模 糊 值 测 度 论

张广全 著

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

该书系统地论述了作者近几年来在模糊数和模糊测度等方面的研究成果,并且初步建立了模糊值测度论的框架. 全书分三部分共 10 章,第一部分讨论模糊集合与模糊数的模糊极限的基本理论;第二部分讨论模糊集合上的模糊值测度的性质、扩张、分解、弱收敛,以及模糊值可测函数序列的收敛和模糊积分性质;第三部分讨论模糊值模糊测度的渐近结构特征、扩张及模糊值模糊可测函数序列的各种收敛性和模糊值模糊积分序列收敛,最后讨论模糊值模糊积分定义模糊值模糊测度的遗传性.

本书供从事模糊数学理论与应用研究的专业人员阅读,可作为模糊数学方向及相关专业的高年级大学生、研究生的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

模糊值测度论/张广全著.—北京:清华大学出版社,1997

ISBN 7-302-02749-8

Ⅰ.模… Ⅱ.张… Ⅲ.模糊集-测度论 Ⅳ.0159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 25500 号

出版者: 清华大学出版社 (北京清华大学校内,邮编 100084)

因特网地址: www.tup.tsinghua.edu.cn

责任编辑: 魏荣桥

印刷者: 北京市清华园胶印厂

发行者: 新华书店总店北京科技发行所

开　本: 850×1168 1/32　印张: 14.5　字数: 376 千字

版　次: 1998 年 4 月 第 1 版　1998 年 4 月 第 1 次印刷

书　号: ISBN 7-302-02749-8/O·189

印　数: 0001～2000

定　价: 22.80 元

目　　录

第一部分　模糊集合与模糊数

第二部分　模糊值测度与模糊值积分

第三部分　模糊值模糊测度与模糊值模糊积分

第 一 部 分

模糊集合与模糊数

第 1 章　模 糊 集 合

1.1　模糊集合的定义与运算

1.1.1　经典集合与特征函数

集合论是现代数学的基础,集合可以表现概念.

当我们讨论一个具体问题时,总是将自己讨论的对象限制在一个特殊的范围内 . 称这个特殊的范围为基本集合或论域,记为 X,X 中的一部分称为 X 中的子集,记为 A、B、C、…. 称 X 中的对象为元素,记为 x. 如果 x 属于 A,记为 $x \in A$. 如果 x 不属于 A,记为 x | A,以　表示空集,X 表示全集.

设 p 是任意给定的一个性质,p(x) 表示“x 具有性质 p ”,则

$$A = \{x; p(x)\}.$$

表示 X 中具有性质 p 的全体元素构成的子集.

设 A、B 是 X 中的两个子集. 如果 $x \in A$ 时必有 $x \in B$,称 A 含于 B,或 B 包含 A,记为 A　B. 显然,包含关系具有以下性质:

(1) 自反性: A　A;

(2) 对称性: 如果 A　B,B　A,则 A = B;

(3) 传递性: 如果 A　B,B　C,则 A　C.

设 X 是论域,记

$$\mathrm{P}(X) = \{A; , A \quad X\},$$

称 P(X) 为 X 的幂集,约定　、$X \in \mathrm{P}(X)$.

设 $A, B \in \mathrm{P}(X)$,记

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A^c = \{x; x \in X \text{ 且 } x \notin A\},$$

$A \cup B$ 与 $A \cap B$ 分别称为 A 与 B 的并集与交集, A^c 称为 A 的补集. 显然, $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, c)$ 具有以下性质:

(1) 封闭性: $A \cup B, A \cap B, A^c \in \mathcal{P}(X)$;

(2) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(3) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(4) 单位元存在性: $A \cup \emptyset = A, A \cap X = A$;

(5) 互补律: $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset$;

(6) 吸收律: $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$;

(7) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(8) 幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A$;

(9) 两极律: $A \cup X = X, A \cap \emptyset = \emptyset$;

(10) 对合律: $(A^c)^c = A$;

(11) 对偶律: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

如果 $B_t \in \mathcal{P}(X)$ ($t \in T$, T 是一个任意指标集), (7) 和 (11) 有下面的更一般的形式:

(7′) $A \cup \left(\bigcap_{t \in T} B_t\right) = \bigcap_{t \in T} (A \cup B_t), A \cap \left(\bigcup_{t \in T} B_t\right) = \bigcup_{t \in T} (A \cap B_t)$;

(11′) $\left(\bigcup_{t \in T} B_t\right)^c = \bigcap_{t \in T} B_t^c, \quad \left(\bigcap_{t \in T} B_t\right)^c = \bigcup_{t \in T} B_t^c$,

其中

$\bigcup_{t \in T} B_t = \{x;$ 存在 $t \in T$, 使得 $x \in B_t\}$,

$\bigcap_{t \in T} B_t = \{x;$ 对于任何 $t \in T$, 都有 $x \in B_t\}$.

从上面的性质, 我们可以看到, 在任何集合运算的公式中, 将 $\cup$ 与 $\cap$ 互换, 公式仍然成立. 这即是集合论中的对偶性原则.

设 $A \in \mathcal{P}(X)$, 称

$$A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

为 A 的特征函数. 记

$$\mathcal{F}_0(X)=\{A(\cdot);A(\cdot):X\to\{0,1\}\}.$$

设 $A(\cdot),B(\cdot)\in\mathcal{F}_0(X)$, 记

$$A(\cdot)\vee B(\cdot)=\max(A(\cdot),B(\cdot)),$$

$$A(\cdot)\wedge B(\cdot)=\min(A(\cdot),B(\cdot)),$$

$$A^c(\cdot)=1-A(\cdot).$$

容易证明

$$(\mathcal{P}(X),\cup,\cap,c)\cong(\mathcal{F}_0(X),\vee,\wedge,c).$$

1.1.2 模糊集合的定义

设 X 是经典集合.

定义 1.1.1 设映射 μ_A: $X\to[0,1]$, $x\mapsto\mu_A(x)$. 我们说 μ_A 确定一个 X 的模糊子集 A. μ_A 称为 A 的隶属函数, $\mu_A(x)$ 称为 x 对于 A 的隶属度. 由于模糊集合是由它的隶属函数唯一确定的, 所以, 我们用 $A(\cdot)$ 来代替 μ_A.

显然, 模糊集合是经典集合的一般化, 经典集合就是它的隶属函数的值域是{0, 1}的特殊情况, 这时的隶属函数就是经典集合的特征函数.

记

$$\mathcal{F}(X)=\{A;A: X\to[0,1]\},$$

称 $\mathcal{F}(X)$ 为 X 的模糊幂集.

例 1.1.1 以人的年龄作为论域, X, L. A. Zadeh 给出"年老"O 与"年青"Y 两个模糊集合, 它们的隶属函数分别是

$$O(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 50,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & x>50;\end{cases}$$

$$
Y(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<x,\end{cases}
$$

图 1.1.1 给出“年老”与“年青”的隶属函数图象. 对于“年老”O 来说, O(60) = 0.8, O(80) = 0.97, 表示 60 岁的年龄属于“年老”的隶属度是 80%, 80 岁的年龄属于“年老”的隶属度是 97%. 对“年青”Y 来说, Y(60) = 0.02, Y(80) = 0.0082. 表示 60 岁的年龄属于“年青”的隶属度是 2%, 80 岁的年龄属于“年青”的隶属度是 0.82%. 故认为 60 岁和 80 岁是比较年老的. 而且 80 岁比 60 岁更老.

图 1.1.1

当基本论域为 R^1 时, 常用下面三种标准函数表示模糊集合的隶属函数.

(1) S 函数(偏大型隶属函数, 见图 1.1.2)

图 1.1.2

$$S(x;a,b)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & a<x\le\dfrac{a+b}{2},\\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2, & \dfrac{a+b}{2}<x\le b,\\ 1, & b<x.\end{cases}$$

$S(x;a,b)$是 x 的连续函数,且当 $x=\frac{a+b}{2}$时,$S(x;a,b)=\frac{1}{2}$.$S(x;a,b)$是 x 的单增函数.“年老”O 可以定义为

$$O(x)=S(x;50,80).$$

(2) Z 函数(偏小型隶属函数,见图 1.1.3)

图 1.1.3

$$Z(x;a,b)=1-S(x;a,b),$$

$Z(x;a,b)$是连续的单调减函数,且当 $x=\frac{a+b}{2}$时,$Z(x;a,b)=\frac{1}{2}$.

“年青”Y 的隶属函数可以表示为:

$$Y(x)=Z(x;25,60).$$

(3) π函数(中间型隶属函数,见图 1.1.4)

$$\pi(x;a,b)=\begin{cases}S(x;b-a,b), & x\le b,\\ Z(x;b,b+a), & x>b.\end{cases}$$

$\pi(x;a,b)$是 x 的连续函数,且当 $x=b$ 时,$\pi(x;a,b)=1$.当 $x\le b$ 时,$\pi(x;a,b)$是单调增函数;当 $x\ge b$ 时,$\pi(x;a,b)$是单调减函数.$\pi(x;a,b)$是关于 $x=b$ 对称的.“中年”M 的隶属函数可以表

图 1.1.4

示为:

$$M(x) = \pi(x;10,40).$$

模糊集合的表示方法有很多.一般地可以表示为

$$A = \{(x, A(x)); x \in X\}.$$

(1) 当 X 是有限集或可数集时,采用 L.A.Zadeh 记法, A 可以写成

$$A = \sum A(x_i)/x_i.$$

(2) 当 X 是有限集时, A 可以写成

$$A = (A(x_1), A(x_2), \cdots, A(x_n)),$$

即将 X 的元素排上次序,将第 k 个元素 x_k 的隶属度 $A(x_k)$ 作为模糊向量 A 的第 k 个分量.

(3) 当 X 是无限不可数集时, Zadeh 记法推广为

$$A = \int_X A(x)/x.$$

注意:此处积分号不表示积分, $\sum$ 也不表示求和,而是表示各个元素与其隶属度的对应关系的总括."/"也不表示除,而是表示在 x 点对应它的隶属度 A(x).

1.1.3 模糊集合的运算及其性质

定义 1.1.2 设 $A, B \in \mathcal{F}(X)$. 我们定义:

(1) **如果对于任意的** $x \in X$, **有** $A(x) \leq B(x)$, **则称** A **含于** B, **或** B **包含** A, **记为** A B;

(2) **如果对于任意的** $x \in X$, **有** $A(x) = B(x)$, **则称** A **等于** B, **记为** $A = B$;

(3) A **与** B **的并记为** $A \cup B$, **其隶属函数为**(**见图** 1.1.5):

$$\begin{aligned}(A \cup B)(x) &= A(x) \vee B(x) \\ &= \max(A(x), B(x));\end{aligned}$$

图 1.1.5

(4) A **与** B **的交记为** $A \cap B$, **其隶属函数为**(**见图** 1.1.6);

图 1.1.6

$$\begin{aligned}(A \cap B)(x) &= A(x) \wedge B(x) \\ &= \min(A(x), B(x));\end{aligned}$$

(5) A **的补模糊集合记为** A^c, **其隶属函数为**(**见图** 1.1.7):

图 1.1.7

$$A^c(x) = 1 - A(x).$$

设 T **是任意指标集**, **如果** $A_t \in \mathcal{F}(X)$, (" $t \in T$), **则可以定义模糊集合的任意并与任意交的运算如下**:

$$\bigcup_{t \in T} A_t\ (x) = \bigvee_{t \in T} A_t(x) = \sup_{t \in T} A_t(x);$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t\ (x) = \bigwedge_{t \in T} A_t(x) = \inf_{t \in T} A_t(x).$$

显然, **如果** $A, A_t \in \mathcal{F}(X)$ (" $t \in T$), **则** $\bigcup_{t \in T} A_t$, $\bigcap_{t \in T} A_t$, $A^c \in \mathcal{F}(X)$.

定理 1.1.1 ($\mathcal{F}(X)$, ∪, ∩, c) **具有以下性质**:

(1) **最大、最小模糊集合存在性**: $\quad A \quad X$;

(2) **自反性**: $A \quad A$;

(3) **对称性**: **如果** $A \quad B$, $B \quad A$, **则** $A = B$;

(4) **传递性**: **如果** $A \quad B$, $B \quad C$, **则** $A \quad C$;

(5) **交换律**: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(6) **结合律**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(7) **分配律**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(8) **吸收律**: $A \cup (A \cap B) = A$,

$A \cap (B \cup A) = A$;

(9) **幂等律**: $A\cup A = A, A\cap A = A$;

(10) **对合律**: $(A)^c = A$;

(11) **两极律**: $X\cap A = A, X\cup A = X$,

$\cap A = \quad , \quad \cup A = A$;

(12) **对偶律**: $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$,

$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.

如果 $A_t\in\mathcal{F}(X)(t\in T)$, (7) **和**(12) **有更一般的形式**:

$(7')$ $A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t) = \bigcap_{t\in T}(A\cup A_t)$,

$A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t) = \bigcup_{t\in T}(A\cap A_t)$;

$(12')$ $(\bigcap_{t\in T}A_t)^c = \bigcap_{t\in T}A_t^c$,

$(\bigcap_{t\in T}A_t)^c = \bigcup_{t\in T}A_t^c$.

其中 $(x)\equiv 0, X(x)\equiv 1$, " $x\in X$.

证明　直接验证即得. 以(7) **为例, 由于对任意的** $x\in X$, **有**

$$
\begin{aligned}
(A\cup(B\cap C))(x) &= \max(A(x),(B\cap C)(x)) \\
&= \max(A(x),\min(B(x),C(x))) \\
&= \min(\max(A(x),B(x)),\max(A(x),C(x))) \\
&= \min((A\cup B)(x),(A\cup C)(x)) \\
&= ((A\cup B)\cap(A\cup C))(x),
\end{aligned}
$$

则

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C).$$

同理可证

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C).$$

从上面的性质, 可以看到, 在任何模糊集合运算的公式中, 将 $\cup$ **与** $\cap$ **互换, 公式仍然成立, 即模糊集合论中保持了经典集合论中的对偶原则, 还可以看到, 模糊集合的运算性质保持了经典集合运算的几乎所有性质, 只是互补律不成立. 即**

$$A\cup A^c = X, A\cap A^c = \quad ,$$

一般不再成立.

例 1.1.2 设 $X=[0,1]$, $A(x)=x$, 则 $A^c(x)=1-x$,

$$(A\cup A^c)(x)=\max(x,1-x)=\begin{cases}1-x, & x\leq \frac{1}{2},\\ x, & x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$$(A\cap A^c)(x)=\min(x,1-x)=\begin{cases}x, & x\leq \frac{1}{2},\\ 1-x, & x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

于是, $(A\cup A^c)(x)\not\equiv 1$, $(A\cap A^c)(x)\not\equiv 0$. 特别是

$$(A\cup A^c)\left(\frac{1}{2}\right)=(A\cap A^c)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 1.1.3 “年青或年老”$Y\cup O$ 的隶属函数为

$$(Y\cup O)(x)=Y(x)\vee O(x)$$

$$=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq 25,\\ \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<x\leq x^*,\\ \left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & x^*<x,\end{cases}$$

其中 $x^*=\frac{1}{2}(75+5\sqrt{29})=50.96291$.

“年青又年老”$Y\cap O$ 的隶属函数为

$$(Y\cap O)(x)=Y(x)\wedge O(x)$$

$$=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq 50,\\ \left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leq x^*,\\ \left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & x^*<x.\end{cases}$$

“不年青”Y^c 的隶属函数为

$$Y^c(x) = 1 - Y(x)$$
$$= \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 25, \\ 1 - \left[1 + \left(\dfrac{x - 25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25 < x. \end{cases}$$

“不年老”O^c 的隶属函数为

$$O^c(x) = 1 - O(x)$$
$$= \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 50, \\ 1 - \left[1 + \left(\dfrac{x - 50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50 < x. \end{cases}$$

1.2 模糊集合的分解定理与表现定理

1.2.1 模糊集合的截集

一个元素 x 是否属于模糊集合 A,回答是不确切的,如果我们选定一个“阈限”$\lambda(0\le\lambda\le 1)$,当 x 对于 A 的隶属度 $A(x)\ge\lambda$时,便说 $x\in A_\lambda$,否则便说 $x \notin A_\lambda$,于是 x 是否属于 A_λ 的回答将是确切的.这样便得到一个经典子集 A_λ 从而导出截集的概念.

定义 1.2.1 设 $A\in\mathcal{F}(X)$,对任意的 $\lambda\in[0,1]$,记

$$(A)_\lambda = A_\lambda = \{x; A(x) \ge \lambda\},$$

称 A_λ为 A 的 λ-截集或 λ水平集(见图 1.2.1),λ称为置信水平.又记

$$(A)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x; A(x) > \lambda\},$$

称 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$为 A 的 λ-强截集或 λ弱水平集.称

$$A_{\underset{\cdot}{0}} = \{x; A(x) > 0\} = \mathrm{supp}A$$

为 A 的支集.称 A_1 为 A 的核,记作 $\mathrm{Ker}A$.称 $A_{\underset{\cdot}{0}} - A_1$ 为 A 的边界(见图 1.2.1).

A_λ的直观意义是由那些对模糊集合 A 的隶属度不小于水平 λ的元素构成.它是论域 X 的一个经典子集.如果 $x\in A_\lambda$,我们称