

第 1 章

疲劳分析

1.1 概 述

1.1.1 疲劳强度的基本概念

载荷值随时间作周期性或非周期性变化的载荷称为交变载荷，大多数承载的机械构件都在这种交变载荷作用下工作。由于载荷的变化，使试件或构件的材料内产生随时间变化的交变应力与交变应变。经足够的应力或应变循环作用后，损伤累积可使试件或结构材料产生裂纹，并使裂纹扩展，直至小片脱落或断裂的过程称为疲劳破坏。构件因发生疲劳破损而使其丧失正常工作性能的现象称为疲劳失效。试件抵抗疲劳失效的能力称为材料疲劳强度；构件抵抗疲劳失效的能力称为结构疲劳强度。

1.1.2 结构疲劳失效的特征

为正确分析机械构件的失效原因，必须区分疲劳失效与

静强度失效的特征：

(1) 载荷的交变性：疲劳失效的构件，在其材料内部必定作用有交变应力与交变应变。

(2) 失效过程的渐变性：疲劳破坏是一个累积损伤的过程，从加载至失效需要经历一定的时间历程及应力与应变的循环过程。实践证明，不论何种疲劳，其失效过程都经历裂纹萌生、扩展和瞬时断裂三个阶段。

(3) 断口的脆性和断裂的突然性：不论构件使用脆性材料还是塑性材料，其疲劳破坏在宏观上常表现为无明显塑性变形的突然断裂，断口为脆性断口，因此疲劳失效具有很大的危险性。

(4) 应力与应变的缺口敏感性：构件在交变荷载作用下，材料内产生的应力或应变峰值会受材料本身缺陷或几何形状突变的影响产生局部增大，这种现象称为缺口敏感性，也叫应力集中或应变集中。结构疲劳失效多发生在局部高应力区域，在设计或加工中应采取相应措施来减小局部高应力的产生。

(5) 疲劳断口的独特性：疲劳断口可以看到明显的裂纹源、裂纹扩展区（光滑断面）和瞬时断裂区（粗糙断面），而其他断口无这种明显特征。

1.1.3 结构疲劳的类型及疲劳设计程序

1.1.3.1 结构疲劳的类型

(1) 按设计寿命长短分为无限寿命设计和有限寿命设计。在有限寿命设计中，寿命大于 10^5 周的称为高周疲劳，小于 10^5 周的称为低周疲劳。

(2) 按引起疲劳的载荷特性分为冲击疲劳、接触疲劳、摩擦疲劳与磨损疲劳。

(3) 按受力方式分为拉压疲劳、弯曲疲劳、扭转疲劳和复合疲劳。

(4) 按应力与时间是否有确定的函数关系分为定常疲劳和随机疲劳。

(5) 按环境温度分为常温疲劳、高温疲劳和热疲劳。

(6) 按有无腐蚀性介质作用分为一般疲劳和腐蚀疲劳，即在腐蚀环境（化学、风雨、空气等）下的疲劳。

1.1.3.2 结构疲劳强度设计的一般程序

结构疲劳强度设计程序一般分以下两步：

(1) 疲劳计算。机械构件的结构设计包括几何形状设计和结构强度设计。根据规定的运动规律完成几何设计之后，再按照整机的规定寿命、构件的工作载荷、工作环境等情况选择适当的疲劳理论、材料和必要的参数，对构件特征尺寸进行计算；或者先根据静强度理论确定特征尺寸，然后再进行寿命估算，并将计算结果与规定寿命相比较，通过对其特征尺寸、材质、加工工艺等的调整直至最后使计算寿命满足规定寿命为止。

(2) 结构疲劳试验。对无限寿命设计类型中的一般机械，由于尺寸较大，便于在运行中检测疲劳裂纹的萌生与扩展情况，并且单件失效不会造成重大事故时，可只做疲劳计算而不做疲劳试验。

对重要的机械，从确保安全可靠出发，考虑到疲劳数据的分散性和疲劳理论与构件实际使用情况之间的种种差异，还必须在疲劳计算之后再对构件做模拟疲劳试验。特别重要

的机械，还应对构件直至整机做实物疲劳试验。

1.2 疲劳图

在实验基础上建立的疲劳载荷与疲劳寿命的关系曲线图称为疲劳图。

1.2.1 S-N 曲线

1.2.1.1 符号定义

在材料力学中，我们学习了交变应力（见图 1.1）的一些基本概念，为了便于大家学习，下面给出有关符号的定义：

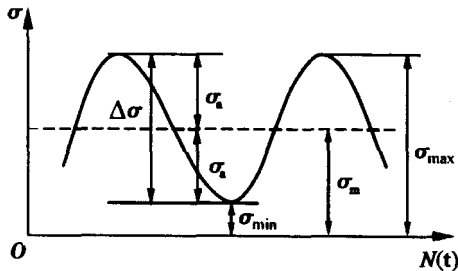


图 1.1

(1) 最大（小）应力： σ_{\max} (σ_{\min})，即循环应力中的最大值（最小值）。

(2) 应力变程： $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ ，即最大与最小应力之差。

(3) 平均应力： $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$ ，即最大与最小应力之和的一半。

(4) 应力幅值： $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ ，即最大与最小应力之差的一半，也可以用 τ 表示切应力疲劳等。一般情况下，用 S 表示应力幅值。

(5) 不对称系数： $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ ，也称为交变应力的循环特性。

上述 6 个数据 (σ_{\max} 、 σ_{\min} 、 σ_a 、 σ_m 、 r 、 $\Delta\sigma$) 中，只有 2 个量是完全独立的。

(6) 循环周次（代替时间 t ） N ：指应力循环的次数，而循环应力的每一个周期变化称为一个应力周期。

(7) 疲劳寿命 N_f ：在循环加载下，产生疲劳破坏所需的应力或应变的循环周次。

(8) 疲劳极限（或持久极限） σ_r ：当应力幅值 σ_a 小于某一极限值 σ_r 时，试件可经受无限次应力循环而不破坏，该极限值 σ_r 称为疲劳极限（或持久极限），即 σ_a 的极限值。

1.2.1.2 S-N 曲线

将试验材料制成直径为 6~10 mm 的标准试件，按国标规定分别在旋转弯曲、拉压、扭转材料疲劳试验机上进行试验。在给定平均应力 σ_m 的情况下，若按不同的应力幅 S 加载，每组按同一标准（如断裂或出现同尺寸的裂纹）记录循环次数，将试验结果画在应力幅值 S （或疲劳强度）为纵坐标，疲劳寿命 N_f 为横坐标的图上，所得出的曲线称为 $S-N$ 曲线，而以正应力 σ 为纵坐标的称为 $\sigma-N$ 曲线，以切应力 τ 为纵坐

标的称为 $r-N$ 曲线，如图 1.2 所示。

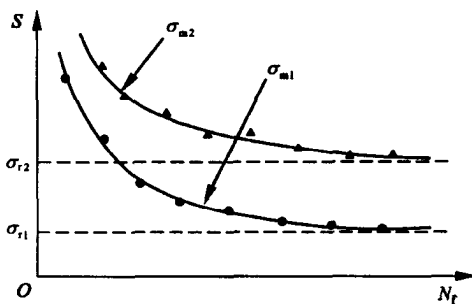


图 1.2

当应力幅 S 低于一定值时，不出现疲劳破坏，此时对应 S 的值 σ_r 称为疲劳极限（或持久极限）。对高周疲劳，一般定义 $N_f = 10^7$ （对金属材料而言）

工程中最常见的 $S-N$ 曲线是在对称循环实验条件下的，即此时 $\sigma_m = 0$ ， $r = -1$ 。通常此时，疲劳极限的数值为最小。

1.2.2 $P-S-N$ 曲线（概率 $S-N$ 曲线）

由于试件材料的微观力学性能具有统计特征，加之加工工艺以及试验条件上的差异，即使在同一应力幅的作用下，试验所得的数据也会有一定的离散性和分布规律。实验表明，其分布大部分属于正态分布（或韦布尔 Weibull 分布）。因此，对一个应力幅而言，靠单根试件试验所得的疲劳寿命不能反映这种材料在该应力幅作用下的真正寿命。要获得具有代表性的数值，通常用一组试件在同一应力幅 S 作用下试验，获得一组 N_f 的数据，再用概率统计的方法求出该数据组的概率

分布。据此，若把试验结果按不同的概率 P 整理在 S 为纵坐标、 N_f 为横坐标的图上，即可以绘出 P - S - N 曲线，如图 1.3 所示。正态分布时，曲线 AB 为破坏概率 $P=50\%$ 的疲劳曲线； CD 是破坏概率 $P=1\%$ 的疲劳曲线； EF 是破坏概率 $P=10\%$ 的疲劳曲线。工程上一般给出的 S - N 曲线，可理解为破坏概率 $P=50\%$ 的情况，也就是图中的 AB 曲线。

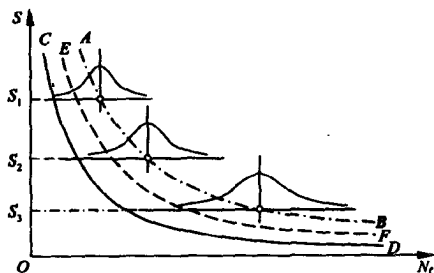


图 1.3

1.2.3 S - N 曲线关系式（经验公式）

S - N 曲线（见图 1.4 (a)）关系式一般可以采用回归曲线办法得到，工程中常用的有指数型的经验关系式，如设

$$N_f = CS^a$$

其中 C 和 a 为待定常数。若对上式两边取对数，则有

$$\lg N_f = \lg C + a \lg S$$

如果以 $\lg N_f$ 为横坐标，以 $\lg S$ 为纵坐标，则上式可表示成一条直线，如图 1.4 (b) 所示，即在双对数坐标中，由实验所得的数据按线性回归的方法可得出疲劳极限的经验公式。

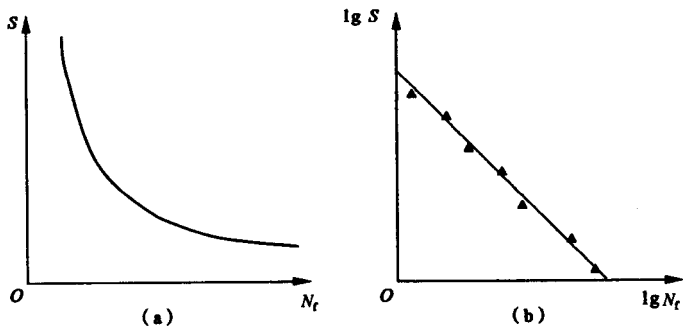


图 1.4

1.2.4 疲劳极限线图

$S-N$ 曲线可以通过对称循环和非对称循环得到，并且不同应力比 r 所得到的 $S-N$ 曲线也不同。为了使用方便，最好能有一种应力比在 $-1 \leq r \leq +1$ 的范围表示各种 $S-N$ 曲线的线图，这种线图称为疲劳极限线图，简称疲劳图。常用的疲劳图有两种：一是史密斯 (Smith) 疲劳图，即以平均应力 σ_m 为横坐标，最大应力 σ_{\max} 及最小应力 σ_{\min} 为纵坐标绘出的疲劳极限线图；二是黑格 (Haigh) 疲劳图，即以平均应力 σ_m 为横坐标、应力幅 σ_a 为纵坐标绘出的疲劳极限线图。

1.2.4.1 史密斯疲劳图

在史密斯疲劳图 (见图 1.5) 中，曲线 $C'AC$ 表示最大应力极限，即材料疲劳极限；曲线 $C'A'C$ 表示最小应力值，在曲线 $C'AC$ 与 $C'A'C$ 所围面积内的任一点，表示不产生疲劳破坏的应力水平及其循环特性。两曲线所围面积以外的任一点，

表示其所代表的应力水平和循环特性的交变应力，使材料或构件经有限次应力循环即会产生疲劳破坏。最大应力线 CAC 与最小应力线 $C'A'C$ 相交于 C 点，即表示的应力状态为最大应力等于最小应力，也就是静载荷破坏点，其纵坐标和横坐标都等于材料的强度极限。曲线 $C'A'C$ 与横轴相交于 D 点， D 点的最小应力等于零。从 D 点作横坐标轴的垂直线，交曲线 CAC 于 B 点， B 点的纵坐标值表示脉动循环应力的疲劳极限 σ_0 。纵轴上的 A 、 A' 两点的平均应力 σ_m 均为零，所以其纵坐标值表示对称循环的疲劳极限 σ_{-1} 。

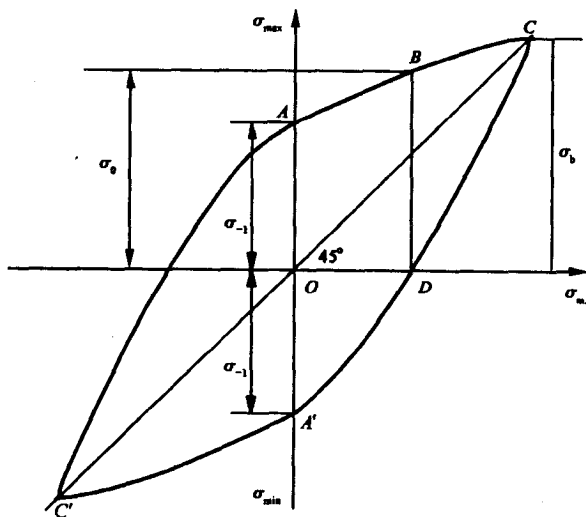


图 1.5

1.2.4.2 黑格疲劳图

黑格疲劳图是以应力幅 σ_a 为纵坐标，平均应力 σ_m 为横坐标，由实验得到的疲劳极限数据绘出的曲线 ACB 如图 1.6

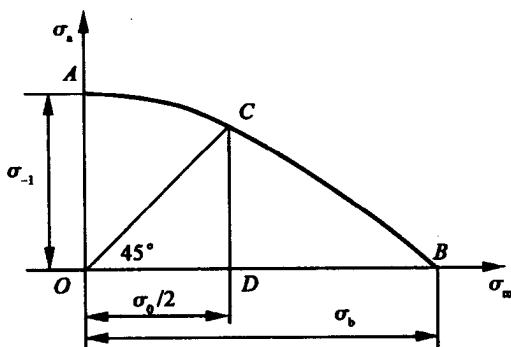


图 1.6

所示，为典型的黑格疲劳图。曲线 ACB 上任意一点的纵坐标和横坐标之和都代表一定循环特性为 r 的疲劳极限。曲线上 A 点的平均应力 $\sigma_m = 0$ ，故它代表材料的对称循环疲劳极限 σ_{-1} 。点 B 和点 D 的应力幅 $\sigma = 0$ ，分别代表材料的强度极限 σ_b 和屈服极限 σ_s 。由原点 O 作与横轴成 45° 的直线与曲线 ACB 相交于 C ，过 C 点作横轴垂线交于 D 点，则 $OD = DC$ ，即 $\sigma_m = \sigma_a$ ，因 $\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m$ 所以有

$$OD = DC = \frac{1}{2}\sigma_0$$

这里 σ_0 为脉动循环的疲劳极限。

黑格疲劳图与史密斯疲劳图一样，曲线内任一点表示不产生疲劳破坏的交变应力，曲线外的任一点表示经有限次应力循环即产生疲劳破坏的交变应力。

1.2.4.3 疲劳极限图的方程式

用方程式来描述材料的疲劳极限线，不同的观点有不同

的假设，因此用不同的假设可将黑格疲劳图线用下列方程式近似求出：

(1) 假设疲劳极限线是经过对称循环疲劳极限 A 点和静强度极限 B 点的抛物线，或称为戈倍尔 (Gerber) 图线，如图 1.7 中的曲线 1，其方程式是

$$\sigma_s = \sigma_{-1} \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right)^2 \right]$$

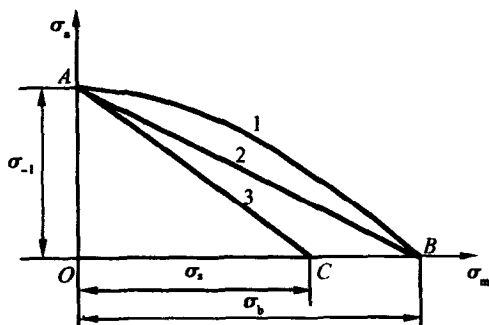


图 1.7

(2) 假设疲劳极限线是经过对称循环疲劳极限 A 点和静强度极限 B 点的一条直线，或称为古特曼 (Goodman) 图线，如图 1.7 中的曲线 2 所示，其方程是

$$\sigma_s = \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right)$$

该公式考虑平均应力的影响，而且是工程中最流行的经验公式之一。

显然，当 $\sigma_s = 0$ ，即为静载时，必有 $\sigma_m = \sigma_b$ ，其中 σ_b 为

材料的强度极限，即图 1.7 中的 B 点。

当 $\sigma_m = 0$ ，即为对称循环时，必有 (A 点) $\sigma_1 = \sigma_{-1}$ 。

(3) 假设疲劳极限线是经过对称循环疲劳极限 A 点和静屈服极限 C 点的一条直线，或称为索德倍尔格 (Soderberg) 图线，如图 1.7 中的曲线 3 所示，其方程是

$$\sigma_s = \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \right)$$

若按疲劳极限线图假定，当 σ_s 与 σ_m 落在 AOB 图形内时，不会产生疲劳破坏，即当 $\sigma_s \leq \sigma_{-1} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_b} \right)$ 时，材料或构件是安全的。如果更保守一些，当 $\sigma_s = 0$ ，若令 $\sigma_m = \sigma_s$ ，则 Goodman 方程就变为 Soderberg 方程。

上述的 Goodman 或 Soderberg 方程是对单轴应力而言，在许多工程应用中，工作应力多是二维或三维的。例如，对复杂应力状态，可采用能量等效的办法 (如 Mises 准则)，得到有效疲劳极限

$$\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_{1\max}^2 + \sigma_{2\max}^2 + \sigma_{3\max}^2 - \sigma_{1\max}\sigma_{2\max} - \sigma_{3\max}\sigma_{2\max} - \sigma_{2\max}\sigma_{3\max})^{1/2} \\ - \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_s} \right) (\sigma_{1m}^2 + \sigma_{2m}^2 + \sigma_{3m}^2 - \sigma_{1m}\sigma_{2m} - \sigma_{2m}\sigma_{3m} - \sigma_{3m}\sigma_{1m})^{1/2}$$

其中 σ_m 是主应力 σ_i ($i=1, 2, 3$) 的平均值。当然，对于单一的非零主应力，上式就简化为前述的 Soderberg 方程。

1.3 疲劳损伤积累

前面所述的疲劳都是在应力幅不变的情况下，称为等

幅疲劳。但是，多数零部件在工作中所受的循环载荷是变幅的，有些是有规则的，有些是随机变化的。对于应力幅是不变的情况，我们在上一章讨论过，而对于应力幅是变化的，即零部件承受多级载荷作用的情况（见图 1.8），可以采用积累损伤的办法来估算零部件的疲劳寿命 N_f 。

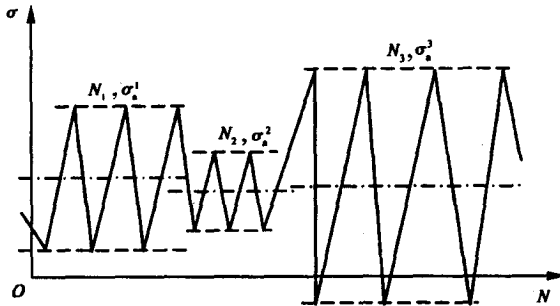


图 1.8

当材料承受高于疲劳极限的应力时，每次循环都使材料产生一定量的损伤，这种损伤是能积累的。当损伤积累到临界值时就会发生破坏，这就是疲劳损伤积累理论。

例如，如图 1.8 所示的多级载荷谱，当 $\sigma_i^{i+1} > \sigma_i^i (i=1,2,\dots)$ 时表示载荷增加，即加载；当 $\sigma_i^{i+1} < \sigma_i^i$ 则表示载荷减小，即减载。

1.3.1 损伤积累的线性公式

当整个过程中有不同的疲劳应力幅时，给出寿命估算的最简单的经验规律就是迈内尔（Miner）假设。迈内尔提出，若循环加载为一系列不同的应力幅 $\sigma_1^1, \sigma_2^2, \sigma_3^3, \dots$ ，而对应

于每一应力幅的疲劳寿命分别为 $N_{\sigma_1}, N_{\sigma_2}, N_{\sigma_3}, \dots$ 循环周次分别为 N_1, N_2, N_3, \dots 时, 则在每一应力幅作用下用掉的疲劳寿命为实际循环周次 N_i 除以寿命周次 N_{σ_i} , 即 N_i/N_{σ_i} 。设想损伤是以这样的方法积累起来的, 即损伤累积为:

$$\frac{N_1}{N_{\sigma_1}} + \frac{N_2}{N_{\sigma_2}} + \frac{N_3}{N_{\sigma_3}} + \dots = \sum_i \frac{N_i}{N_{\sigma_i}} = 1$$

此式即为著名的 Miner 线性积累损伤准则, 也称为疲劳损伤积累的线性方程式。实验表明, 加载顺序对计算结果有影响。对于增载, 一般 $\sum N_i/N_{\sigma_i} > 1$, 这是因为先加低应力, 对材料会产生低载的“锻炼”效应, 使裂纹的形成时间延时。反之, 对于减载, 一般 $\sum N_i/N_{\sigma_i} < 1$, 因为先加高应力时, 会促使材料提前形成裂纹。若在幅载荷中引入一短时过载, 有可能延长疲劳寿命 N_f 。

为了便于研究材料的损伤, 可以引入损伤变量 D

$$D = 1 - \frac{\tilde{A}}{A}$$

其物理意义是表示由于损伤而丧失承载能力的面积与初始无损伤时的原面积之比, 其中 A 是有效承载面积; \tilde{A} 是名义面积(原面积)。

当 $D = D_c$ (临界损伤变量) 时, 材料破坏, 则在 σ_a' 作用下的损伤为:

$$D_i = \frac{D_c N_i}{N_{\sigma_i}}$$

当 $N_i = N_{\sigma_i}$ 时, $D_i = D_c$, 材料破坏, 而按迈内尔(Miner)

假设有 $\sum \frac{N_i}{N_{\sigma_i}} D_c = D_c$, 即 $\sum \frac{N_i}{N_{\sigma_i}} = 1$ 。

1.3.2 损伤积累的指数公式

由于线性损伤积累准则不够准确，可以考虑 D 与 $\frac{N_i}{N_a}$ 之间是非线性关系，其中较为简单的是引入幂函数关系，即

$$D_i = \left(\frac{N_i}{N_a} \right)^\alpha D_c$$

其中 α 为常数，一般取 $D_c = 1$ 。若令 $\frac{N_i}{N_a} = B_i$ ，即称为寿命分数，则上式可改写成

$$D_i = B_i^\alpha D_c$$

在图 1.9 中，直线 OAC 代表疲劳损伤积累线性方程；曲线 OBC 表示在应力幅 σ_1^1 作用下，损伤与循环比值为指数关

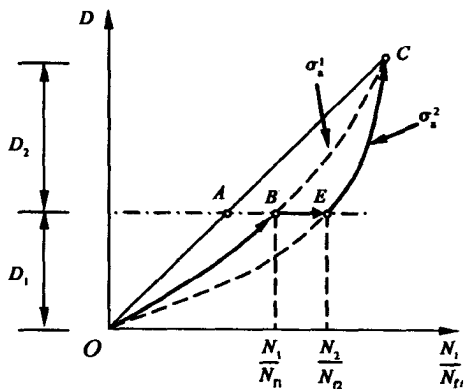


图 1.9

系的曲线；曲线 OEC 表示在应力幅 σ_2^2 作用下，损伤与循环比值为指数关系的曲线。根据损伤达到临界值即产生破坏的概念，两曲线的交点 C 表示损伤临界值的点。

若载荷顺序为先 σ_1^1 后 σ_2^2 ，且 $\sigma_1^1 > \sigma_2^2$ ，如图 1.9 所示，试求在 σ^1 作用下循环 N_1 后的剩余寿命 $N_{2\#}$ ，则有

(1) 按 Miner 关系计算，其损伤的路径为 OAC 如图 1.9 所示，因此有

$$D_c = D_1 + D_2 = 1 = \frac{N_1}{N_{f1}} + \frac{N_2}{N_{f2}}$$

则剩余寿命为

$$N_{2\#} = N_{f2} \left(1 - \frac{N_1}{N_{f1}} \right)$$

(2) 按指数关系计算，损伤路径为 OB 和 EC ，此时显然有

$$\sum \frac{N_i}{N_{fi}} = \frac{N_1}{N_{f1}} + \frac{N_2}{N_{f2}} < 1$$

今假设曲线 OBC 的指数方程为 $D = \left(\frac{N_1}{N_{f1}} \right)^{\alpha_1}$ ，曲线 OEC

的指数方程为 $D = \left(\frac{N_2}{N_{f2}} \right)^{\alpha_2}$ （这里 $\alpha_1 < \alpha_2$ ），则在一个给定的 D 上，例如在 BE 线上的 B 点和 E 点，两个方程式应该相等，即

$$D_B = \left(\frac{N_1}{N_{f1}} \right)^{\alpha_1} = D_E = \left(\frac{N_{2\#}}{N_{f2}} \right)^{\alpha_2}$$

其中 $N_{2\text{相}}$ 表示在 σ_1^1 作用下的 N_1 次相当于在 σ_2^2 作用下的 $N_{2\text{相}}$ 次，所以有

$$\frac{N_{2\text{相}}}{N_{f2}} = D_B^{1/\alpha_2}$$

又因为 $\frac{N_{2\text{相}}}{N_{f2}} = 1 - \frac{N_{2\text{相}}}{N_{f2}}$ ，所以可得剩余寿命为

$$N_{2\text{剩}} = N_{f2} \left[1 - \left(\frac{N_1}{N_{f1}} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right]$$

或写成

$$N_{2\text{剩}} = N_{f2} (1 - B_1^{\alpha_1/\alpha_2})$$

同理，若载荷顺序为先 σ^2 后 σ_1^1 ，且 $\sigma_1^1 > \sigma_2^2$ 则有在 σ_2^2 作用下循环 N_2 后的剩余寿命为

$$N_{1\text{剩}} = N_{f1} \left(1 - \frac{N_2}{N_{f2}} \right)$$

$$N_{1\text{剩}} = N_{f1} \left[1 - \left(\frac{N_2}{N_{f2}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right]$$

例 1.1 在 $\sigma_i^i (i=1,2,3)$ 作用下的 $D-B$ 关系如图 1.10 所示，且假设 $D_i = \left(\frac{N_i}{N_{fi}} \right)^{\alpha_i} = B_i^{\alpha_i}$ ，若加载顺序为 $\sigma_1^1, \sigma_2^2, \sigma_3^3$ ，试求已知加载循环 N_1, N_2 后的剩余寿命 $N_{3\text{剩}}$ 。