

理论物理学习辅导丛书

郭硕鸿 著

电动力学

(第二版)

学习辅导书

黄 本 方奕忠

高等教育出版社

内容简介

本书是为配合郭硕鸿所著《电动力学》(第二版)而编写的学习辅导书。本书按原教材的章节顺序对每一章涉及的基本概念和基本理论均做出概述,使读者可以从中抓住经典电动力学的主要物理思想与方法。书中对习题的解题过程,着重于对问题做出简要的物理分析,给出解决问题的思路,指出结果的物理意义;而将一些基本的数学运算,有意地留给读者。除了原教材的习题外,书中还增加了少量补充题。

本书可供使用郭硕鸿所著《电动力学》(第二版)的师生在教学和学习中使用,亦可供采用其他电动力学教材的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

电动力学(第二版)学习辅导书/黄 本,方奕忠.

—北京:高等教育出版社,2004.11

ISBN 7-04-015567-2

I. 电... II. ①黄... ②方... III. 电动力学—高等学校—教学参考资料 IV. O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 097897 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			
开 本	850×1168 1/32	版 次	年 月 第 1 版
印 张	5.875	印 次	年 月 第 次印刷
字 数	140 000	定 价	9.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号:15567-00

策划编辑 刘 伟
责任编辑 王文颖
封面设计 张 志
责任绘图 吴文信
版式设计 王 莹
责任校对 朱惠芳
责任印制

序 言

本书主要为配合郭硕鸿教授所著《电动力学》(北京:高等教育出版社,1997,第二版)的教学而编写,亦可供采用其他电动力学教材的读者参考。

对经典电动力学的基本概念、基本理论和基本方法有清楚的理解,是学好这门课程的前提。因此,我们对每一章涉及的基本概念和基本理论均做出概述,希望读者从中可以抓住经典电动力学的主要物理思想与方法。本书除收入郭先生书中的习题之外,增加了少量补充题。在解题过程中,我们着重于对问题做出简要的物理分析,给出解决问题的思路,指出结果的物理意义,而将其中一些很基本的数学运算留给读者。因为,提高数学运算能力的唯一途径只有多练。书后附录给出基本的数学工具,以便读者查阅。

北京师范大学田晓岑教授仔细审阅了本书,并提出了有益的建议;高等教育出版社和本书的策划编辑与责任编辑给我们提供了多方面的支持和帮助。谨向他们表示衷心的感谢。

欢迎读者对书中错误或不妥之处,批评指正。

作 者

2004年3月于中山大学

目 录

第一章 电磁现象的普遍规律	1
要点概述	1
1.1 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式	1
1.2 电磁场的能量和动量	4
1.3 介质中的场方程与介质的电磁性质	6
1.4 电磁场的边值关系	8
习题与解答	9
补充题	22
第二章 静电场	31
要点概述	31
2.1 静电场和静电势	31
2.2 电势多极展开	32
2.3 静电场边值问题	33
2.4 静电能 外电场对电荷体系的作用能	36
习题与解答	38
补充题	59
第三章 静磁场	63
要点概述	63
3.1 静磁场方程和矢势	63
3.2 磁偶极矩的势和磁场	64
3.3 静磁场边值问题	65
3.4 静磁能 外磁场对电流的作用能	66
3.5 超导体电磁性质的宏观描述	67

3.6 矢势的量子效应	67
习题与解答	68
第四章 电磁波的传播	82
要点概述	82
4.1 真空中的波动方程	82
4.2 时谐波 亥姆霍兹方程和边值关系	82
4.3 真空中和非导电介质内的平面波	83
4.4 导体内的电磁波	85
4.5 电磁波在界面的反射和折射	86
4.6 谐振腔和波导管	88
4.7 等离子体中的电磁波	89
习题与解答	90
补充题	102
第五章 电磁波的辐射	104
要点概述	104
5.1 电磁势与规范变换 达朗贝尔方程	104
5.2 推迟势和辐射场	105
5.3 辐射场的多极展开	106
5.4 电磁波的衍射	108
5.5 电磁波的动量和动量流 辐射压力	109
习题与解答	109
补充题	122
第六章 狭义相对论	123
要点概述	123
6.1 相对论的基本原理和时空理论	123
6.2 洛伦兹变换的四维形式 四维协变量	126
6.3 相对论力学	127
6.4 电动力学的相对论协变性	129

6.5 电磁场中带电粒子的拉格朗日量和哈密顿量	131
习题与解答	132
第七章 带电粒子和电磁场的相互作用	154
要点概述	154
7.1 李纳-维谢尔势 任意运动带电粒子的电磁场	154
7.2 带电粒子的辐射频谱	156
7.3 切伦柯夫辐射	158
7.4 带电粒子的电磁场对粒子的反作用	158
7.5 电磁波的散射和吸收 介质的色散	158
习题与解答	161
补充题	169
附录	171
1. 三维空间中的矢量和二阶张量	171
2. 算符运算	172
3. 积分变换	174
4. δ 函数	174
5. 曲线正交坐标系	175
6. 轴对称下拉普拉斯方程的通解	178

第一章 电磁现象的普遍规律

要点概述

1.1 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式

以电荷守恒定律、库仑定律、安培定律、毕奥-萨伐尔定律和法拉第定律为主要实验基础的麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式,集中地反映了电磁相互作用的普遍规律,是电动力学最主要的理论基础.

电荷守恒定律 电荷守恒是物理和化学过程都遵从的基本规律,其微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

称为电流连续性方程.其中电荷体密度 ρ 表示单位体积内的净电荷量,电流密度矢量 \mathbf{J} 的方向表示电流的流向,其数值等于单位时间垂直通过单位面积的电荷量.在电流恒定的情形下,(1.1)式变为 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$,即恒定电流(直流电流)是无源的,其流线是连续、闭合的曲线.

库仑定律与静电场 库仑定律是关于静电力的实验定律——两个静止点电荷的相互作用力与它们的电荷量乘积成正比,与两者距离的平方成反比.近代物理认为,电荷激发电场,电力通过电场传递,因此库仑定律的物理本质是

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} \quad (1.2)$$

\mathbf{F} 是电荷 q_0 在电场中受到的作用力, \mathbf{E} 是 q_0 所在点的电场强度.

在国际单位制中,孤立的点电荷 q 在其周围空间任一点激发的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.3)$$

ϵ_0 是真空电容率. 电场遵从叠加原理,若体积 V 内电荷密度函数为 $\rho(x')$, 则任一点 x 的电场强度 \mathbf{E} , 是所有电荷元 $dq = \rho(x')dV'$ 在该点的电场强度之矢量和, 即

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x')\mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (1.4)$$

\mathbf{r} 是电荷分布点 x' 到场点 x 的矢径, r 是两者的距离, 积分遍及全部电荷分布区域 V . 从(1.4)式可导出静电场两个微分方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.5)$$

散度方程表示电荷只直接激发它附近的电场, 其积分形式是电场的高斯定理; 旋度方程表示静电场是无旋场, \mathbf{E} 线始发于正电荷并终止于负电荷, 即 \mathbf{E} 线无涡旋状结构, 这方程的积分形式表示静电场是保守力场.

安培定律、毕奥-萨伐尔定律与静磁场 安培定律是关于恒定电流之间相互作用力的实验定律. 电流之间的相互作用实质上通过电流的磁场传递, 恒定电流中一个电流元 $I d\mathbf{l}$ (或 $\mathbf{J} dV$) 在磁场中受到的力为

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1.6)$$

\mathbf{B} 是电流元所在处的磁感应强度. 毕奥-萨伐尔定律是恒定电流激发磁场的规律, 若体积 V 内电流密度函数为 $\mathbf{J}(x')$, 则任一点 x 的磁感应强度为

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(x') \times \mathbf{r}}{r^3} dV' \quad (1.7)$$

μ_0 为真空磁导率, \mathbf{r} 是电流分布点 x' 到场点 x 的矢径, r 是两者的距离, 积分遍及全部电流分布区域 V , 这意味着磁场也遵从叠加原理. 从(1.7)式可导出静磁场两个微分方程:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.8)$$

旋度方程表示电流只直接激发它附近的磁场, \mathbf{B} 线在电流分布点周围形成涡旋状结构, 其积分形式为静磁场的安培环路定理; 散度方程及其积分形式表明静磁场的 \mathbf{B} 线总是连续的, 即磁通有连续性. 由于迄今仍未找到自由磁荷(磁单极)存在的可靠证据, 电荷是电磁场唯一的激发源, 因此方程 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 对于时变磁场也成立.

法拉第定律与感应电场 法拉第定律的物理本质是随时间变化的磁场激发电场, 感应电场强度 \mathbf{E} 沿任意闭合回路 L 的积分, 正比于通过该回路所围面积 S 的磁通量之时变率:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.9)$$

其微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.10)$$

表示变化磁场激发的电场是有旋场, \mathbf{E} 线呈涡旋状结构, 这一性质与电荷直接激发的电场有明显差别.

麦克斯韦方程组 麦克斯韦将上述实验定律推广到普遍情形, 并引入位移电流假设, 得出一组描述电磁现象普遍规律的方程. 这组方程现在写成

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.11)$$

在 \mathbf{B} 的旋度方程中, $\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ 就是“位移电流密度”, 其实质是随时间变化的电场激发磁场. 在激发源之外的真空中, 这组方程表现为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.12)$$

它揭示了变化的电场与磁场互相激发转化的规律,这是时变电磁场可以脱离作为激发源的电荷电流,并以波的形式独立运动的原因.从这组方程可以导出 E 和 B 的齐次波动方程.电磁波在真空中的传播速度为

$$c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (1.13)$$

若将 $E = cB$, $B = -E/c$ 代入(1.12)中 E 的散度和旋度方程,将给出 B 的散度和旋度方程,这表明,变化的电场与磁场本质上存在着对称性和统一性.

洛伦兹力公式 洛伦兹将库仑定律和安培定律推广到普遍情形,给出带电粒子在电磁场中受力的规律:

$$F = qE + qv \times B \quad (1.14)$$

q 是粒子的电荷量, v 是其运动速度.电荷系统在电磁场中受到的力密度为

$$f = \rho E + \rho v \times B = \rho E + J \times B \quad (1.15)$$

$J = \rho v$ 为电流密度.电磁场对电荷系统做功的功率密度为

$$f \cdot v = (\rho E + J \times B) \cdot v = \rho E \cdot v = E \cdot J \quad (1.16)$$

这表明磁场并不直接对电荷做功.

麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式所描写的电磁相互作用理论,是一个线性理论,而且是局域作用理论——电荷电流只与其所在处的 E 和 B 直接发生作用.

1.2 电磁场的能量和动量

经典理论把电磁场描述成连续分布的物质,它以波的形式运动. E 和 B 是描写这种物质分布的两个基本物理量.设想体积 V 内存在电荷,电磁场通过 V 的界面 S 向 V 内运动,由麦克斯韦方程组(1.11)和洛伦兹力公式(1.15),可以导出电磁场与电荷系统相互作用的能量守恒表达式:

$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_V \omega dV + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV \quad (1.17)$$

和动量守恒表达式

$$-\oint_S ds \cdot \vec{T} = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} dV + \int_V \mathbf{f} dV \quad (1.18)$$

相应的微分形式为

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.19)$$

$$-\nabla \cdot \vec{T} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \mathbf{f} \quad (1.20)$$

电磁场的能量密度 ω , 能流密度 \mathbf{S} , 动量密度 \mathbf{g} 和动量流密度张量 \vec{T} 分别是

$$\omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (1.21)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.23)$$

$$\vec{T} = -\epsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} + \omega \vec{I} \quad (1.24)$$

(1.21)式表明,电磁场的能量密度与基本场量 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的平方成正比.从(1.22)和(1.23)两式可看出,电磁场的能流密度 \mathbf{S} 与动量密度 \mathbf{g} 不仅空间取向一致,而且数值上也紧密关联,即 $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$.事实上,真空中电磁波的能量和动量都以光速 c 沿着波的传播方向转移.从(1.18)式看到,电磁场动量流密度张量 \vec{T} 与作用在单位面积上的力有相同的量纲,因此也称之为电磁场应力张量,其表达式(1.24)中的 ω 是(1.21)式表示的电磁场能量密度, \vec{I} 为单位张量. \vec{T} 的分量

$$T_{ij} = e_i \cdot \vec{T} \cdot e_j = -\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j + \omega \delta_{ij} \quad (1.25)$$

表示单位时间通过垂直于坐标系 i 轴的单位面积上电磁场动量流的 j 分量,即作用在单位面积上的电磁场应力,当电磁场作用于宏

观物体时,它描写物体表面受到的电磁场应力,包括法向应力和切向应力,例如静电场对导体表面施加的法向张力,磁场对磁性体表面的压力(磁压),电磁波对物体表面的辐射压力(光压)。

1.3 介质中的场方程与介质的电磁性质

电磁场作用于介质,是场与介质内大量微观带电粒子相互作用相互制约的过程.经典电磁理论对介质极化与磁化的描述,并未涉及其中的微观动力学机制,仅以两个唯象模型——分子电偶极矩 $p=ql$ 和分子电流磁矩 $m=ia$ 为基础.介质极化强度 P 和磁化强度 M 分别定义为

$$P = \sum p / \Delta V, \quad M = \sum m / \Delta V \quad (1.26)$$

ΔV 表示介质内任意一个小体积, $\sum p$ 和 $\sum m$ 分别表示这体积内总的分子电偶极矩和分子磁矩.介质内束缚(极化)电荷体密度 ρ_p 和磁化电流密度 J_M 分别由下述两式描述:

$$\rho_p = -\nabla \cdot P, \quad J_M = \nabla \times M \quad (1.27)$$

当电磁场随时间变化时,将引起介质分子内束缚电荷的振动而形成极化电流.由电流连续性方程(1.1)和(1.27)的第一式,得极化电流密度:

$$J_p = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.28)$$

一般地,介质内电荷体密度 $\rho = \rho_f + \rho_p$, 电流密度 $J = J_f + J_M + J_p$, ρ_f 是自由电荷密度, J_f 是传导电流密度.为使不容易被实验直接测量的 ρ_p , J_p 和 J_M 不出现在麦克斯韦方程组中,定义辅助场量——电位移矢量 D 和磁场强度 H :

$$D = \epsilon_0 E + P, \quad H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad (1.29)$$

即 D 、 P 和 $\epsilon_0 E$ 有相同的量纲, H 、 M 和 B/μ_0 有相同的量纲.将(1.27)、(1.28)和(1.29)代入(1.11),得介质中的麦克斯韦方程组:

$$\nabla \cdot D = \rho_f, \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.30)$$

这组方程虽然形式上与真空中的麦氏方程组(1.11)相似,但它出现四个场量 \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} 和 \mathbf{H} , 即使给定 ρ_f 和 \mathbf{J}_f 的分布函数, 以及一定的初条件和边界条件, 从这组方程也无法解出电磁场, 因而它不是完备的. 原因是介质内 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} , \mathbf{H} 与 \mathbf{B} 的关系没有给定, 这些关系需由实验测量.

在各向同性的线性介质内, 实验给出

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.32)$$

介质的极化率 χ_e 和相对电容率 $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ 均为无量纲的比例系数, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ 是介质的电容率. 介质的磁化率 χ_m 和相对磁导率 $\mu_r = 1 + \chi_m$ 也是无量纲的比例系数, $\mu = \mu_r \mu_0$ 是介质的磁导率.

在电磁场作用下, 导体内大量自由电子漂移运动的宏观效应使它显示出导电性. 各种介质的导电性能由实验测定. 线性均匀导体的导电规律由欧姆定律

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} \quad (1.33)$$

描述, σ 是导体的电导率. 电磁场还使导体分子中的束缚电荷极化和磁化, 因此导体也有其电容率和磁导率.

各向异性介质, 例如晶体, 即使作用电磁场的强度相同, 若 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的方向不同, 其极化与磁化的取向也不同, 极化率和磁化率表现为张量. 铁磁质 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的关系是非线性而且是非单值的, 需由实验测定磁化曲线和磁滞回线才能确定两者的函数关系. 非线性介质的极化与磁化效应, 不仅与场强 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的一次幂有关, 与场强的二次幂甚至高次幂也有关.

从介质中的场方程(1.30)和自由电荷受到的力密度 $\mathbf{f} = \rho_f \mathbf{E} + \rho_f \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, 可以导出如同(1.19)那样的能量关系式:

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.34)$$

这里 $f \cdot v = E \cdot J_f$ 是场对介质内自由电荷作的功率密度, 这部分能量通常转化成介质的热损耗. 介质中的能流密度 S 和能量密度的时变率分别为

$$S = E \times H \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.36)$$

将 $D = \epsilon E$, $B = \mu H$ 代入(1.36)式, 得各向同性线性均匀介质内的电磁能量密度:

$$\omega = \frac{1}{2} E \cdot D + \frac{1}{2} B \cdot H \quad (1.37)$$

由 D 和 H 的定义(1.29), 上式为

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) + \frac{1}{2} E \cdot P + \frac{1}{2} \mu_0 H \cdot M \quad (1.38)$$

右方第一项是介质内电磁场的能量密度, 第二项是极化能量密度, 第三项是磁化能量密度.

1.4 电磁场的边值关系

微分形式的麦氏方程组(1.30)适用于连续的介质内部. 由于不同介质有不同的电磁性质, 介质分界面上一般会出现面电荷和面电流分布, 使得界面两边的场量发生跃变, 因而微分形式的麦氏方程组在界面上不再适用. 将这组方程的积分形式

$$\begin{aligned} \oint_S D \cdot dS &= \int_V \rho_f dV, & \oint_L E \cdot dl &= -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS \\ \oint_S B \cdot dS &= 0, & \oint_L H \cdot dl &= \int_S J_f \cdot dS + \frac{d}{dt} \int_S D \cdot dS \end{aligned} \quad (1.39)$$

应用于两种介质的分界面上, 可得到电磁场的边值关系

$$\begin{aligned} e_n \cdot (D_2 - D_1) &= \sigma_f, & e_n \times (E_2 - E_1) &= 0 \\ e_n \cdot (B_2 - B_1) &= 0, & e_n \times (H_2 - H_1) &= \alpha_f \end{aligned} \quad (1.40)$$

e_n 是从介质 1 指向介质 2 的法向单位矢量, σ_f 为界面上的自由电荷面密度, α_f 为传导电流面密度. 第一式表示界面两边 D 的法向

分量跃变由界面上的 σ_f 引起,第二、三式分别表示界面两边 E 的切向分量和 B 的法向分量连续,第四式表示界面两边 H 的切向分量跃变由界面上的 α_f 引起.将(1.27)两式相应的积分形式

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \rho_p dV, \quad \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_M \cdot d\mathbf{S} \quad (1.41)$$

应用到界面上,可得界面两边极化强度 \mathbf{P} 与磁化强度 \mathbf{M} 的跃变关系:

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = -\sigma_p, \quad \mathbf{e}_n \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) = \alpha_M \quad (1.42)$$

σ_p 是界面束缚(极化)电荷面密度, α_M 是磁化电流面密度.将电流连续性方程(1.1)的积分形式应用于界面,可得边值关系:

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (1.43)$$

σ 是界面上包括自由电荷与极化电荷的面密度.电流恒定时,(1.43)式成为 $J_{2n} = J_{1n}$.

习题与解答

1.1 根据算符 ∇ 的微分性与矢量性,推导下列公式:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

【解】记 $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \nabla_B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, ∇_A 是作用于 \mathbf{A} 的算符, ∇_B 是作用于 \mathbf{B} 的算符,利用 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,有

$$\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla_B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

在上式中令 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$,即得

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

1.2 设 u 是空间坐标 x, y, z 的函数, 证明:

$$\nabla f(u) = \frac{df}{du} \nabla u \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du} \quad (3)$$

【证】对于 $\nabla f(u)$, 注意到 $\partial f / \partial u = df / du$, 有

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \frac{df}{du} \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{df}{du} \nabla u \end{aligned}$$

在直角坐标系中将算符 ∇ 和矢量 \mathbf{A} 写成分量形式, 便可证明(2)式和(3)式。

1.3 从源点(即电荷电流分布点) x' 到场点 x 的距离 r , 以及矢径 \mathbf{r} 分别为

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ \mathbf{r} &= (x-x')\mathbf{e}_x + (y-y')\mathbf{e}_y + (z-z')\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

对源变数 x' 和场变数 x 求微商的算符分别为

$$\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

(1) 证明下列结果, 并体会算符 ∇' 与 ∇ 的关系:

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{单位矢量}) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = -\nabla' \cdot \mathbf{r} = 3 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = -\nabla' \times \mathbf{r} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla r = -\nabla' r = \vec{I} \quad (\text{单位张量}) \quad (4)$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5)$$