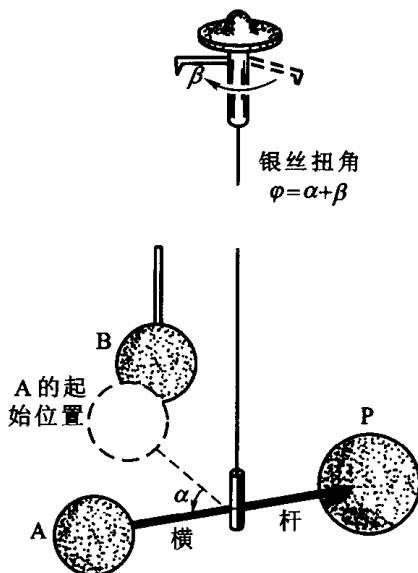


图 1-3 银丝扭角的计算

表 1-1 库仑扭秤实验数据

		横杆转角 (即 A、B 间夹角) α	秤头转角 β	银丝扭角 $\varphi = \alpha + \beta$
球 A、B 未带电时		0°	0°	0°
球 A、B 电荷不变情况下的三次实验	(1)	36°	0°	36°
	(2)	$18^\circ = 36^\circ/2$	126°	$144^\circ = 4 \times 36^\circ$
	(3)	$8.5^\circ \approx 18^\circ/2$	567°	$576^\circ = 4 \times 144^\circ$

关于静电力与电荷成正比的验证则要麻烦一些. 问题在于, 当时关于电荷还只有定性的概念, 根据这个概念, 可以谈到一个物体是否带电, 却无从确定它带电的数量. 为了找到静电力与电荷的关系, 库仑使用了一个巧妙 (但不够严格) 的方法. 他从对称性的考虑断定, 令一个带电金属球与半径、材料完全相同的另一不带电金属球接触后分开, 每球的电荷应是原带电球的电荷之半. 他用这个方法证实了静电力与电荷成正比的关系. 但是, 电荷 (作为一个物理量) 的严格定义是后来的科学家 [特别是高斯 (Gauss)] 作出的, 他们的定义过程如下.

设有 A、B、C 三个点电荷. 先令 A 与 C 间距离为 r [图 1-4(a)], 用扭秤测出它们的静电

的形式，相应的常量 ϵ_0 为

$$\epsilon_0 \approx 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2).$$

ϵ_0 的物理意义见第三章引入 ϵ_0 后，式(1-1)就改写为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1-5)$$

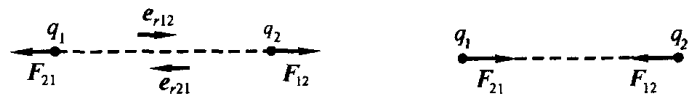
同一物理规律在不同单位制中可有不同的数学表达式，式(1-4)及(1-5)分别是库仑定律在高斯制和 MKSA 制中的表达式，式(1-5)虽比(1-4)复杂，但由它推出的许多关系式却比较简单，本书一律采用 MKSA 制。

1.2.3 库仑定律的矢量形式

库仑定律对两个点电荷间静电力的大小和方向都作了确切描述，其全部内容包括小节 1.2.1 的(1)、(2)两点，式(1-5)只反映静电力的大小所服从的规律，并未涉及静电力的方向，要反映方向就要把它改写为矢量形式。在介绍这一形式之前，先对本书所用的矢量符号作一说明以矢量 \mathbf{a} 为例，我们用黑斜体字母 \mathbf{a} 代表矢量本身，白斜体字母 a 代表矢量 \mathbf{a} 的大小(长度)，恒为正，即 $a \equiv |\mathbf{a}| > 0$ (本书以 \equiv 作为“定义为”或“代表”的符号)， \mathbf{e} 代表与 \mathbf{a} 同方向但长度为 1 的矢量，叫单位矢量。显然 $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_a$ 。库仑定律的矢量形式可以表示为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_{r12}, \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_{r21}, \quad (1-6)$$

其中 \mathbf{F}_{12} 代表点电荷 1 对 2 的作用力， \mathbf{F}_{21} 代表 2 对 1 的作用力， \mathbf{e}_{r12} 代表由 1 指向 2 的单位矢， \mathbf{e}_{r21} 代表由 2 指向 1 的单位矢(显然 $\mathbf{e}_{r12} = -\mathbf{e}_{r21}$)。只要把 q_1 及 q_2 理解为可正可负的代数量(区别于只取正值的算术量，如距离 r)，就不难看出式(1-6)可以同时反映静电力的大小及方向。例如，设 q_1 与 q_2 同号则 $q_1 q_2 > 0$ ，矢量 \mathbf{F}_{12} 等于一个正数乘矢量 \mathbf{e}_{r12} ，故 \mathbf{F}_{12} 与 \mathbf{e}_{r12} 同向，即点电荷 1 对 2 的静电力沿两者连线且由 1 指向 2，这就是斥力。同理可知 \mathbf{F}_{21} 也是斥力。反之，当 q_1 与 q_2 异号时，由式(1-6)不难看出 \mathbf{F}_{12} 及 \mathbf{F}_{21} 都是吸力(见图 1-5)。可见矢量等式具有比标量等式更丰富的内容。今后，在涉及矢量问题时，我们将经常使用矢量表达式，请读者注意它们所表达的全部内容，不要与标量表达式等同看待。



(a) q_1, q_2 同号时为斥力

(b) q_1, q_2 异号时为吸力

图 1-5 用库仑定律矢量形式判断两个点电荷间静电力的方向

1.2.4 叠加原理

库仑定律讨论的是两个点电荷之间的静电力。当空间有两个以上点电荷时，就必须补充另一实验事实——作用于每一电荷上的总静电力等于其他点电荷单独存在时作用于该电荷的静电力的矢量和^①。这叫做叠加原理。库仑定律与叠加原理相配合，原则上可以解决静电学的全部问题。

§ 1.3 静 电 场

设空间存在静止点电荷 Q ^②，则任一点的静止点电荷 q 必然受到来自 Q 的静电力，可见 Q 的存在使空间具有一种特殊的性质，我们说 Q 在周围空间激发一个静电场。

1.3.1 电场强度

为了研究电场中各点的性质，可以用一个点电荷（称为试探电荷） q 做实验。试探电荷应该满足两个条件：（1）其线度必须小到可被看作点电荷，以便确定场中每点的性质；（2）其电荷要足够小，使得它的置入不引起原有电荷的重新分布（否则测出来的将是重新分布后的电荷激发的电场）。

先讨论静止点电荷 Q 激发的静电场。我们把在电场中所要研究的点叫做场点。在场点放置一个静止的试探电荷 q 。按照库仑定律， q 所受的电场力为

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r,$$

式中 r 是场点与点电荷 Q 的距离， \mathbf{e}_r 是从 Q 到 q 的单位矢量。能不能用 \mathbf{F} 表征场点的性质呢？不能，因为 \mathbf{F} 不但与场点有关，而且与试探电荷 q 有关。但是上式表明比值 \mathbf{F}/q 只与场点有关。这一结论还可推广到由任意静止电荷激发的电场，为此只需把激发电场的电荷分成许多点电荷并利用叠加原理。场中每点的 \mathbf{F}/q 叫做该点的电场强度（简称场强，在近代文献中常又简称电场）以 \mathbf{E} 代表，即

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (1-7)$$

由这定义可知，场强是描写电场中某点性质的矢量，其大小等于单位试探电荷在该点所受电场力的大小，其方向与正试探电荷在该点所受电场力的方向相同。在

这意味着：一个点电荷作用于另一点电荷的力总是符合库仑定律的，不论周围是否存在其他电荷。

如无特别声明，凡“静止”一律是相对于惯性系而言

场中任意指定一点, 就有一个确定的场强 E ; 对同一场中的不同点, E 一般可以不同. 各点场强有相同大小和方向的电场叫做均匀电场

一般地说, 若空间每点有一个标量 f (例如地球周围每点有一个高度), 就说空间中存在一个标量场; 若空间每点有一个矢量 a , 就说空间中存在一个矢量场. 因为空间每点可用三个坐标 x, y, z 刻画, 所以标量场 f 和矢量场 a 也可表示为坐标的函数 $f(x, y, z)$ 和 $a(x, y, z)$, 于是标量场和矢量场又称标量点函数和矢量点函数. 电场强度是矢量场的一例, 可以表示为 $E(x, y, z)$. 无论是标量场还是矢量场, 都要特别注意它作为坐标的函数的函数关系, “求某一带电体激发的电场” 就是指求出函数关系 $E(x, y, z)$.

场强的国际制单位由式 (1-7) 规定, 它没有专门名称, 一般记作 N/C 或 V/m 即伏 / 米 伏特的定义见小节 1.6.2).

1.3.2 场强的计算

先计算静止点电荷 Q 激发的电场. 由场强定义及库仑定律可知

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r, \quad (1-8)$$

其中 e_r 是从 Q 到场点的单位矢量, r 是 Q 与场点的距离. 上式表明, 点电荷 Q 的场强数值随场点与 Q 点的距离依平方反比律减小, 方向则沿场点与 Q 点的连线. 当 $Q > 0$ 时, E 与 e_r 同向 场强背离 Q 点; 当 $Q < 0$ 时, E 与 e_r 反向, 场强指向 Q 点.

当电场由 n 个点电荷激发时, 以 F_i 代表第 i 个点电荷对试探电荷 q 施加的静电力, E_i 代表第 i 个点电荷在 q 所在点的场强, 则由场强定义及叠加原理得

$$E = \frac{F}{q} = \frac{\sum F_i}{q} = \sum \frac{F_i}{q} = \sum E_i.$$

可见 n 个点电荷所激发的电场在某点的总场强等于每个点电荷单独存在时所激发的电场在该点的场强的矢量和, 这叫做场强的叠加原理.

例 1 在直角坐标系原点 O 及 $(\sqrt{3} \text{ m}, 0)$ 点分别放置电荷 $Q_1 = -2 \mu\text{C}$ 及 $Q_2 = +1 \mu\text{C}$ 的点电荷 (μC 即微库) 求场点 $P = (\sqrt{3} \text{ m}, -1 \text{ m})$ 处的场强 (图 1-6).

解: Q_1 在 P 点激发的场强

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} e_{r1},$$

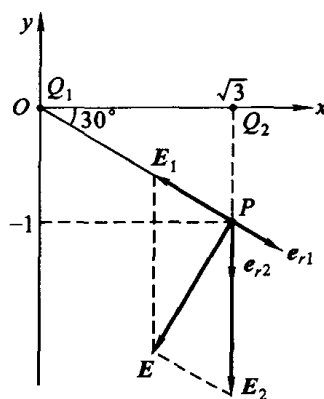


图 1-6 点电荷 Q_1 及 Q_2 在 P 点激发的场强

其中 r_1 为原点 O 与场点 P 的距离, e_{r_1} 为从 O 到 P 的单位矢量. 代入已知数据得

$$\mathbf{E}_1 = -4.5 \times 10^3 e_{r_1} \text{ N/C},$$

其中用到 $\epsilon_0 \approx 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$. Q_2 在 P 点激发的场强

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} e_{r_2},$$

其中 r_2 是 Q_2 所在点与 P 点的距离, e_{r_2} 是从 Q_2 所在点到 P 的单位矢量. 代入已知数据得

$$\mathbf{E}_2 = 8.9 \times 10^3 e_{r_2} \text{ N/C}.$$

根据场强的叠加原理, P 点的总场强为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. 矢量的叠加可归结为对应分量的叠加. 由图可知, \mathbf{E}_1 及 \mathbf{E}_2 的 x 、 y 分量分别为

$$E_{1x} = -E_1 \cos 30^\circ = -(4.5 \times 10^3) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N/C} = -3.9 \times 10^3 \text{ N/C},$$

$$E_{1y} = E_1 \cos 60^\circ = (4.5 \times 10^3) \times \frac{1}{2} \text{ N/C} = 2.3 \times 10^3 \text{ N/C},$$

$$E_{2x} = 0,$$

$$E_{2y} = -E_2 = -8.9 \times 10^3 \text{ N/C},$$

故

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = -3.9 \times 10^3 \text{ N/C},$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = -6.6 \times 10^3 \text{ N/C}.$$

以上便是本例答案, 其矢量形式则为

$$\mathbf{E} = [-i(3.9 \times 10^3) - j(6.6 \times 10^3)] \text{ N/C},$$

其中 i 、 j 是沿 x 、 y 轴正向的单位矢量.

再讨论电荷连续分布时场强的计算. 如前所说, 宏观物体的净电荷归根结底来自组成物体的微观粒子 (质子和电子) 的电荷. 因此, 微观看来电荷分布是不连续的. 然而, 如果只关心宏观电磁学, 物理学家的惯用手法是对电荷分布作“宏观抹开”处理, 即忽略微观起伏而认为电荷连续地分布于某一宏观体积、曲面或曲线上. 为了计算场强, 首先应该了解电荷的具体分布情况.

(1) 电荷连续分布于某一体积中

为了描写电荷的分布, 可以引入电荷体密度的概念. 在带电体积中某点周围取一个小体元 ΔV 设 ΔV 内的电荷为 Δq 则

$$\rho \equiv \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (1-9)$$

称为该点的电荷体密度. 简单说, 一点的电荷体密度在数值上等于该点附近单位体积的电荷. 为精确反映电荷分布的宏观不均匀性, ΔV 取得越小越好. 然而

ΔV 又必须包含足够多的带电粒子, 以免电荷分布的微观起伏暴露出来, 这种宏观看来很小而微观看来很大的体元叫做物理无限小体元.

电荷体密度 ρ 是一个 (宏观) 标量场如果某区域中各点 ρ 相等, 就说电荷在该区域是均匀分布的.

为了计算场强, 可把带电区域分为许多小体元 dV 每个 dV 可看作电荷为 ρdV 的点带电体, 它在场点 P 激发的元场强为

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r,$$

其中 r 为 dV 与 P 的距离 \mathbf{e}_r 为从 dV 到 P 点的单位矢量 (图 1-7). 根据叠加原理, 整个带电区域在 P 点激发的总场强等于所有 $d\mathbf{E}$ 的矢量和, 可以写成如下积分:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1-10)$$

积分遍及整个带电区域.

(2) 电荷连续分布于某一薄层内 (图 1-8)

当场点与薄层的距离远大于薄层厚度 δ 时, 可忽略厚度而认为电荷分布在一个几何曲面上. 在曲面上某点周围取一面元 ΔS 设 ΔS 内的电荷为 Δq 则

$$\sigma \equiv \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (1-11)$$

叫做该点的电荷面密度. 应该说明 Δq 实际上是以 ΔS 为底面、以薄层厚度 δ 为高的小体元 (图 1-8 中的小扁盒)

内的电荷, 只是为简单而把薄层看作几何面时才把 Δq 看成是几何面元 ΔS 上的电荷. 通过这种处理, 我们把带电薄层 (电荷以有限体密度连续分布于其内) 抽象为“带电面” (面模型), 正如当场点与带电体的距离远大于带电体的线度时把带电体抽象为“点电荷” (点模型) 那样.

计算带电曲面激发的场强时, 可把每一面元 ΔS 看作电荷为 $\sigma\Delta S$ 的点带电体, 场强的计算归结为如下的曲面积分:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1-12)$$

其中 r 是面元 dS 到场点的距离, \mathbf{e}_r 是 dS 到场点的单位矢量, 积分遍及整个带电面.

必须指出, 把图 1-8 的小扁盒抽象为一个几何面元 ΔS 时, 我们把盒的电荷 Δq 看作都集中到几何面元 ΔS 上 (只有这样才能保证它们在远处激发的场强相同). 设电荷以某一密度 $\rho(x, y, z)$ 分布于薄层内, 则以 ΔS 为底、 δ 为高的小扁盒的电荷为 $\Delta q = \rho\delta\Delta S$ [图 1-9

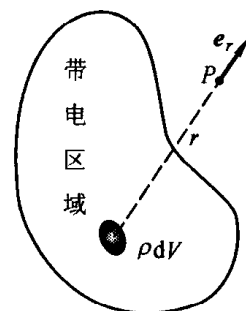
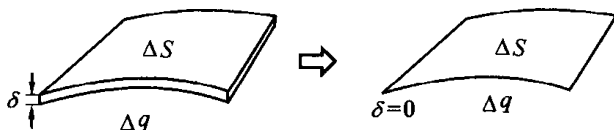


图 1-7 电荷连续分布于某一体积时场强的计算 (场点 P 也可在带电区域内)



图 1-8 带电薄层

(a)] 保持 Δq 不变而令 $\delta \rightarrow 0$ 就得到一个带电几何面元 ΔS [图 1-9(b)]. 这个面元的体密度是没有意义的, 因为 $\Delta q / \delta \Delta S$ 在 $\delta \rightarrow 0$ 时趋于无穷, 但是面密度 $\Delta q / \Delta S$ 却能把电荷在面元 ΔS 处的疏密情况恰当地表达出来.



(a) 带电小扁盒 (b) 带电几何面元

图 1-9 从体分布到面分布

(保持 Δq 不变而令 $\delta \rightarrow 0$)

与此类似, 把带电体看成点电荷时, 也认为它的电荷全部集中于一个几何点. 对点电荷来说, 体密度和面密度都没有意义 (都趋于无穷), 只能用电荷 q 本身描写这个点的带电情况.

(3) 电荷连续分布于某细棒上 (图 1-10)

当场点与棒的距离远大于棒的粗细时, 可忽略粗细而认为电荷分布于一条几何曲线上 (线模型), 并类似地定义电荷线密度 η :

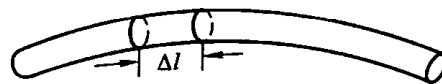


图 1-10 带电细棒

$$\eta \equiv \frac{\Delta q}{\Delta l}, \quad (1-13)$$

其中 Δq 是细棒上长度为 Δl 的元段内的电荷. 这种情况下的场强计算归结为一个曲线积分:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\eta dl}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1-14)$$

其中 r 是线元 dl 与场点的距离, \mathbf{e}_r 是从 dl 到场点的单位矢量, 积分遍及整条带电曲线.

例 2 求均匀带电圆盘轴线上的场强. 已知圆盘半径为 R , 电荷面密度为 σ ($\sigma > 0$).

解 以盘心 O 为心作半径各为 r 及 $r + dr$ 的圆, 再作两条夹角为 $d\varphi$ 的半径, 截出一个很小的“半扇形”如图 1-11 的深灰色部分所示. 因 $d\varphi$ 很小, 可认为这个半扇形为矩形, 其长、宽各为 dr 及 $rd\varphi$ 其面积为 $dS = rd\varphi dr$ 其电荷为 $dq = \sigma dS = \sigma rd\varphi dr$. 按照点电荷场强公式, 它在轴上一点 P 贡献的场强 (大小为

$$dE = \frac{\sigma r d\varphi dr}{4\pi\epsilon_0 l^2},$$

其中 l 是半扇形与 P 点的距离. 由于电荷分布对称于圆盘轴线 OP 故必存在与

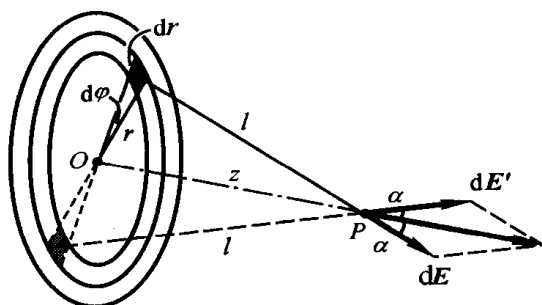


图 1-11 均匀带电圆盘轴线上的场强 ($\sigma > 0$)

所取半扇形对称配置的另一半扇形 (图中用虚线围出的浅灰色部分), 两者面积、电荷分别相等. 虚线半扇形在 P 点贡献的场强如图中的 dE' 所示. dE 与 dE' 大小相等, 与轴线夹角 α 亦等, 两者的合场强必平行于轴线. 整个圆盘可分割为一对对这样的半扇形, 故 P 点的总场强 E 亦必平行于轴线. 因此只需对 dE 沿轴线的分量 dE_z 作积分便可求出 E . 由图可知

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{\sigma r d\phi dr}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cos \alpha = \frac{\sigma r d\phi dr}{4\pi\epsilon_0 l^2} \frac{z}{l} = \frac{\sigma z r d\phi dr}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}},$$

其中 z 是场点 P 与圆盘的距离 (恒为正). 对变量 r, ϕ 作二重积分便得

$$E = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/z)^2}} \right]. \quad (1-15)$$

对上式可作两点有趣的讨论.

(1) R/z 很大的情况

设 R/z 无限增大, 对式 (1-15) 取极限得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{R/z \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/z)^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

虽然实际上不存在半径为无限大 (按数学意义) 的带电圆盘, 但只要圆盘半径 R 远大于场点与圆盘的距离 z 就可近似认为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (1-16)$$

而且由于 E 是 R/z 的单调函数 所以比值 R/z 越大时上式的精确度越高, 即把圆盘看作无限大所导致的误差越小.

以上结论是由式 (1-15) 出发导出的, 对于不在轴线上的场点是否适用仍然是个问题. 可以证明 (有余力的读者不妨一试), 只要场点与轴线的距离 y 远小于盘的半径 ($y \ll R$) 再加上 $z \ll R$ 的条件, 圆盘就可近似看作无限大的均匀带电平面, 其场强就可由式 (1-16) 近似表示.

在日常讨论中还会遇到边缘不是圆形的均匀带电盘 (指形状任意的闭合曲线围成的均匀

带电平面区域),可以证明(见本书拓展篇),如果存在满足以下两个条件的场点,这带电盘对该场点而言也可近似看作无限大的均匀带电平面,即该点的场强也可由式(1-16)近似表示.这两个条件是:(1) $z \ll R_{\text{小}}$; (2) $R_{\text{大}} - R_{\text{小}} \ll R_{\text{小}}$, 其中 z 为场点与带电区域所在平面的距离, $R_{\text{小}}$ 和 $R_{\text{大}}$ 分别是场点与带电区域边缘的最小和最大距离.

(2) R/z 很小的情况

把式(1-15)右边方括号中第二项作泰勒展开:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(R/z)^2}} = [1+(R/z)^2]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{R}{z}\right)^4 - \dots,$$

注意到 $R/z \ll 1$ 略去 $(R/z)^4$ 及其以上的项,得

$$\frac{1}{\sqrt{1+(R/z)^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2,$$

代入式(1-15)得

$$E \approx \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} = \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2},$$

其中 q 是圆盘的电荷.上式与点电荷场强公式一致.可见,只要 R/z 足够小就可足够精确地把带电圆盘看作点电荷.这进一步说明,带电体能否被看作点电荷,不在于本身的绝对大小,而在于其线度与它到场点的距离相比是否足够小.同一个带电圆盘,当场点很远时可被看作点电荷,当场点在盘心附近时则可被看作无限大平面.

§ 1.4 高斯定理

高斯定理是静电学的一个重要定理,是关于静电场中任一闭合曲面的“ E 通量”的定理.下面先介绍 E 通量的概念.

1.4.1 E 通量

通量的概念最初是在流体动力学中引入的.在流体动力学中,速度 \boldsymbol{v} 是一个矢量场,即流体中每一点都有一个确定的速度矢量 \boldsymbol{v} .在流体中取一面元 dS ,则单位时间内流过 dS 的流体体积叫做 dS 的通量.由于 dS 很小,可以认为其上各点的 \boldsymbol{v} 相同.以 dS 为底、 \boldsymbol{v} 为母线作一柱体(图 1-12).因为

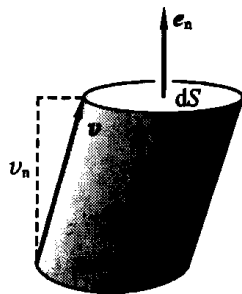
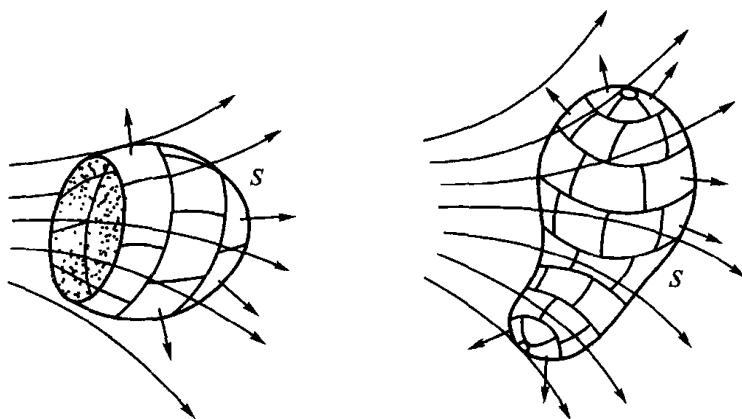


图 1-12 流体中面元的通量

\boldsymbol{v} 是流体颗粒在单位时间内移过的距离,只有位于这个柱体内部的流体微团才能在单位时间内流过 dS 所以 dS 的通量 $d\Phi$ 在数值上等于柱体内的体积 即 $|d\Phi| = |\boldsymbol{v}_n| dS$ 其中 \boldsymbol{v}_n 是 \boldsymbol{v} 在面元的法向单位矢

e_n 上的投影.按照矢量点乘积的定义, v_n 又可写成 $v_n = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_n$, 故 $d\Phi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_n dS$. 为简单起见, 常把矢量 $\boldsymbol{e}_n dS$ 写成 $d\boldsymbol{S}$ (叫做矢量面元), 于是 $d\Phi = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$. 以上是流体中一个面元的通量的表达式. 对于流体中的任一有限曲面 S 其通量 Φ 等于组成这一曲面的每个面元的通量的代数和 (图 1-13), 因而可写成如下曲面积分:

$$\Phi \equiv \iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}.$$



(a) 不闭合曲面

(b) 闭合曲面

图 1-13 计算流体中有限曲面 S 的通量时, 把曲面分成许多很小的面元. 短箭头表示面元法向, 带箭头的曲线是流线 (\boldsymbol{v} 线)

通量的概念可以 (形式地) 推广到任意矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$, 场中任一矢量面元 $d\boldsymbol{S}$ 的 \boldsymbol{a} 通量定义为 $d\Phi_a \equiv \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S}$ (这时已不一定有“单位时间内流过面元的某量”这样的物理意义) 有限曲面 S 的 \boldsymbol{a} 通量则定义为

$$\Phi_a \equiv \iint_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

电场强度 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ 的通量叫做 \boldsymbol{E} 通量. 电场中面元 $d\boldsymbol{S}$ 的 \boldsymbol{E} 通量定义为

$$d\Phi_E \equiv \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}, \quad (1-17)$$

有限曲面 (闭合或不闭合) S 的 \boldsymbol{E} 通量为

$$\Phi_E \equiv \iint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}. \quad (1-18)$$

对 \boldsymbol{E} 通量的概念应注意以下两点 (也适用于其他通量):

(1) \boldsymbol{E} 和 \boldsymbol{e}_n 都是面上的矢量场, 其点乘积 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}_n$ 是面上的标量场, 故 \boldsymbol{E} 通量是标量. 但 \boldsymbol{E} 通量不是点函数 (不是标量场), 因为给定一点并不能确定一个曲面, 从而无通量可言. 只能谈及某面元或某曲面的通量而不能谈及某点的通量

(2) \mathbf{E} 通量是代数量. 在场强一定时, \mathbf{E} 通量的正负取决于面元法向的选取. 例如对图 1-14 的面元既可取 \mathbf{e}_{n1} 为法向, 也可取 \mathbf{e}_{n2} 为法向. 两种取法求得的通量等值异号 (因 $\cos \theta_1 = -\cos \theta_2$). 因此, 谈及通量前应明确选定面元的法向. 对于闭合曲面, 我们约定一律以向外为法向 [见图 1-13(b)]. 对非闭合曲面, 应根据情况事先规定法向.

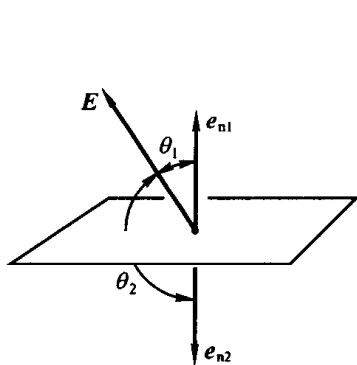


图 1-14 同一面元的两种法向

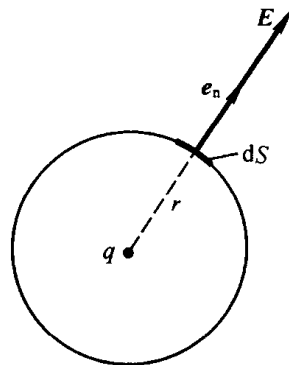


图 1-15 以点电荷为心的球面的 \mathbf{E} 通量

1.4.2 高斯定理

高斯定理是关于闭合曲面 \mathbf{E} 通量的定理. 先讨论最简单的情况. 设电场由点电荷 q 激发, 以 q 为心作半径为 r 的球, 在球面上任取一面元 dS (图 1-15), 其 \mathbf{E} 通量为

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS$$

(为简洁计 已把 Φ_E 简写为 Φ) 整个球面的 \mathbf{E} 通量为

$$\Phi = \oiint_{\text{球面}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_{\text{球面}} dS,$$

其中 $\oiint_{\text{球面}} dS$ 是球面积, 等于 $4\pi r^2$ 故

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1-19)$$

这说明球面的 \mathbf{E} 通量与点电荷的电荷成正比而与半径无关.

下面证明式 (1-19) 对于包围 q 的任一闭合曲面 (图 1-16 中的 S) 也成立. 以 q 为心、任一 r_1 为半径作球面 S_1 . 以 q 为顶点作一任意形状的小锥体, 它在 S_1 及 S 上截出面元 dS_1 及 dS . dS_1 的 \mathbf{E} 通量为

$$d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dS_1,$$

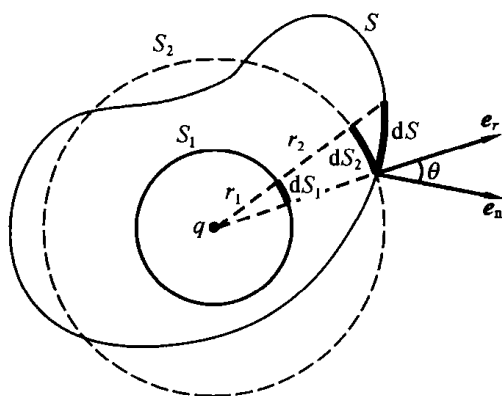


图 1-16 包围点电荷的任意闭合面 S 的通量

dS 的 \mathbf{E} 通量为

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_n dS,$$

其中 r_2 是 dS 与 q 的距离, \mathbf{e}_n 是 dS 的外法向单位矢量. 设 \mathbf{e}_r 与 \mathbf{e}_n 夹角为 θ 则 $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_n = \cos \theta$ 故

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} dS \cos \theta.$$

以 q 为心、 r_2 为半径作球面 S_2 与锥体截面元 dS_2 . 不难看出

$$dS_2 = dS \cos \theta, \quad (1-20)$$

故

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} dS_2.$$

由立体几何知

$$\frac{dS_2}{dS_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

因而

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} dS_1 = d\Phi_1, \quad (1-21)$$

即 dS 与 dS_1 有相等的 \mathbf{E} 通量. S 面及 S_1 面可被许多锥体分成这样一对对面元, 可见 S 面的 \mathbf{E} 通量等于 S_1 面的 \mathbf{E} 通量, 而 S_1 是球面 故

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1-22)$$

这就是所要证明的.

下面证明不包围点电荷 q 的任意闭合面 [图 1-17(a) 的 S 的 \mathbf{E} 通量为零.