一、中华民族是擅长数学的民族

我国的著名史书《史记》中记载，夏禹（公元前二十一世纪以前）治水时“左准绳，右规矩”。这说明当时的人已会用圆规直尺画图了。流传至今的汉朝武梁祠的浮雕像中有伏羲手执规，女娲手执矩的形象*，而伏羲和女娲都是我国原始社会时期（约距今六十万年前至四千多年前）的传说人物。殷代（公元前十六世纪至公元前十一世纪）甲骨文中记有“八日 辛亥允戈伐二千六百五十六人”，又有“允卒三百又卌八”等文字。这些事实说明我国在公元前十一世纪之前已能进行大数量的自然数运算了，而运用圆规直尺画图则远在原始社会时期就已开始。大量的历史资料证明，我国是数学最主要的发源地之一。

在长达两千多年的封建制度束缚下，加上近代帝国主义列强的侵略，近代中国在数学研究方面的

＊见本书封面图案。

发展是缓慢了。解放以后，我国对数学的研究又重新蓬勃发展起来，取得了许多重大的成果，有些领域又重新赶上世界先进水平甚至取得领先地位。我国人造地球卫星的发射和回收，证明了我国数学已经高速度发展到一个新阶段；我国数学家在关于“哥德巴赫猜想”的研究上，得到了目前世界上最好的结果；在关于“半纯函数”的波莱尔方向和亏值方面，得到了既新又深的结果；在“齐次可列马尔可夫过程构造论”的研究中，得到了非保守Q过程的唯一性准则；内蒙古包头市第九中学的数学教师陆家羲（1983年逝世），经过多年研究证明了“组合数学”中斯坦纳系列、寇克满系列的问题，在组合数学的领域内作出了国际第一流水平的贡献。

从古至今，中华民族的数学家在一系列数学领域中作出了杰出的贡献。中华民族是擅长数学的民族。

二、中国是最早研究代数的国家

1. 公元一世纪前我国代数的出现

《九章算术》是我国至今有传本的一部经典数学著作，它成书于何时目前学术界尚无统一结论。从多方面史料推测，它的成书年代起码在公元一世纪之前。全书共分九章：方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股等，收集了二百四十六个应用问题及其解法。该书成书前我国已有年代长久的数学发展史，据考证已有“算术”、“周髀”、“九数”等在流传，记载了从古以来劳动人民在数学方面积累下来的实践经验，但未保留各个创作者的姓名。《九章算术》是以集其大成的形式出现并流传下来，直到十六世纪我国的数学著作大都受它的体例的影响。

《九章算术》的第八章“方程”里，已有联立一次方程组和不定方程组出现。联立一次方程组各

项未知数的系数分离出来用算筹摆好（古代用算筹记数），犹如方阵，所以叫“方程”。这是世界数学史上最早出现的多元一次联立方程组。印度最早出现多元一次方程组，是在七世纪初婆罗门笈多所著的书中，欧洲则到十六世纪中才由法国数学家布丢提出。

第四章“少广”有开平方和开立方；第八章“勾股”、有“开带从平方法”，在“方程”章中还提出了正负数的不同表示法，和正负数的加减法则：“正负术曰，同名相除异名相益。正元入负之，负元入正之。其异名相除，同名相益。正元入正之，负元入负之。”其中所说的“同名”“异名”即现在所说的“同号”“异号”。可见这些代数学的最基本的问题，我国的数学经典中早已有定论了。

中国古代的代数研究在世界上一直领先了一千多年，宋、元时代达到了高峰。贾宪等的高次方程数值解法（古时称“增乘开方法”），秦九韶的联立一次同余式解法（古称“大衍求一术”），李冶的列方程一般方法（古称“天元术”），朱世杰的多元高次方程组解法（古称“四元术”），及其在有限项级数求和研究中使用的“招差法公式”，都比欧洲相同结果至少早出几百年。中国数学对朝鲜、日本以及西亚、北非都有一定影响。

2. 代数一词的由来

花刺子模（今苏联乌兹别克地方）的一位数学家阿尔·花刺子模，在公元825年左右写了一本名为《Al-jabr W' al-muq abalan》的书，译成汉文的意思是“方程的科学”。书中记载了当时运用方程的知识来解决有关实际问题方面的经验。这本书的阿拉伯文本已失传，但十二世纪的拉丁文译本还在，译本把“Al-jabr”译为拉丁文“Algebra”，这就是英文“代数”一词的来源。

清朝末年的数学家李善兰在编译西方代数时，摒弃前人把“Algebra”译作“阿尔热巴拉算法”的译法，很恰当地意译为“代数学”。从此“代数”这个名词便一直在我国沿用下来。

3. 有理数的发现

人类对于数的概念的形成可以远溯到旧石器时代，那时人类过着茹毛饮血、穴居野处的生活，人们从打琢石器、狩猎野兽和采摘野果等生产活动及产品的分配中，开始有了朦胧的数的概念，产生了“有”和“无”的概念，狩猎或采摘有收获就是“有”，没有收获就“无”。随着在分配中产生不足和过剩，逐渐就形成了“多”和“少”的概念。到了人类对大自然的认识逐渐增多，生产工具逐步改进，收获量逐渐增多以后，产生了今天收获量比昨天多了多少或少了多少的问题，从而开始有了自

然数的概念。

由于人类早期的文明首先在中国的黄河、美索波达米亚*的幼发拉底斯河和底格里斯河、印度的印度河和埃及的尼罗河等几条大河的流域中诞生，数的概念以及后来数学的研究都首先在这些地方产生。

巴比伦人在泥板上刻画楔形文字，然后进行烘烤。现存的泥板最早的制作于公元前两千年，从泥板中可见巴比伦人在公元前已有了数字和六十进位制记数法，并能进行正有理数的运算。但是他们不懂得负数，因此他们未能完成有理数的发现。

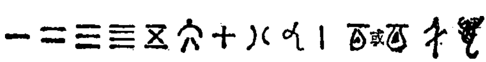
古埃及人用纸草写字，最早是用象形文字。由于纸草会干裂而成粉末，所以埃及的纸草文书很少保存下来。现存的数学纸草文书主要有两批，一批保存在莫斯科，叫莫斯科纸草文书，一批保存在英国博物馆，叫莱茵德纸草文书。其中莱茵德纸草文书的作者阿摩斯，大约是公元前1700年的人，记载的内容是从公元前2200年第十二王朝时代的旧纸草文书上转录的，收录有八十五道数学问题及其解答。所以埃及人研究数学的历史也是很早的。古埃及人的算术主要是用迭加法，分数的表示采用单位分数和单位分数的和，因此运算方法繁杂，这可能成了限制古埃及人的算术和代数没有发展到高水平的原因。和巴比伦人一样，古埃及人也没有认识到有理数。

＊即巴比伦人居住的地方，位于今伊拉克一带。

古印度的记载工具主要是印度河下游的贝多罗树的树叶，只有极少数是刻在金石和竹木之上，所以流传至今的数学史料很少。据今所知，大约是在公元628年以后，印度数学家婆罗门笈多和巴士卡洛才提出负数，这比我国认识负数的时间迟五百多年。

我国古代的记载工具既有竹简、木片，也有龟甲、兽骨以及石碑、钟、鼎等，并且很早就发明了用纸。通过古籍和出土文物的考证，可以了解我们的祖先何时已经掌握了哪些数学知识。在殷朝都城的废圩（今河南安阳县境内）出土的甲骨文物中，可以看到大约3400年前使用的十三个数码（图 1），这是十进位值制的数码，从字形的完整（它演变至今仍基本相同）来推测，它起码已经经过很长很长时间的进化。

我国古代数学名著《九章算术》中系统地叙述了约分、通分、比较不同分母的分数的大小，以及分数的四则运算法。书中所讲的方法，和现代的四则运算基本上是一致的，不过当时的运算是用“算筹”进行的。因此，可以说《九章算术》是世界上最早系统叙述分数运算的一本书。西方数学家们一般都认为十三世纪意大利的数学家斐波拿契第一个



一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千 万

（图 1 ）

叙述了“最小公倍数”，实际上他比我国的《九章算术》的分数运算（加减法运算需求分母的最小公倍数）迟了一千二百年以上。

《九章算术》还记载有负数的运算法则，名曰“正负术”。而印度人到了七世纪才认识负数，我们比印度人早 500 多年。负数是经过阿拉伯人的著作传到欧洲的，在十一至十三世纪“文艺复兴”时期，负数开始被采用，到十五世纪和十六世纪，大多数欧洲数学家还不承认负数是数，或者即使承认了，也并不认为它是方程的根。例如十五世纪的尼古拉·库奎特，以及十六世纪的斯梯弗尔，都把负数说成是“荒谬”的数，卡当则把方程的负根称为“虚有的”，韦达在解方程时把负根舍弃，巴斯加则认为从 0 减去 4 纯粹是胡说。安东尼·阿纳尔德提出一种有趣的说法来反对承认负数，他说他怀疑 $(-1):1=1:(-1)$，因为 -1 小于 $+1$，那么较小数与较大数的比，怎么能等于较大数与较小数的比呢？这个问题引起了许多人的讨论。1712年莱布尼慈承认这个反对意见合理，但申辩说可以用这种比例来进行计算。直到1637年，笛卡儿坐标系出现了，负数获得了几何解释，才逐渐被人们公认，然而在英国直到十八世纪仍有人对负数提出“抗议”。

根据上述事实，可以说我国是最早发现有理数的国家。在形成有理数概念这个漫长的历史中，我国是最早完成这个阶段的国家。

三、无理数的萌芽

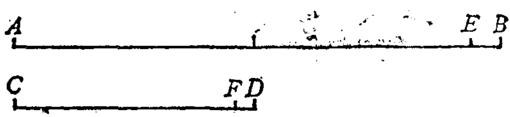
1. 希伯索斯为$\sqrt{2}$而献身

世界上最上发现$\sqrt{2}$的，是古希腊人希伯索斯。他是公元前五世纪时希腊著名的大数学家毕达哥拉斯学派的成员，他根据毕达哥拉斯定理（即勾股定理）发现，边长为 1 的正方形的对角线长为$\sqrt{2}$，它既不是整数也不是分数，所以它不是有理数，而是一种新的数，是一个无限不循环的小数。希伯索斯为这一发现献出了宝贵的生命。

在公元前五世纪，古希腊的数学十分发达，毕达哥拉斯学派是当时著名的学派，他们在发展数学方面作出过很大的贡献。他们断言“任意两条线段，总存在一最大公度线段。”对此作出的解释如下：

设有两条线段$AB > CD$（如图 2）。在较长的线段 AB上，用圆规从一端A起尽量多地连续截取长度为 CD的线段。若最后没有剩余，则 CD就是最

大公度线段。若有剩余线段 EB($EB<CD$)，则在 CD 上用圆规尽量多地截取长度为 EB 的线段。如果没有剩余，则 EB 就是最大公度线段。如果又有剩余线段 FD($ED<EB$)，则又在 EB 上连续尽量地截取长度等于 FD 的线段，……这样下去，剩余的线段越来越短，最后作图工具便量不出剩余的线段了，也就是说最大公度线段总可以求得。



（图 2）

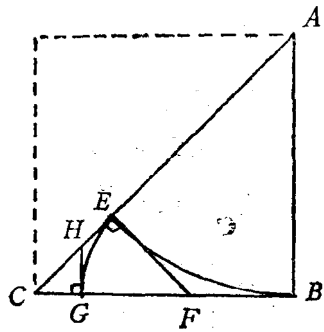
这个结论显然是错误的。但毕达哥拉斯学派的人却从这个错误结论出发推论下去，用最大公度线段去度量 AB 和 DC 便得整数的量数，因此任意线段 AB 和 CD 无论用谁去量另一线段，所得的量数或者是整数，或者是整数的比。由此他们认为，宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。但是希伯索斯通过逻辑推理发现：等腰直角三角形的直角边与其斜边不存在最大公度线段。也即是边长为 1 的正方形的对角线长度既不是整数，也不是整数的比所能表示。其发现如下：

在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=BC$。现在斜边上截取 $AE=AB$，剩余 EC。作 $EF\perp AC$ 交 BC 于 F 点，则有 $EC=EF$，也有 $EF=BF$。如图 3。

即 $CE=EF=BF$。

故 $CF=BC-CE$。

由此，求 AB 和 AC 的最大公度线段。就相当于求剩余线段 CF 与 CE 的最大公度线段。但 $\triangle CEF$ 又重新构成了等腰直角三角形，重复上述做法又会得到更小的等腰直角三角形 CGH。如此下去，总是要出现等腰直角三角形。因此总是存在着剩余线段，也就是说等腰直角三角形的斜边与直角边不可能有最大公度线段。



（图 3）

因此，边长为 1 的正方形对角线长 $\sqrt{2}$ 是不可能用整数或整数的比表示的。希伯索斯的结论否定了毕达哥斯学派的信条，宣告了无理数 $\sqrt{2}$ 的发现。希伯索斯的发现没有被毕达哥拉斯学派的信徒所接受，相传他们认为这一发现违反了学派的至高无上的信条，把他抛入海水里淹死了。

后人用反证法证明了这一发现是正确的，证明如下：

假设 $\frac{AB}{AC}=\frac{n}{m}$，其中 m、n 是既约的正整数。

因 $AB=BC$，故 $\frac{BC}{AC}=\frac{n}{m}$。

从而 $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\right)^2$，

即 $$\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}=2\cdot\frac{n^2}{m^2}$$

由毕达哥拉斯定理（即勾股定理）得

$$AB^2+BC^2=AC^2,$$

故有$1=2\cdot\frac{n^2}{m^2}$，即$m^2=2n^2$。

所以m^2是偶数，因而m也是偶数（否则若m为奇数，设$m=2k+1$,则$m^2=4k^2+4k+1$也是奇数，与m^2为偶数相矛盾）。

设$m=2p$，（p是整数）

则（$2p$）$^2=m^2=2n^2$。

即$n^2=2p^2$是偶数，因而n也是偶数。

那么m、n都有公约数2，这与假设m、n是既约的整数相矛盾。

这样$\sqrt{2}$是无理数得到了严格的证明。

2．刘徽对无理数表示的创见

我国对无理数的研究也有悠久的历史，三国魏、晋时代的数学家刘徽，早在公元263年左右所著的《九章算术注》中，根据他对“开方术”的研究，曾主张用若干位十进分数表示无理数平方根、立方根的近似值。不过他这一卓越的创见，当时并没有受到人们的重视。直到十三世纪，数学家秦九韶在研究方程的解法时，才利用刘徽的方法推广到高次方程无理根的求法中去。

四、一元一次方程中的古代数学问题

从巴比伦人的泥板中已发现有用象形文字记载的一元一次方程，这是至今为止所发现的最早的一元一次方程。我国的一元一次方程最早出现于何时，目前尚未能考证。初中代数的习题“良马追及”和“测井问题”是选自我国古代数学名著的。

1.“良马追及”

我国元朝的杰出数学家朱世杰，写过两本很有名的数学著作，一本是1299年完成的《算学启蒙》，另一本是1303年写的《四元玉鉴》。《算学启蒙》共三卷，20门(即20个部分),259个问题。书中叙述了乘、除、开方等运算，以及“天元术”（即古代布列方程的方法）等我国古代数学各方面的内容。这本书体系完整，由浅入深，是当时很好的一本启蒙书籍。现在初中代数习题中的“良马追及”问题：“良马日行二百四十里，驽马日行一百五十

里，驽马先行一十二日，问良马何日追及之？”便是选自《算学启蒙》一书。该书当时还传到朝鲜和日本。正是由于朝鲜刻本，该书才得完整地保留下来。

2．“测井问题”

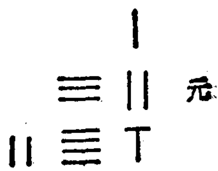
我国明清的一位数学家程大位，他自二十多岁便趁经商之便，在长江下游一带遍访数学名师，搜罗了许多数学古籍资料，终于在他六十岁的时候（1592年）写成了《算法统宗》一书。全书共十七卷，有595个问题，是一本应用数学书。从流传的广泛、长久、深入来说，该书是当时其他数学著作所不能相比的。初中代数题中的“测井问题”：“假如井不知深，先将绳三折入井，绳长四尺，后将绳四折入井，亦长一尺，问井深及绳长各若干？”便是出自《算法统宗》。由于程大位写《算法统宗》以珠算为主要计算工具，并结合社会需要的商业算术的实际问题，所以随着这本书的流传，标志着我国从筹算时代转变为珠算时代的过渡。

3．“天元术”——我国古代布列方程的方法

列方程解应用题一般要分两个步骤，第一步根据问题给出的条件列出一个包含未知数的方程，第二步是求解方程。十二至十三世纪的中国数学家，不仅能用“正负开方法”解方程，同时也创造了根

据问题给出的条件布列方程的方法。没有这种方法之前，列方程并不是一件简单的事情。

就在宋、元时代，我国数学家找到了一种普遍的布列方程的方法——“天元术”。在流传至今的数学著作中，十二至十三世纪的数学家李冶在他所著的《测圆海镜》和《益古演段》两书中，对天元术都作了系统的叙述。朱世杰的《算学启蒙》和《四元玉鉴》两书也曾用到天元术，特别是《四元玉鉴》中还记述了多元高次方程组的列方程的方法。当时把现在我们常说的“元”叫做“天元”，列方程时首先是“立天元一为某某”，就是现在说的“设立一个未知数x为某某”的意思。多项式$x^2+32x+256$当时表示如图4。



（图4）

在宋元时期我国数学家已经熟练地掌握了多项式的加、减、乘、除（只限用x的整数幂来除）。当时用天元术表示出的方程都是有理整式的。李冶并非首创“天元术”的人，在他之前早已有了。欧洲的数学家们直到十六、七世纪才能做到。因此我国在掌握布列方程解应用题的知识上，比欧洲领先了四百年以上。

五、多元一次方程组

多元一次方程组的解法，最早出现于我国公元一世纪之前的名著《九章算术》一书的第八章“方程”和第七章“盈不足”中。在国外，印度是到七世纪初才在婆罗门笈多所著的书中出现，欧洲最早提出三元一次方程组解法的是十六世纪中的法国数学家布丢。

1．“容器问题”——《九章算术》的一个二元一次方程组

“今有大器五小器一容三斛，大器一小器五容二斛，问大小器各容几何？”此题出自《九章算术》的第七章“盈不足”中，已编入初中代数课本作习题使用。这个二元一次方程组，古人认为可以化作“盈不足”（即“盈亏”）问题去解，所以放在“盈不足”章之中。“盈不足”章的最前面四个问

题是正规的盈亏类问题，第五题是“两盈”问题，第六题是“两不足”问题，第七题是“盈、适足”问题，第八题是“不足、适足”问题。此外还提出了形式上不属于“盈不足”类的十二个问题。“盈不足”章给出了这些问题的解法。

2. “禾实问题”——《九章算术》的一个三元一次方程组

《九章算术》的第八章“方程”中共有18个问题，其中二元的八个，三元的六个，四元的两个，五元的一个，六元不定方程组（只有五个方程）一个。《九章算术》所用的“方程术”是“直除”法（把一个方程式累减或累加另一个方程式的意思，古代常把“减去”称为“除去”）。“方程”章的第一个问题就是“禾实问题”：“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？”“禾”是黍米，“一秉”是“一捆”，“实”是脱粒后的黍米谷子。这个问题如果设x、y、z分别表示上、中、下禾一秉的谷子斗数，便是解下列三元一次方程组的问题：

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39, \\ 2x+3y+z=34, \\ x+2y+3z=26. \end{cases}$$