中国科学院规划教材

南开大学数学教学丛书

数 学 分 析

(上册)

(第二版)

李成章 黄玉民 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是南开大学数学系老师在多年教学经验的基础上编写而成的，是一本大学数学系基础课程的教材.

本书分上、下两册，介绍了数学分析的基本内容.上册内容主要包括实数与函数、极限、连续函数、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用、数项级数、广义积分、函数项级数；下册内容主要包括多元函数的极限与连续、多元函数的微分学、参变量积分、重积分、曲线积分与曲面积分.本书每章中都附有丰富的习题，供学生练习之用.第二版在第一版的基础上作了修订，对部分题目作了解答，使本书更具适用性.

本书可供高等院校数学系学生用作教材，也可供数学教学和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上、下) 李成章，黄玉民编. -2版.—北京：科学出版社，2004
(中国科学院规划教材·南开大学数学教学丛书)
ISBN 7-03-013004-9

Ⅰ.数… Ⅱ.①李…②黄… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第015160号

责任编辑：林 鹏 李鹏奇 责任校对：黄 玲
责任印制：安春生 封面设计：黄华斌

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1999年5月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年7月第 二 版 印张：49 3/4
2004年7月第五次印刷 字数：958 000
印数：11 001—14 000

定价：59.00元(上、下册)
(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

丛书第一版序

海内外炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国,也就是"实现中国数学的平等和独立"[①].平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的,要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生.这批人不在多,而在精,要层次高.也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强.

20 世纪 80 年代中期,国家采纳了陈省身先生的几个建议,建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生,需要建立数学专业的试点班.经过胡国定先生等的努力,1986 年南开大学建立了数学专业的试点班.这些做法取得了成功,并在基础学科的教学中推广.1990 年全国建立"国家理科基础学科研究和教学人才培养基地",其后南开大学数学专业成为基地之一.从 1986 年到现在的 10 余年中南开数学专业是有成绩的,例如他们四次参加全国大学生数学竞赛获三次团体第一,一次团体第三.在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖.毕业生百分之八十继续攻读研究生,其中许多人取得了很好的成绩.

当然,取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开的,是与国内外同行们的支持与帮助分不开的.如杨忠道、王叔平、许以超、虞言林、李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订,或到南开任教等等.有了他们的指导、帮助与支持,南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验,并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新.

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材,诸位编著者长期在南开数学专业任教,不断地把自己的心得体会融合到基础知识和基本理论的讲述中去,日积月累地形成了这套教材.可以说这些教材不是"编"出来的,而是在长期教学中"教"出来的、"改"出来的,凝聚了我们的不少心血.这些教材的共同点,也是我们教学所遵循的共同点是:首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学;同时又要适当地开拓知识面,尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法;教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力,因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法,也有一些习题是为了训练学生解题技巧与钻研数学的能力.

---

① 陈省身:在"二十一世纪中国数学展望"学术讨论会开幕式上的讲话.

我们要感谢科学出版社主动提出将这套教材出版.这对编著者是件大好事.编著者虽然尽了很大努力,但一则由于编著者的水平所限,二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中,因此这套教材中缺欠和不足肯定存在.我们诚挚希望各位同行不吝指正,从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长,进而扬长避短,改进我们的教学.同时通过这套教材也可向同行们介绍南开的教学经验以供他们参考,或许有益于他们的工作.

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们,同时也希望能继续得到他们的帮助.办好南开的数学专业,办好所有学校的数学专业,把中国数学搞上去,使中国成为数学大国是我们的共同愿望!这个愿望一定能实现!

全体编著者

1998 年 6 月于南开大学

丛书第二版序

《南开大学数学教学丛书》从 1998 年面世以来,已经印刷了好几次,并均已售完,同时还有读者希望买到这些书. 这期间正如我们的初衷一样,得到了许多老师、同学、同行的帮助. 现在,我们的教学与当初已不尽相同,为了继续得到大家的帮助,与大家继续交流,对这些书作一些修改是很有必要的. 因此科学出版社提出再版这套丛书是很适时的,是对我们的巨大支持,我们要借此机会表示感谢.

2002 年,第 24 届国际数学家大会于 8 月 20 日至 28 日在中国北京举行并取得圆满成功. 这是中国第一次主办国际数学家大会,也是发展中国家第一次主办这一大会. 在大会期间,陈省身先生曾说,中国已经成为“数学大国”.

陈省身先生还说:“21 世纪数学的发展是很难预测的,它一定会超越 20 世纪,开辟出一片崭新的天地,希望中国未来的数学家能够成为开辟这片新天地的先锋.”

在数学已成为高科技的基础和现代文明标志之一的今天,我们不能满足于“中国数学的平等和独立”,即数学大国的地位,而是要成为开辟数学新天地的先锋,即要争取“数学强国”的地位.

我们清楚地知道,“数学大国”并不等于“数学强国”. 为使今天的“数学大国”成为明天、后天以至永远的“数学强国”,当然要从多方面努力,数学教育是不可或缺的重要方面. 我们既需要高质量的、稳定的数学教育,又需要不断推陈出新、不断发展的数学教育. 这是一个艰巨的任务,这个任务历史地落在一代又一代年轻人的肩上.

在中国的数学教育上,也就是争取成为“数学强国”的过程中,我们如果能够“润物”,虽然“无声”也将心满意足. 因此我们既高兴看到《南开大学数学教学丛书》今天能够生存和发展,又更高兴地期待明天它被更新、更好的教材取而代之.

我们也相信经过大家不懈的努力,中国未来的数学家一定会是开辟数学新天地的先锋.

全体编者
2004 年 3 月于南开大学

目　　录

(上册)

第一章　实数与函数

数学分析研究的对象是实函数,即以实数为自变量且在实数中取值的函数.极限、导数和积分的所有理论都是对这种函数建立的.为了顺利地建立以后的各种理论,本章先较系统地介绍实数与实函数的有关知识.

§1.1　实　　数

所有自然数的集合,所有整数的集合,所有有理数的集合和所有实数的集合分别为 N,Z,Q 和 R.众所周知,$N \subset Z \subset Q \subset R$.在中学数学中,已经较为全面地接触到实数及其运算性质、序性质等.现在,我们把它们开列于下并不加证明地补充一些进一步的性质,以作为本书内容的出发点.

(i) 实数的四则运算封闭性.任何两个实数之间可以进行加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算,运算的结果和、差、积、商仍为实数.

(ii) 实数的序性.

a) 对于任何两个实数 a 和 b,下列三种关系:

$$a < b,\quad a = b,\quad a > b$$

恰有一个成立.

b) 对于任何实数 a, b, c,若 $a \leq b$,则 $a + c \leq b + c$;若 $a \leq b$, $c \geq 0$,则 $ac \leq bc$.当条件为严格不等式时,结论也是严格不等式.

(iii) 有理数和无理数在实数系中的稠密性.任何两个不同的实数之间既有有理数又有无理数.

(iv) 阿基米德(Archimedes)公理:若 a 和 b 是两个正实数且 $a < b$,则必存在 $n \in N$,使得 $na > b$.

(v) 实数的连续性.设 A 和 B 是 R 的两个子集,满足条件 $A \cup B = R$,$A \cap B = \varnothing$,$A \neq \varnothing$,$B \neq \varnothing$ 且对任何 $a \in A$,$b \in B$,都有 $a < b$,则称(A, B)为 R 的一个分割.对于 R 的任何分割,都存在惟一的 $x^* \in R$,使对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$,都有 $a \leq x^* \leq b$.这个性质称为戴德金(Dedekind)连续性公理.

这条公理说的是"实数没有空隙".有理数不具备这种性质.

此外,关于实数系还有确界存在原理,将在下节给出.还有单调收敛定理、柯西收敛原理、区间套定理、有限覆盖定理和致密性定理等重要性质,将在第二、三章中陆续加以介绍.

实数可以和一条直线上的点一一对应,后者通常称为实数直线或实数轴.今后将经常用实数轴上的点来代表实数并在各种讨论中不加区别地使用.

设 a 和 b 是两个实数且 $a<b$.将集合$\{x|a<x<b\}$, $\{x|a\leq x<b\}$, $\{x|a<x\leq b\}$, $\{x|a\leq x\leq b\}$分别记为(a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$并称之为区间.(a,b)称为开区间,$[a,b]$称为闭区间,$[a,b)$和$(a,b]$称为半开半闭区间.此外,引入记号$-\infty$和$+\infty$,分别表示负无穷大和正无穷大,简称为负无穷和正无穷.

对于任何 $x\in R$,都有$-\infty<x<+\infty$.注意,$-\infty$和$+\infty$只是记号而不是实数.推广区间的概念,把$(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$和$(-\infty,+\infty)$都称为无穷区间.$(-\infty,b)$和$(a,+\infty)$是开区间,$(-\infty,b]$和$[a,+\infty)$是闭区间,而$(-\infty,+\infty)$是既开又闭的区间.

§1.2　有　界　集

首先,我们来介绍有界集和无界集的概念.

定义 1.2.1　设集 $X\quad R$, $X\neq\quad$.

(i) 若存在 $M\in R$,使对任何 $x\in X$,都有 $x\leq M$,则称集 X 是有上界的,并称 M 为 X 的一个上界;

(ii) 若存在 $m\in R$,使对任何 $x\in X$,都有 $x\geq m$,则称集 X 是有下界的,并称 m 为 X 的一个下界;

(iii) 既有上界又有下界的集合称为有界集.

例如,无穷区间$(-\infty,0)$是有上界的.每个非负数都是它的上界.自然数集 N 是有下界的,所有不超过 1 的实数都是它的下界.区间$(0,1]$是有界集. 0 是它的一个下界,而 1 是它的一个上界.

显然,如果集 X 有上(下)界,则它有无穷多个上(下)界.

一个不是有上(下)界的集称为无上(下)界集.对此,还可正面给出定义如下:

定义 1.2.2　设 $X\quad R$.

(i) 若对任何 $M\in R$,都存在 $x_M\in X$,使得 $x_M>M$,则称集 X 是无上界的;

(ii) 若对任何 $m\in R$,都存在 $x_m\in X$,使得 $x_m<m$,则称集 X 是无下界的;

(iii) 无上界集和无下界集统称无界集.

例如,自然数集 N 是无上界集,Z 是既无上界又无下界的无界集.

其次,我们介绍两个今后经常用到的符号.如果集 X 中有最小元 m 或最

大元 M,则它们可分别记为

$$m = \min X, \quad M = \max X.$$

例如,$\min\{1,2,3\} = 1$,$\max\{1,2,3\} = 3$;$\min N = 1$;$\max(0,1] = 1$ 等等.但是 $\max N$ 和 $\min(0,1]$没有意义,因为它们不存在.所以 $\min X$ 有两层意义:一是表示 X 的最小元存在;二是表示这个最小元.$\max X$ 的意义也与此类似.

设 X 为有界集,于是存在下界 m_1 和上界 m_2 使对所有 $x\in X$,都有

$$m_1 \leq x \leq m_2.$$

令 $M = \max\{|m_1|,|m_2|\}$,则对所有 $x\in X$,都有

$$|x| \leq M.$$

反之,若存在 $M > 0$,使对所有 $x\in X$,都有

$$|x| \leq M,$$

则 $-M\leq x\leq M$,即 $-M$ 为 X 的一个下界而 M 为 X 的一个上界,从而 X 为有界集.这一点可以写成如下的定理.

定理 1.2.1 集 X R 为有界集的充分必要条件是存在 $M > 0$,使对所有 $x\in X$,都有$|x|\leq M$.

当 X 为有限集时,X 中既有最小元又有最大元.但当 X 为无限集时,就不一定有最小元和最大元了.作为一个特例是无限集 N 中有最小元 1.当然,N 的任何无限子集中也都有最小元.这两条正是中学数学奥林匹克中常用的极端原理的理论基础.

下面,我们来考察另一种无限集,前面说过,一个有上界的集合 X 有无穷多个上界,这些上界所成的无限集称为 X 的上界集.显然,这个集合是有下界而无上界的.它当然没有最大元,问题在于它是否有最小元.答案是肯定的.

定义 1.2.3 (i)如果集 X 的上界集中有最小元,则称之为集 X 的上确界,记为 $\sup X$;

(ii) 如果集 X 的下界集中有最大元,则称之为集 X 的下确界,记为 $\inf X$.

注意,集 X 的上确界和最大元有联系,但却不是一回事,下确界和最小元的关系也完全类似.例如,区间$[0,1)$的上、下确界分别为 1,0,它的最大元不存在而最小元为 0,等于它的下确界.这个例子的情形具有一般性,即当最小元和最大元存在时,就分别是该集的下确界和上确界.但在最小元或最大元不存在时,只要集合是下方有界或上方有界的,它就总有下确界或上确界.

定理 1.2.2 任何有上界的非空集必有上确界.

证 设集 X R 有上界 M,$X\neq$.设 B 为 X 的上界集,于是 $B\neq$.再令 $A = R - B$,于是 $A\neq$ 且(A, B)为 R 的一个分割.从而由戴德金连续性公

理知有惟一的 x^*.使对任何 $a\in A$ 和 $b\in B$,都有

$$a\leq x^*\leq b. \tag{1.2.1}$$

往证 x^* 为 X 的上界.若不然,则存在 $x_0\in X$ 使得 $x^*<x_0$.于是有

$$x^*<\frac{x^*+x_0}{2}<x_0. \tag{1.2.2}$$

按定义知$\frac{x^*+x_0}{2}$不是 X 的上界,所以$\frac{x^*+x_0}{2}\in A$.由(1.2.1)式又有$\frac{x^*+x_0}{2}\leq x^*$,此与(1.2.2)式矛盾.从而 x^* 为 X 的上界,即有 $x^*\in B$.

因为 $x^*\in B$,且由(1.2.1)式知于任何 $b\in B$,都有 $x^*\leq b$,故 x^* 为 B 中的最小元,即 x^* 为 X 的上确界.

同样地可以证明以下定理.

定理 1.2.2′ 任何有下界的集必有下确界.

上面我们用戴德金连续性公理证明了定理 1.2.2.事实上,若把定理 1.2.2 视为公理,则又可用它来证明戴德金连续性公理.

设(A,B)为 R 的任一分割,由定理 1.2.2 知 A 有上确界 x^*.按定义知对于任何 $a\in A$,都有 $a\leq x^*$.又按分割定义知对于任何 $b\in B$,b 都是 A 的上界,从而 $x^*\leq b$.

若还有 $x_0\in R$,$x_0\neq x^*$,使对任何 $a\in A$ 和 $b\in B$,都有 $a\leq x_0\leq b$.不妨设 $x_0>x^*$,于是

$$x^*<\frac{x^*+x_0}{2}<x_0.$$

从而$\frac{x^*+x_0}{2}\in R$ 既不能属于 A 也不能属于 B,矛盾.这就证明了满足要求的 x^* 的惟一性.

这表明戴德金连续性公理和定理 1.2.2 是等价的.实际上,许多书中就是不讲戴德金公理而直接把定理 1.2.2 作为公理的.以后我们将定理 1.2.2 称为确界存在原理.容易看出,这是前述的极端原理在包括连续无限集的情形的推广.

设 $M=\sup X$,即 M 是集 X 的上确界,这有两层意义:第一,M 是 X 的上界,即对所有 $x\in X$,都有 $x\leq M$;第二,M 是 X 的所有上界中最小的,即对任何 $\varepsilon>0$,$M-\varepsilon$ 都不再是 X 的上界,亦即对任何 $\varepsilon>0$,都存在 $x_\varepsilon\in X$,使得 $x_\varepsilon>M-\varepsilon$.

反之,如果 $M\in R$ 满足上述两个条件,则 M 为 X 的最小上界,即上确界.

定理 1.2.3 M 为集 X 的上确界的充分必要条件是

(i) 对任何 $x\in X$,都有 $x\leq M$;

(ii) 对任何 $\varepsilon>0$,都存在 $x_\varepsilon\in X$,使得 $x_\varepsilon > M-\varepsilon$.

类似地,关于下确界有

定理 1.2.4　m 为集 X 的下确界的充分必要条件是

(i) 对任何 $x\in X$,都有 $x\geq m$;

(ii) 对任何 $\varepsilon>0$,都存在 $x_\varepsilon\in X$,使得 $x_\varepsilon < m+\varepsilon$.

此外,我们约定,分别用 $\sup X=+\infty$,$\inf X=-\infty$来表示集 X 无上界和无下界.这是一种借用,不能认为是上确界为 $+\infty$和下确界是 $-\infty$.

例 1.2.1　设 $X=\left\{\frac{x-1}{x}\cos x \,\middle|\, x\in(0,+\infty)\right\}$. 求证 $\sup X=1$, $\inf X=-\infty$.

证　因为

$$\frac{x-1}{x}\cos x\leq\begin{cases}0, & 当\ 0<x\leq 1,\\ 1, & 当\ 1<x<+\infty,\end{cases}$$

所以,1 是 X 的一个上界.

此外,对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $n_0\in N$,使得 $n_0>\frac{1}{2\pi\varepsilon}$,于是有

$$\frac{1}{2n_0\pi}<\varepsilon,\ 1-\frac{1}{2n_0\pi}>1-\varepsilon$$

又因 $\cos 2n_0\pi=1$,故有

$$\frac{2n_0\pi-1}{2n_0\pi}\cos 2n_0\pi=1-\frac{1}{2n_0\pi}>1-\varepsilon$$

令 $x_\varepsilon=2n_0\pi$,则上式表明

$$\frac{x_\varepsilon-1}{x_\varepsilon}\cos x_\varepsilon>1-\varepsilon$$

由定理 1.2.3 知 1 是 X 的上确界,即有 $\sup X=1$.

另一方面,对于任何实数 $m\leq-1$,令 $x_m=-\frac{1}{4m}>0$,于是有 $x_m\leq\frac{1}{4}<\frac{\pi}{3}$.故有

$$\frac{x_m-1}{x_m}\cos x_m=1-\frac{1}{x_m}\cos x_m<\frac{1}{2}(4m+1)<m.$$

这表明 X 无下界,亦即有 $\inf X=-\infty$.

例 1.2.2　设 $X=\{n^{(-1)^n}\mid n\in N\}$,求证 $\sup X=+\infty$,$\inf X=0$.

证　对于任给的 $M\in R$,取正偶数 $n_0>M$,于是有

$$n_0^{(-1)^{n_0}} = n_0 > M.$$

按定义知集 X 无上界,亦即有 $\sup X = +\infty$.

另一方面,因为

$$n^{(-1)^n} > 0,\quad n \in N,$$

所以,0 是集 X 的一个下界.

对于任给的 $\varepsilon > 0$,取正奇数 $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$,于是有

$$n_\varepsilon^{(-1)^{n_\varepsilon}} = \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon = 0 + \varepsilon$$

按定理 1.2.4 知 0 是集 X 的下确界,亦即有 $\inf X = 0$.

§1.3　函　　数

在中学数学中,我们所遇到的函数主要是下列六类函数以及由它们派生出来的一些较为复杂的函数.这常用的六类函数如下:

(i) 常数函数 $y = C$;

(ii) 幂函数 $y = x^\alpha$;

(iii) 指数函数 $y = a^x$;

(iv) 对数函数 $y = \log_a x$;

(v) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$;

(vi) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

这六类函数统称为基本初等函数.在本书中,它们仍将是我们研究的主要对象.

这些函数的定义域各不相同,变化规律也各不相同,图形曲线的形状也各不相同,但是它们却又有着共同的特点,即对它们各自定义域中的每个 x,都是通过某个一定的、统一的法则对应于一个 y 值,而且这个对应关系都可以写成一个统一的解析表达式.实际上,这正是函数概念出现以后相当长时间内人们对函数概念的认识.

“函数”一词是微积分的创始人之一莱布尼茨(Leibniz)最先使用的,并且把 x 的函数记为 $f(x)$, $\varphi(x)$等.但是,直到 19 世纪初,人们还是把函数理解为‘变量和常数组成的解析表达式”.直到 1834 年,狄利克雷(Dirichlet)指出,函数 y 与变量 x 的关系不但不必用统一的法则在全区间上给出,而且可以不用解析式来给出.至此,函数的概念才被赋予了单值对应的意义.

定义 1.3.1　设集 $X \subset R$.如果有一个从 X 到 R 的对应法则 f,使对每个

$x\in X$,在对应法则 f 之下都有惟一的 $y\in R$ 与 x 对应,则称这个对应法则 f 是 X 上的一个函数,并称 X 为函数 f 的定义域,称 $R(f)=\{y|y=f(x),x\in X\}$为函数 f 的值域.这时,$y=f(x)$称为 x 的像,而 x 称为 y 的原像.函数 $y=f(x)$的定义域记为 $D(f)$. x 是函数 $y=f(x)$的自变量,y 是函数的因变量.

简单地说,函数就是由定义域到它的值域的一个单值对应.如果两个函数的对应关系一致而定义域不同,则对应关系的适用范围也不同,从而两个函数是不同的.例如 $f(x)=x^2$, $D(f)=(-\infty,+\infty)$和 $g(x)=x^2$, $D(g)=[0,+\infty)$就是两个不同的函数.但显然二者之间又有着密切的联系,函数 $y=g(x)$称为 $y=f(x)$在$[0,+\infty)$上的限制,而函数 $y=f(x)$称为 $y=g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的延拓.一般地,若有 $y=F(x)$, $D(F)=X_1$, $y=f(x)$, $D(f)=X_2$, $X_2\subset X_1$ 且在 X_2 上,$F(x)\equiv f(x)$,则称 $F(x)$为 $f(x)$在 X_1 上的延拓,称 $f(x)$为 $F(x)$在 X_2 上的限制.

下面给出几个初等数学中未曾出现过的但在数学分析中颇为常用的函数的例子.

例 1.3.1　设集 $A\subset R$,令

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A,\\ 0, & \text{当 } x\notin A,\end{cases}$$

则得到一个函数 $y=\chi_A(x)$,它的定义域是 R.而当 A 非空且又不是整个 R 时,它的值域是$\{0,1\}$.

函数$\chi_A(x)$称为集 A 的特征函数.特别地,当 $A=Q$ 时,特征函数$\chi_Q(x)$称为狄利克雷函数,记为 $D(x)$.这时有

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

例 1.3.2　函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & \text{当 } x<0,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ 1, & \text{当 } x>0\end{cases}$$

称为符号函数.显然,对任何 $x\in R$,都有

$$x=|x|\operatorname{sgn} x.$$

如果令 $A_1=(-\infty,0)$, $A_2=(0,+\infty)$,则有

$$\operatorname{sgn} x=\chi_{A_2}(x)-\chi_{A_1}(x),$$

即符号函数 sgn x 可以写成两个特征函数之差.

一般地,有限多个特征函数的线性组合

$$\lambda_1 \chi_{A_1}(x) + \lambda_2 \chi_{A_2}(x) + \cdots + \lambda_n \chi_{A_n}(x)$$

称为阶梯函数,其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都是实常数, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $\mathbf{R}$ 的 n 个子集.特别地,当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 恰为一个有限闭区间所划分成的 n 个小区间时,所表达的阶梯函数正是定积分中所常用的近似函数.

例 1.3.3　函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & \text{当 } x = \dfrac{q}{p},\ q \in \mathbf{Z},\ p \in \mathbf{N}, (p, q) = 1, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

称为黎曼(Riemann)函数.

$D(x)$和 $R(x)$都是画不出精确的函数图形的,但它们的单值对应关系是明确的,所以它们都是名符其实的函数.

例 1.3.4　函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

也是一个有用的函数,我们将在第四章中再遇到它.

例 1.3.5　函数

$$f(x) = \sin x$$

仅当 $\sin x \geq 0$ 时才有意义,所以它的定义域是$[2n\pi, (2n+1)\pi]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$,值域为$[0,1]$.

顺便指出,以后遇到的初等函数或更一般的由解析表达式给出的函数时,大多数都不指出定义域.这时就理解函数的定义域是使函数表达式有意义的所有 x 所组成的实数集,就像例 1.3.5 中那样.

注意,尽管我们所遇到的大量函数关系都是由公式表示的,但这只是形式,并非函数的实质.函数定义中只要求单值对应,而不管它的表现形式如何.例如,一昼夜的气温是随时间变化的,而且气象台的现代化仪器可以在记录纸上描绘出一条连续曲线来表达这种函数关系,但却写不出明确的表达式.气温当然是时间的函数.同样地,一个人身高和体重也都是时间的函数,因为二者都有确确实实的单值对应关系.

考察方程

$$e^y + y - x - \arctan x = 0, \tag{1.3.1}$$

当然还可以把它改写成

$$e^y + y = x + \arctan x. \tag{1.3.2}$$

显然,(1.3.2)式左端是 y 的严格递增函数而右端是 x 的严格递增函数且值域都是$(-\infty, +\infty)$.因此,对于每个 $x\in R$,都可求得惟一的 y 使(1.3.1)式成立.这就建立了一个从 x 到 y 的单值对应.按定义知,这就确定了一个函数 $y=f(x)$.这个函数就称为由方程(1.3.1)确定的隐函数.

一般地,设有方程

$$F(x, y) = 0. \tag{1.3.3}$$

如果能够在实数集 X 上,在关于 y 的某些限制之下,使对每个 $x\in X$,都能惟一地确定一个 y 值使(1.3.3)式成立,则就令这个 y 与 x 对应.从而确定了一个函数 $y=f(x)$,满足

$$F(x, f(x)) = 0.$$

于是就称函数 $y=f(x)$为由方程(1.3.3)所确定的隐函数.相对地,以前由解析表达式给出的函数 $f(x)$则称为显函数.

对于隐函数,有时可以解出明显表达式而化成显函数,有时则无法解出.例如,方程(1.3.1)所确定的隐函数就无法解出,而椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{1.3.4}$$

在限制条件 $y\geq 0$ 和 $y\leq 0$ 之下可分别解出两个隐函数

$$y = \frac{b}{a}\quad a^2 - x^2, \ y = -\frac{b}{a}\quad a^2 - x^2.$$

注意,方程(1.3.3)中的 x 和 y 同为未知数,并未规定哪个是自变量,哪个是因变量.考虑隐函数时把二者分为自变量和因变量,是为适应函数定义而后加上的.实际上,也可以把 y 视为自变量而把 x 视为因变量而得到隐函数.例如方程(1.3.4)还可以在 $x\geq 0$ 和 $x\leq 0$ 的限制条件下分别解出两个隐函数.

$$x = \frac{a}{b}\quad b^2 - y^2, \ x = -\frac{a}{b}\quad b^2 - y^2.$$

这里,我们只是给出了隐函数的定义并举例说明了它确实能存在.但隐函数究竟在什么条件下存在则没有指出,也不可能指出.关于这一点,将在多元函数微分学中做进一步的研究.

考察曲线的参数方程

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ \alpha \leq t \leq \beta \tag{1.3.5}$$