北京文登学校辅导系列

历年考研数学试题详解

数学（三）

（1987—2004）

北京文登学校　编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

历年考研数学试题详解／北京文登学校编．—北京：中国财政经济出版社，2005.3
（北京文登学校辅导系列）
ISBN 7－5005－7987－X

Ⅰ．历… Ⅱ．北… Ⅲ．高等数学－研究生－入学考试－习题 Ⅳ．013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 013647 号

北京文登学校辅导系列
历年考研数学试题详解
数学（三）
（1987－2004）
北京文登学校 编

中国财政经济出版社 出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码：100036
发行处电话：88190406 财经书店电话：64033436
××印刷厂印刷 各地新华书店经销
787×1092 毫米 16 开 11 印张 289 000 字
2005 年 3 月第 1 版 2005 年 3 月北京第 1 次印刷
定价（全四册）：60.00 元
ISBN 7－5005－7987－X/O·0032
（图书出现印装问题，本社负责调换）

目　录

前言 …… (0－3)
一、全国硕士研究生招生考试数学(三)试题部分 …… (1－1)
1987 年试题 …… (1－1)
1988 年试题 …… (1－3)
1989 年试题 …… (1－5)
1990 年试题 …… (1－7)
1991 年试题 …… (1－9)
1992 年试题 …… (1－11)
1993 年试题 …… (1－13)
1994 年试题 …… (1－15)
1995 年试题 …… (1－17)
1996 年试题 …… (1－19)
1997 年试题 …… (1－22)
1998 年试题 …… (1－24)
1999 年试题 …… (1－26)
2000 年试题 …… (1－29)
2001 年试题 …… (1－31)
2002 年试题 …… (1－33)
2003 年试题 …… (1－35)
2004 年试题 …… (1－38)

二、全国硕士研究生招生考试数学(三)试题解答部分 …… (2－1)
1987 年试题参考答案 …… (2－1)
1988 年试题参考答案 …… (2－5)
1989 年试题参考答案 …… (2－10)
1990 年试题参考答案 …… (2－15)
1991 年试题参考答案 …… (2－20)
1992 年试题参考答案 …… (2－25)
1993 年试题参考答案 …… (2－31)
1994 年试题参考答案 …… (2－35)
1995 年试题参考答案 …… (2－41)
1996 年试题参考答案 …… (2－47)

1997 年试题参考答案 …… (2－53)
1998 年试题参考答案 …… (2－59)
1999 年试题参考答案 …… (2－65)
2000 年试题参考答案 …… (2－72)
2001 年试题参考答案 …… (2－79)
2002 年试题参考答案 …… (2－85)
2003 年试题参考答案 …… (2－90)
2004 年试题参考答案 …… (2－98)

三、附录 …… (3－1)
1985 年上海交大等八院校硕士研究生招生考试高等数学试题(附 参考答案) …… (3－1)
1985 年同济大学等八院校硕士研究生招生考试高等数学试题(附 参考答案) …… (3－8)
1986 年上海交大等十院校硕士研究生招生考试高等数学试题(附 参考答案) …… (3－12)
1986 年华东六省一市硕士研究生招生考试高等数学试题(附 参考答案) …… (3－18)
1987 年全国硕士研究生招生考试数学(四)试题(副题) …… (3－22)

前　　言

为帮助我国大学生学好数学，本书汇编了1987年以来硕士研究生招生全国统考试题及其详解的参考答案.应该申明的是:书中给出的解答，也许不是最简的，但从中可以了解重点，突破难点，把握重点它至少是很好地适应了同学们复习、迎试、竞赛和考研的需要.

全书按不同专业招生的试题，共分为数学(一)、数学(二)、数学(三)、数学(四)等四个分册.书末还附录了全国硕士生招生统考前两年(即1985年和1986年)部分院校联合命题的试卷及参考答案，从中也可看出考研数学试卷不断演化与完善的历程.

俗说“温故知新”，历史也许不会重复，但考试却不然，几年、十几年前的题目，又会被改头换面地拿出来，甚至原封不动地“克隆”.了解这些看上去也许有些“陈旧”的试题，细细品味，有时仍感新鲜、别致，不信就请查一查近年的考卷，你总会有“似曾相识”之感，因为正如后文所说:数学内容就那么多，好的试题也就那么一些.这恰似时尚的流行，一个周期下来，便是旧时尚的复制与翻版(当然不是简单的重复).

学好数学除了要“做”题外，还要会“读”题，可以毫不夸张地说:对绝大多数人来讲，做数学只是一种模仿或类比，能有发现、创新者实在廖廖，即便是对于以数学为职业的人士.

这样对考研题乃至竞赛题的了解与赏析，往往会使我们开阔眼界、打通思路，因为这些题目中的匠心、立意、解法、技巧，不仅使我们阅后会有茅塞顿开之感，有时更会让我们恍然大悟，甚至大吃一惊，啊哈！原来如此.

看来，了解历年考研试题中的动向，学会解题方法，掌握必要技巧，对我们的复习应考关系重大.而学会分析、梳理、归类、总结，更是立于不败之地的重要法宝.

从1978年起，国家开始恢复研究生招生工作，这无疑给各路学子们提供了一个继续深造的极好契机.

由于大多数理工类和某些文科类(如经济、管理等)专业对于数学的需求日深，“高等数学”便成为一门重要的考试科目.起初，试卷由各院校自行命题.由于这些试卷水平难易不一，这往往给研究生录取工作带来了一定的困难(标准无法统一)，特别是当考生需要进行院校乃至专业调剂时.

1985年，上海交大、天津大学、浙江大学等八院校率先采取联合命题，同时同济大学、上海海运学院、上海工业大学等八校也采用联合命题方式;1986年上海交大、天津大学、浙江大学等联合命题院校扩大到了十所(使用该试卷的院校不止它们)，且以此方式联合命题的院校越来越多.

从1987年起，国家教委决定全国高校工学各专业、经济学部分专业硕士研究生招生中，数学考试进行全国统一命题，理、医、农、管各专业，一般亦由招生院校按专业性质，选用相应的试题种类.当时试题共分五套，分别称为数学(一)、数学(二)、数学(三)、数学(四)和数学(五)，各类试题包含的数学科目大体如下表所列：

类　型	试卷包含科目
数学(一)	微积分、线性代数;此外概率论与复变函数任选一门
数学(二)	微积分、线性代数
数学(三)	微积分
数学(四)	微积分、线性代数、概率论
数学(五)	微积分、线性代数、概率论

考试题型为填空题、选择题、判断题(仅数学(四)、数学(五)有此题型,且于1990年以后取消)和计算与证明题.

每份试卷填空、选择题各约4～5道,计算、证明题10道左右;1990年以后各试卷填空、选择题各5道,计算、证明题8道或10道(数学(二)、数学(三)8道,数学(一)、(四)、(五)为10道).

下表给出当时五套试题所适用的专业范围:

类　型	适用的招生专业
数学(一)	力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术.
数学(二)	机械设计与制造、金属材料、土壤、水利、测绘、非金属材料、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业石油、铁道、公路、水运等,以及建筑学、纺织、轻工、林业工程和技术科学史几个学科中对数学要求较高的专业.
数学(三)	建筑学、纺织、轻工、林业工程和技术科学史几个学科中对数学要求较低的某些专业.
数学(四)	国民经济计划和管理(含经济系统分析)、工业经济、运输经济、基本建设经济、技术经济、工业企业管理、统计学、数量经济学.
数学(五)	农业经济、商业经济、物资经济、国际贸易、劳动经济、农业企业管理、商业企业管理、财政学、货币银行学(含保险)、国际金融、会计学.
注　记	政治经济学、世界经济、经济地理学三个专业是否选用统考试题,由招生单位自定.

1997年,国家考试中心据1996年重新修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试《数学考试大纲》,对数学试卷内容和卷种作了调整:

调整前试卷编号	调整后试卷编号	试卷包含的科目
数学(一)、(二)	合并为数学(一)	微积分、线性代数、概率论(含数理统计)
数学(三)	改为数学(二)	微积分、线性代数
数学(四)	改为数学(三)	微积分、线性代数、概率论(含数理统计)
数学(五)	改为数学(四)	微积分、线性代数、概率论

调整后题型仍为三大类:填空题、选择题和计算、证明题(包括综合和应用题).试题总量为

21 道左右，填空、选择题各 5～6 道，计算、证明题 9～10 道．主、客观性试题在试卷中所占分数比例约为 7∶3．

试卷命题原则为：以考查数学基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查．具体地讲，填空题以考查基本概念、基本方法和基本原理为宗旨，一般无大的计算和证明，难度中等；选择题主要考查考生对数学基本概念、性质的理解，能通过简单计算、推理、判断和比较，作出正确选择；计算、证明题（综合题）则是对考生运算、推理、抽象、概括、逻辑思维、综合（各学科分支的有机结合），以及实际应用能力（结合考生报考的具体专业所具有的共性相关背景知识）的全面考查．

另外，各试卷种类中诸学科分支内容所占比例大致为下表：

试卷种类	学科分支所占试卷题目分数比例		
	微积分	线性代数	概率论
数学（一）	60％	20％	20％
数学（二）	80％	20％	0％
数学（三）	50％	25％	25％
数学（四）	50％	25％	25％

由于数学在各学科研究中的重要地位，为增加数学在考试中的权重，从 2003 年起，数学试卷卷面总分为 150 分，填空、选择各 6 道，计算、证明题 10 题；2004 年试卷中，填空、选择题各 6 道，计算、证明题 11 道．

考研辅导专家们曾对报考研究生的考生提出过忠告，且给出了“法宝”（或经验），数学复习应采取的方法是：一是认真领会掌握基本概念；二是看、做考研真题；三是多动手训练（做题）．

对于如何看、做考研试题我们想说几句，之前，除了复习好必要的基础知识外，还要了解、掌握一些解题思想与方法．数学解题中有一个重要的思想即化归与转化．其实说穿了，解数学题就是将未知（或要求、要证）的结论，转化为（或利用）已知结论的过程，这种转化不仅贯穿数学解题过程的始终，也贯穿数学自身发展的始终．在演算数学问题时，如果你能从中找出这种转化关系，乃至能将一类问题之间的联系看清、摸透，你的解题能力和技巧将会大有提高，因为你此时至少已经掌握了这一类问题（而非一道问题）的解法．要做到这一点，重要的是要对各类试卷去做综合、分析、比较，看看能否找到规律性的东西．各种数学试卷难免会有交叉、重复，再者也要注意问题的演化规律．

这里想以下面一道行列式计算为例，看看近年来这类问题在考研试题中的演化及变形．

1997 年数学（四）中（以下简记如（1997④），余类同）有问题（填空题）：

问题★　（1997④）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______．

其实它是行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \qquad (*)$$

或它的推广

$$\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_{n-1} & b \\ c & c & c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix} \qquad (**)$$

或其他变形的特例.

该行列式及它的衍生或变形是线性代数中较典型的一类,其计算方法有四五种之多.此前或尔后的试题中与该行列式计算有关的命题很多,比如:

1.涉及矩阵运算的问题

问题1:(1993④)已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,试求其伴随矩阵的逆.

它的变形或引申问题是:

问题2:(2003③)设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵的秩为1,则必有(　　)

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

问题再推广或引申:

问题3:(2001①)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$,且秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.则 $k=$______.

该命题的又一次引申或推广形式为(从3阶、4阶,终于推广到了 n 阶的情形,如果从命题年份上看,前者例是后者的特例):

问题4:(1998③)设 $n\ (n\geqslant 3)$ 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 1 & a & \cdots & a & a \\ a & a & 1 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 & a \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix},$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则 a 必为　（　）

(A) 1　(B) $\dfrac{1}{1-n}$　(C) -1　(D) $\dfrac{1}{n-1}$

2．涉及方程组的问题

问题 5：(1989③) 齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0.\end{cases}$$

仅有零解，则 λ 应满足的条件是______．

显然，该方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$．

而下面的问题则与问题 5 几乎无异，只不过由齐次方程组改变成非齐次方程组而已．

问题 6：(1997②) 设方程组 $\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$ 有无穷多组解，则 $a=$______．

问题 7：(1995④) 对于线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2.\end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组无解、有惟一解和无穷多组解．在方程组有无穷多组解时，试用其导出组的基础解系表示全部解．

此问题是前面问题的再度引申或推广（变形），下面的问题终于将方程组从 3 元推广到了 n 元（相应的行列式或矩阵也由 3 阶推广到 n 阶）．

问题 8：(2002③) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0.\end{cases}$$

其中 $a\neq0$，$b\neq0$，$n\geqslant2$．试讨论 a，b 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出其全部解，并用基础解系表示全部解．

显然方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b & b & \cdots & b\\ b & a & b & \cdots & b\\ b & b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & b & \cdots & a\end{pmatrix}$，问题的实质是将它可化为计算 $|\boldsymbol{A}|$ 即计算前面行列式（$*$）的问题．

问题再次引申即为下面的试题：

问题 9：(2003③) 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0.\end{cases}$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时:

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解. 在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

显然它是问题 8 的变形,容易看出,这个问题虽是求解线性方程组,但其关键仍是要计算行列式(它们是行列式(**)的引申)

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

接下来的问题几乎与上面的问题无异(或者视为它的特例).

问题 10:(2004①) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0.\end{cases}$$

$(n\geqslant2)$ 试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

显然,这也是要考虑方程组系数矩阵或其行列式

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix},$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & 3\vdots & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=\left[a+\frac{n(n+1)}{2}\right]a^{n-1}.$$

注意该问题只是问题 9 的特例或变形而已(注意它们的系数矩阵间转置关系).

显然 2004 年数学(二)中的问题 :只是上面问题 10 的特例情形(对于数学(二)和数学(四)试卷而言,常有与之类同的情形,比如同年份试卷中,数学(二)、(四)中的某些题目往往是数学(一)、(三)中某些问题的简化或特例情形,但其解题思想是类同的).

问题　(2004②)设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0.\end{cases}$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

3. 涉及矩阵特征问题

问题 11:(1992④)矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值是______.

注意到 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{pmatrix}$,它亦化为前述行列式(*)的计算.

这个问题稍稍推广又出现在了 1999 年数学(一)试题中.请看:

问题 12:(1999①)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是______.

显然该问题是问题 11 的推广(由 4 阶推广至 n 阶),当然关键还是计算行列式(*).

五年之后,同样的问题(只是稍加推广与引申)又出现在了 2004 年数学(三)试卷中.

问题 13:(2004③)设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

其实它的解答无非还是计算行列式(*)而已.我们简单回顾或复述一下这个问题的解法.讨论 b 的取值:

(1)当 $b\neq0$ 时,考虑

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-b&\cdots&-b\\-b&\lambda-1&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-b&-b&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为　$\lambda_1=1+(n-1)b$,$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.然后再解线性方程组求解特征向量.

(2)当 $b=0$ 时,则由

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&\cdots&0\\0&\lambda-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^n,$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$，此时任意非零向量均为其特征向量.

4.涉及二次型问题

熟悉了上面诸问题，下面的问题你当然不会感到陌生.

问题 14：（2001①）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$　　（　　）

（A）合同且相似　　（B）合同但相似

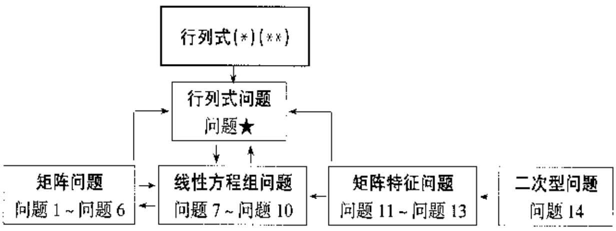
（C）不合同但相似　　（D）不合同且不相似

问题显然是要讨论它们的特征值情况，因而最终还是化归计算.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{vmatrix},$$

进而解 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ 的问题.

至此我们已经看到了上述诸问题与我们介绍的行列式（*）与（**）间的关系，这也可从下图中看得更为清晰（这里→表示转化关系）：



这样一来，如果再遇到这类问题，不管它以何形式或面目出现，你总不会感到陌生、感到无从下手了，这对于各种考试（不仅仅是考研）来讲，还有何愁？

我们再从另一角度看看一道考研不等式问题演化的历程.

全国硕士研究生入学考试 1993 年数学（二）试卷中有这样一道题目：

问题 1：设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$. 试证 $\left|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{Ma^2}{2}$，这里 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.（1993②）

它的证明不很难，比如有下面证法：

证 1：任取 $x\in(0,a]$，由微分中值定理

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x,\quad \xi\in(0,x).$$

又由 $f(0)=0$，则 $f(x)=f'(\xi)x$，$x\in(0,x)$. 故

$$\left|\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^a f'(\xi)\,x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^a |f'(\xi)|\,x\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}a^2.$$

证 2：设 $x \in (0,a]$**，由** $f(0)=0$**，知**

$$\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x).$$

令 $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant a} |f'(x)|$**，由积分性质及题设有**

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^x M\,\mathrm{d}t = Mt,$$

故

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a Mx\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}a^2.$$

该问题其实只是下面一个较为经典问题的特例而已，这个问题是：

问题 2：设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，在** (a,b) **内可导，且** $f(a)=0$**. 试证**

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

仿照上面的解法不难证得该问题. 下面再给出一个较为新颖的证法：

证：由积分性质且注意到 $f(a)=0$ **有** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$，$a \leqslant x \leqslant b$.

故

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b\int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x \\ &= \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b \\ &= \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\frac{(b-a)^2}{2}.\end{aligned}$$

即要证不等式成立. 与题 2 类似的问题还有：

问题 3：设 $f(x)$ **的一阶导数在** $[a,b]$ **上连续，且** $f(a)=f(b)=0$**，则**

$$\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

这里题目的条件中多了一个 $f(b)=0$ **的条件，如此一来它的结论稍有加强.**

证：若 $x \in (a,b)$**，在** $[a,x]$ **及** $[x,b]$ **上对** $f(x)$ **应用** Lagrange **中值定理有**

$$f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a),\quad a < \xi_1 < x, \qquad ①$$

$$f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b),\quad a < \xi_2 < b, \qquad ②$$

又 $f(a)=f(b)=0$**，由** $f'(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上连续，故** $|f'(x)|$ **在** $[a,b]$ **上亦连续，则** $|f'(x)|$ **必有最大值** M**，即**

$$|f'(x)| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)| = M.$$

再由式 ①，② 有 $|f'(x)| \leqslant M(x-a)$，$|f'(x)| \leqslant M(b-x)$.

故

$$\begin{aligned}\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{(b-a)^4}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right] \\ &\leqslant \frac{4}{(b-a)^2}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\,\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{4M}{(b-a)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\frac{1}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
$$= M = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|.$$

当然它(问题3)的特例情形是：

问题4：设函数 $f(x)$ 的一阶导数在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$. 试证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

证：对于积分计算可先凑微分，再用分部积分，这样可有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\right]_0^1-\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x,$$

而
$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x$$
$$=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

故
$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|.$$

问题3的另外变形是一道原苏联大学生数学竞赛题：

问题5：函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，又 $f'(a)=f'(b)=0$. 试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 满足 $|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证：由 $f(x)$ 在 $c=\frac{a+b}{2}$ 点 Taylor 展开且注意到 $f'(a)=0$，可有

$$f(c)=f(a)+f'(a)\cdot(c-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(c-a)^2$$
$$=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{8}(b-a)^2\quad(a<\xi_1<c),$$

又
$$f(c)=f(b)+f'(b)\cdot(c-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-a)^2$$
$$=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{8}(b-a)^2\quad(c<\xi_2<b),$$

故
$$|f(b)-f(a)|=\frac{1}{2}(b-a)^2|f''(\xi_2)-f''(\xi_1)|$$
$$\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2[|f''(\xi_2)|+|f''(\xi_1)|]$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(b-a)^2|f''(\xi)|,$$

即
$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

其中 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$.

问题6：设函数 $f(x)$ 的二阶导数连续，且 $f(0)=f(1)=0$，又 $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，试证

$\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$.

证：设 $f(x)$ **在** a **处取得最小值，显然** $a\in(0,1)$.

则 $f'(a)=0$，$f(a)=-1$. **依** Taylor **公式有（式中** ξ **在** x，a **之间）**

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)^2=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2.$$

因 $f(0)=f(1)=0$，**故　当** $x=0$，$x=1$ **时：**

$$0=-1+f''(\xi_1)\cdot\frac{a^2}{2}，\Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{2}{a^2}.$$

$$0=-1+f''(\xi_2)\cdot\frac{1}{2}(1-a)^2，\Rightarrow f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-a)^2}.$$

故　$a<\frac{1}{2}$**时，**$f''(\xi_1)>8$；$a\geqslant\frac{1}{2}$**时，**$f''(\xi_2)\geqslant 8$. **即知** $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$.

注：下面的问题是本例的变形或对偶问题：

设函数 $f(x)$ **的二阶导数连续，且** $f(0)=f(1)=0$，**又** $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=2$. **试证** $\min\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\leqslant -16$.

问题 3 **的另外变形或引申可见（它曾作为北方交通大学** 1994 **年大学生数学竞赛题）：**

问题 7：若 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上有二阶连续导数，且** $f(0)=f(1)=0$. **又** $x\in(0,1)$ **时** $f(x)\neq 0$. **试证** $\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$.

证：记 $M=|f(x_0)|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$，**在区间** $[0,x_0]$ **和** $[x_0,1]$ **上分别对** $f(x)$ **使用微分中值定理，有**

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0，\ 0<\xi_1<x_0，$$

及

$$-f(x_0)=f'(\xi_2)(1-x_0)，\ x_0<\xi_2<1.$$

则

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{M}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{|M|}\left[\int_0^{x_0}|f''(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1|f''(x)|\mathrm{d}x\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{|M|}\left|\int_{2\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|=4.$$

作为 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$ **下界的对偶问题可有（它是上海交通大学** 1991 **年大学生数学竞赛题）：**

问题 8：设函数 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上有连续导数，试证** $\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\geqslant\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

证：由设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，故** $|f(x)|$ **在** $[a,b]$ **上也连续，从而有** $x_0\in[a,b]$**，使** $|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

又由积分中值定理有 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$，$\xi\in[a,b]$**，故**

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=|f(\xi)|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

$$\geqslant|f(\xi)|+\left|\int_\xi^{x_0}f'(x)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)|+|f(x_0)-f(\xi)|$$

$$\geqslant|f(\xi)-f(x_0)-f(\xi)|=|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|.$$

当然问题还可写如：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x,$$

只须注意到 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$ 即可.

这样与题 2 结合可有不等式（注意到 $f(a)=0$）：

$$\frac{2}{(b-a)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|\leqslant\left|\frac{f(b)}{b-a}\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

作为题 8 的特例或引申便是研究生入学考试 1996 数学（一）的题目：

问题 9：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，其中 a，b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任意一点. 证明 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.（1996①）

证：由上面一阶泰勒公式，分别令 $x=0$ 和 $x=1$，则有

$$f(0)=f(c)-f'(c)c+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2,\ 0<\xi_1<c<1,$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,\ 0<c<\xi_2<1.$$

两式相减得

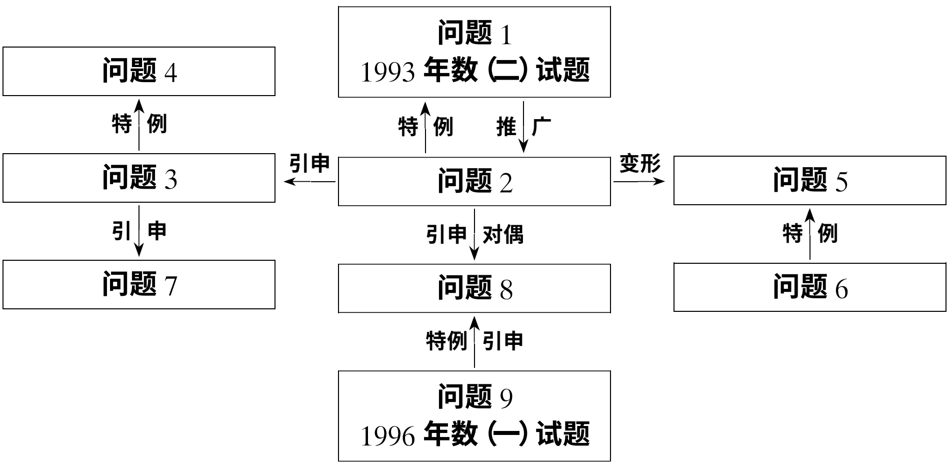
$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2+f''(\xi_1)c^2].$$

因此 $$|f'(c)|\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2$$

$$\leqslant a+a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2].$$

又因 $c\in(0,1)$，有 $(1-c)^2+c^2\leqslant 1$，故 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

由上我们已经看出这些问题间的内在联系：



搞清这些问题之间的关联，从中不仅可以学会掌握解这类问题的方法，更重要的可以看清这些问题彼此间是如何联系及转化的，如前所言解数学问题就是将未知转化为已知的过程. 此外弄清这些关系，也可看透拟题者的匠心与立意，因为特例、推广、引申和对偶也是拟造数学命题的重要手段和方法.

本书由北京文登学校《历年考研数学试题详解》编写组专家编写，执笔为吴振奎教授．在编写过程中参阅了陈文灯教授等专家的大量文献，北京文登学校也提供了极为宝贵的资料，谨在此向其致以谢意．

编　者

于 2005 年 3 月