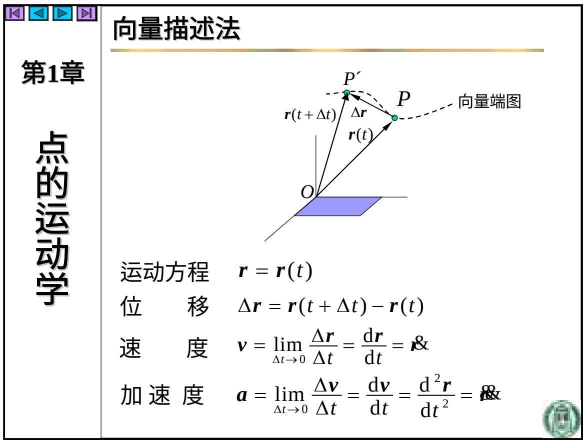
理论力学教学参考书

-杨倩-外排

第 1 章 点的运动学

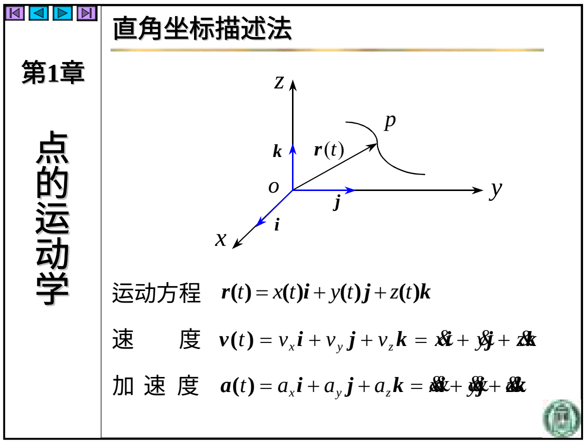
1.1 向量描述法



从 O 点指向 P 点的向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 称为 P 点相对 O 点的向径，可以完全确定点的位置。向径末端在空间划出一条空间曲线，叫做向量端图，它描绘了点的运动轨迹。所以 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 又可以理解为（参数形式的）轨迹方程。

向量描述法主要用于理论推导，在解决具体问题时，往往还需要借助直角坐标或自然坐标等描述法。

1.2 直角坐标描述法



设直角坐标系 $Oxyz$ 在参考系中固定不动，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别是坐标轴 Ox，Oy，Oz 的单位向量，所以，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是大小和方向都不变的常向量。

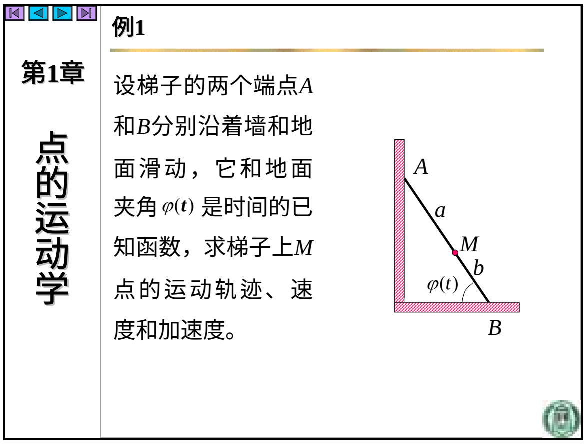
$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$表示点在直角坐标系 $Oxyz$ 下的坐标，是标量。

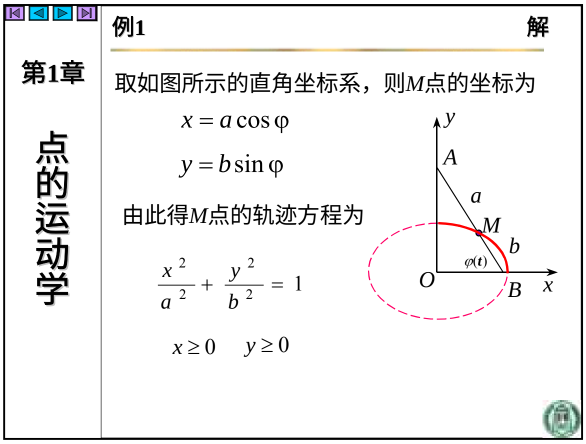
相应地，

$v_x=\dot{x}$，$v_y=\dot{y}$，$v_z=\dot{z}$

表示速度在该直角坐标系下的投影，都是标量。

$a_x=\ddot{x}$，$a_y=\ddot{y}$，$a_z=\ddot{z}$表示加速度在该直角坐标系下的投影，也都是标量。





坐标 x，y 可以分别由 AM，MB 段向对应的坐标轴投影得到，坐标 x，y 关于时间的表达式就是运动方程。写成向量形式为：

$$\boldsymbol{r}_{OM}=a\cos\varphi\boldsymbol{i}+b\sin\varphi\boldsymbol{j}$$

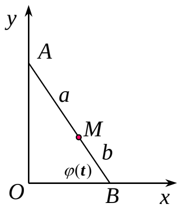
运动方程联立消去$\varphi(t)$可以得到轨迹方程，这里是四分之一椭圆。

第1章 点的运动学

例1 **解**

M点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} = (-a\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{i} + (b\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$



M点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} = -a(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\boldsymbol{i} + b(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

按照定义，运动方程对时间求 1 次和 2 次导数可以得到速度和加速度。也可以写成分量形式：

$$v_x = -a\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$v_y = a\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$a_x = -a(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)$$
$$a_y = a(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$$

第1章 点的运动学

例1 **讨论**

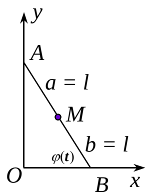
- 当 $a = b = l$ 时，M点的运动轨迹：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$$

$$\Downarrow a = b = l$$

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad x \ge 0,\ y \ge 0$$

四分之一圆



这里针对 M 点处于 AB 杆的中点这一特殊位置分析运动的几个特性。

当 M 点处于 AB 杆的中点，椭圆运动方程退化为圆的运动方程。

第1章 点的运动学

例1 **讨论**

- 当 $a = b = l$ 时，M点的速度：

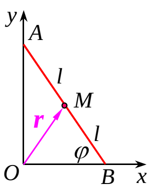
$$\boldsymbol{v} = (-a\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{i} + (b\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$

$$\Downarrow a = b = l$$

$$\boldsymbol{v} = l\dot{\varphi}(-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{r} = l(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} = 0$$



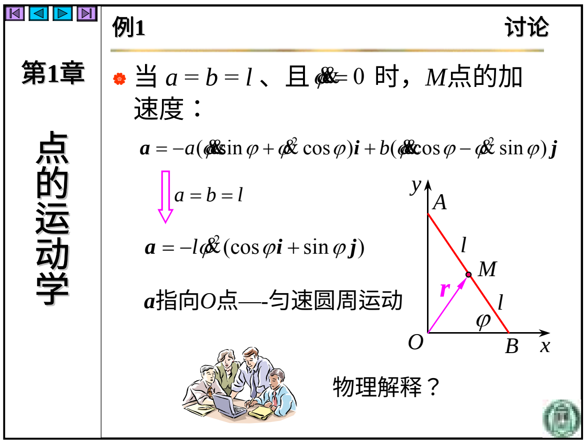
$\Rightarrow$ M点的速度垂直于其向径！

物理解释？

现在分析速度。

向量点乘得零表示两个向量相互垂直。

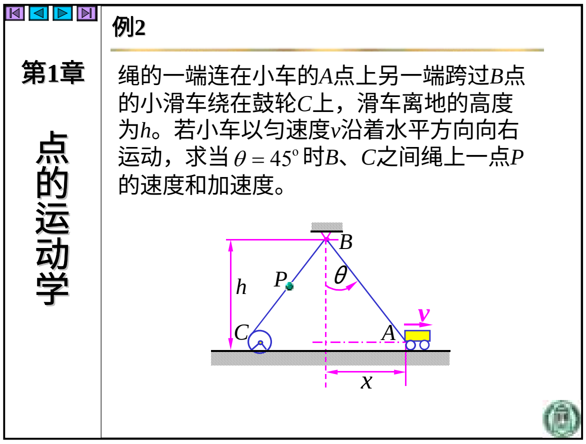
速度与向径垂直说明速度为环向。这实际上是圆周运动的一般性质。



最后一个式子可以写成：

$$\boldsymbol{a}=-\dot{\varphi}^2\boldsymbol{r}_{OM}$$

前面的负号表示加速度与向径方向相反。由此说明加速度 $\boldsymbol{a}$ 指向原点 O。这正是向心加速度。这是匀速圆周运动的一般规律，变速运动则不然。



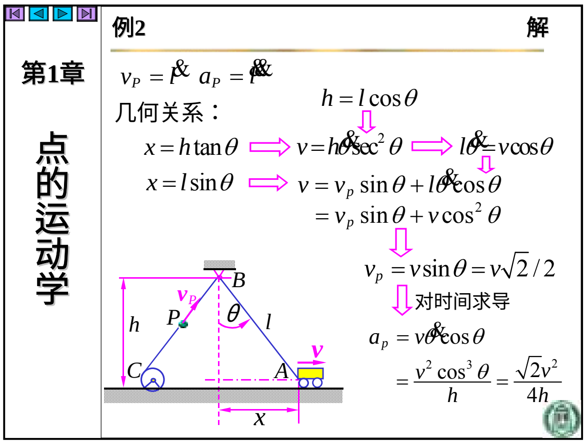
因直线 PB 方向不变，P 点速率 v_p 就是 P 点到 B 点距离减少的速率。因绳不可伸长，P 点到 B 点之间距离的减少速率就等于 A 点到 B 点之间距离的增加速率 $\dot{l}$。所以，P 点速率 $v_p=\dot{l}$，对时间求导得到加速度。

利用几何关系建立 h, l, x, θ 之间的解析表达式，对时间求 1 次和 2 次导，可求解出 P 点的速度和加速度的表达式。

另解：将 $l=\sqrt{x^2+h^2}$ 对时间求 1 次和 2 次导，再将

$$\dot{l}=v_p,\ddot{l}=a_p,x=h,\dot{x}=v,\ddot{x}=0$$

代入即可。

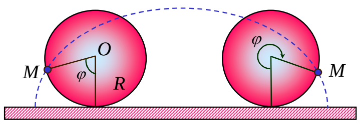


第1章

点的运动学

例3

半径为R的轮子沿直线轨道纯滚动(无滑动地滚动)。设轮子保持在同一竖直平面内运动，且轮心的速度为已知值u，试分析轮子边缘一点M的运动。



图示为轮子在任意两个时刻的位置。

第1章

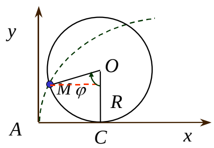
点的运动学

例3 解

取坐标系Axy如图所示，并设M点所在的一个最低位置为原点A，则当轮子转过一个角度后，M点坐标为

$$x = AC - OM\sin\varphi = R(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = OC - OM\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi)$$



这是旋轮线的参数方程。

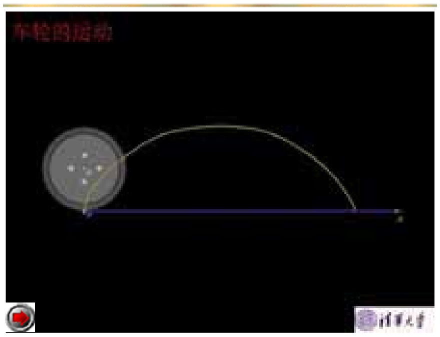
$OC = OM\,(= R)$为半径。

由于纯滚动，所以直线段AC等于弧MC。而弧段MC又等于$R\varphi$。所以$AC = x_O = R\varphi$。C为切点，φ为半径OM转过的角度。

第1章

点的运动学

例3 解



第1章 点的运动学

例3 解

M点的速度为：

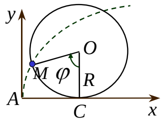
$$x = R(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = R(1-\cos\varphi)$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}$$
$$= R\dot{\varphi}(1-\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (R\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

其中$\dot{\varphi}$可由轮心速度求出：

$$u = \dot{x}_O = \frac{\mathrm{d}(R\varphi)}{\mathrm{d}t} = R\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{u}{R} \Longrightarrow \ddot{\varphi} = \frac{a}{R}$$



将 M 点的坐标对时间求一次导得到 M 点的速度。注意，这里的φ不是常数，其导数可以对根据前面求得的表达式 $x_O=R\varphi$求导得到。而这里O点的速度和加速度 $\dot{x}_O = u, \ddot{x}_O = a$ 作为已知。

第1章 点的运动学

例3 讨论

$$\boldsymbol{v} = R\dot{\varphi}(1-\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (R\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

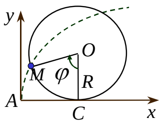
- 当M点与地面接触时，即 $\varphi=2k\pi$

  $v = 0$ —M点在该瞬时速度为零！

为什么？

- 当M点位于最高点时，即$\varphi=(2k+1)\pi$

  $\boldsymbol{v} = 2R\dot{\varphi}\boldsymbol{i}$



车轮切点受到轨道的限制，使车轮与轨道的切点在公法线方向的速度相等，所以竖直方向速度为零，否则车轮会嵌入或脱离轨道；纯滚动要求切点与直线轨道之间没有相对滑动，这要求车轮的切点与轨道在切线方向的速度相等，所以水平方向速度为零。

第1章 点的运动学

例3 讨论

- M点的速度始终垂直于CM

$$\boldsymbol{v} = R\dot{\varphi}(1-\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (R\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

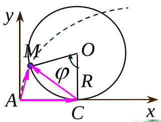
$$v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \left|2R\dot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}\right| = r_{CM}\dot{\varphi}$$

$$\boldsymbol{r}_{AM} = R(\varphi-\sin\varphi)\boldsymbol{i} + R(1-\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_{AC} = R\varphi\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{r}_{CM} = \boldsymbol{r}_{AM} - \boldsymbol{r}_{AC}$$
$$= -R\sin\varphi\boldsymbol{i} + R(1-\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}_{AC} = 0$$



车轮的速度分布与以切点为转轴的定轴转动的速度分布完全一样，即：任意一点的速度方向垂直于该点到切点的连线，速度的大小与该点到切点的距离成正比。区别在于，这里的切点并不是固定的转轴。在下一章的刚体平面运动中，我们还将利用速度瞬心的概念讨论这个问题。

第1章

点的运动学

例3 **解**

M点的加速度为：

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}} \Leftarrow \boldsymbol{v}=R\dot{\varphi}(1-\cos\varphi)\boldsymbol{i}+(R\dot{\varphi}\sin\varphi)\boldsymbol{j}$$

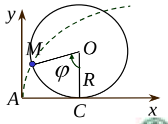
$$=R[\ddot{\varphi}(1-\cos\varphi)+\dot{\varphi}^2\sin\varphi]\boldsymbol{i}+R(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$

$$=[a(1-\cos\varphi)+\frac{u^2}{R}\sin\varphi]\boldsymbol{i}+(a\sin\varphi+\frac{u^2}{R}\cos\varphi)\boldsymbol{j}$$

讨论：当M点与地面接触时

$$\varphi=2k\pi$$

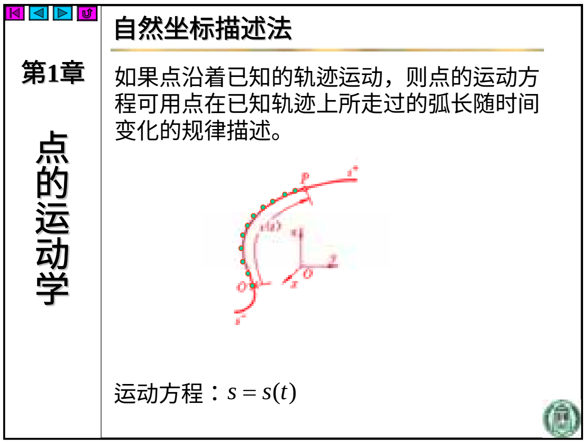
$$\boldsymbol{a}=\frac{u^2}{R}\boldsymbol{j}\neq 0$$



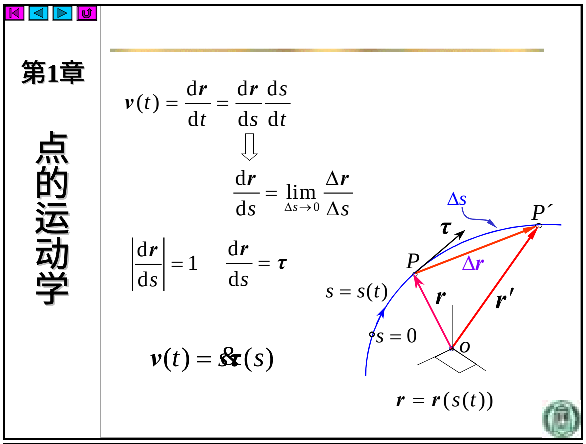
为什么$\boldsymbol{a}$向上？

记住，圆轮纯滚动时切点的速度为零，但加速度并不为零，而是具有向心加速度，竖直向上指向圆心。后面还会用到该结论。

1.3 自然坐标描述法



以点的运动轨迹(曲线)上任一点为原点，并规定一个正方向，以点到原点之间的弧长(及其正负号)来描述运动的方法为自然坐标描述法。相应的运动方程为弧坐标形式的运动方程。它适于描述运动轨迹已知的运动。

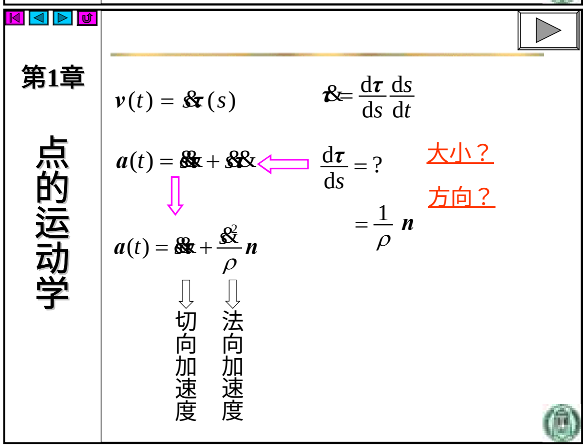


借助向量描述法推导自然坐标描述的点的运动规律。

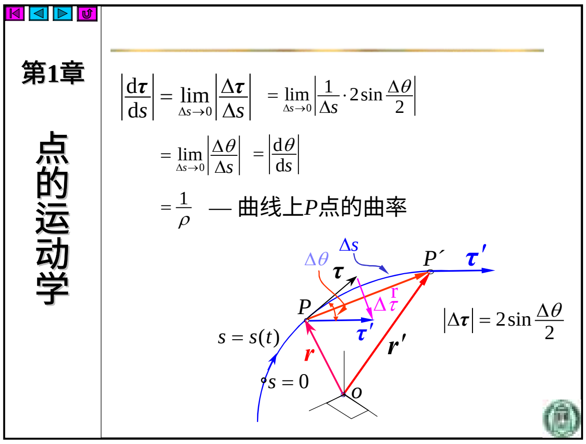
第一步利用了复合函数求导公式。

$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}$ 的大小和方向可以从图中 P' 点趋于 P 点时直观地看出来。

速度表达式 $\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{\tau}$ 中的 $\dot{s}$ 表示速度的大小， $\boldsymbol{\tau}$ 是轨迹曲线的切向单位向量，表示速度的方向。

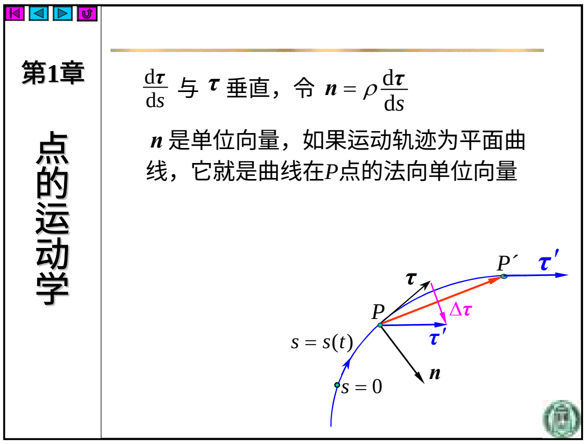


速度表达式 $\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{\tau}$ 对时间求导即可以得到加速度。注意这里的 $\boldsymbol{\tau}$ 是变量，是单位向量，大小为 1，保持不变，但方向随时间变化，求导一般不为零。下面具体研究其导数的大小和方向。



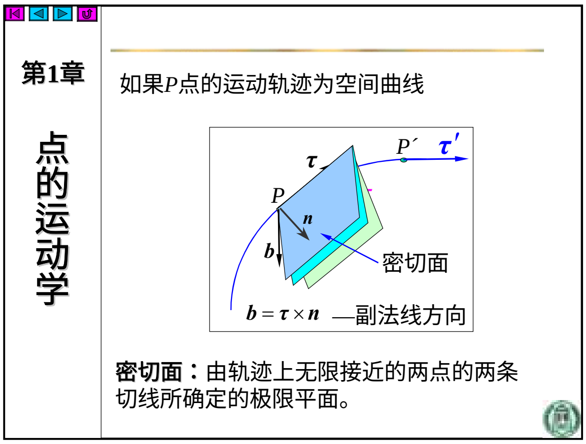
$$\left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$$ 是曲率（ρ 为曲率半径）在数学中的定义。根据这个定义可以计算出圆的曲率半径就是圆的半径。

由 P 点处的三个向量 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}', \Delta\boldsymbol{\tau}$ 构成的三角形关系得到 $|\Delta\boldsymbol{\tau}| = 2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}$。推导中还用到了关系式：$\lim\limits_{\Delta\theta\to 0} 2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2\Delta\theta} = 1$。



由于 $\boldsymbol{\tau}$ 是切向单位向量，导数应垂直于自身（切向）方向，沿着法向 $\boldsymbol{n}$。

另外，从图中可以看出 $\boldsymbol{\tau} + \Delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}'$，因此 $\Delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}$ 表示了 Δt 时间间隔切向的变化量，取极限时指向法向 $\boldsymbol{n}$，这就是 $\boldsymbol{\tau}$ 的导数方向。



为描述空间曲线，需要定义几个平面：密切面，法平面（与密切面垂直并包含法线 $\boldsymbol{n}$ 的平面）。

副法向 $\boldsymbol{b}$：同时垂直于法向和切向的方向，即垂直于密切面的方向。

切向 $\boldsymbol{\tau}$，法向 $\boldsymbol{n}$ 和副法向 $\boldsymbol{b}$ 构成了正交坐标系，称为自然坐标系。

例1

第1章 **点的运动学**

单摆的运动规律为$\varphi=\varphi_0\sin\omega t$， ω为常数，$OA=l$。求摆锤A的速度$\boldsymbol{v}$和加速度$\boldsymbol{a}$。

解：以O_1点为原点建立弧坐标s。

A点弧坐标形式的运动方程为

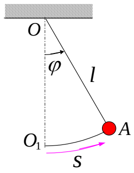
$$s=l\varphi=l\varphi_0\sin\omega t$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{\tau}=l\varphi_0\omega\cos\omega t\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{l}\boldsymbol{n}$$

$$=l\varphi_0\omega^2\left(-\sin\omega t\boldsymbol{\tau}+\varphi_0\cos^2\omega t\boldsymbol{n}\right)$$

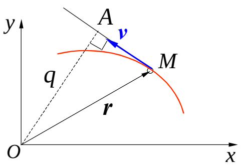


根据几何关系列出弧长 s 的表达式，将弧长 s 对时间的 1 次和 2 次导数代入前面导出的加速度向量表达式中即可。这里是圆周运动，曲率半径就是圆的半径，即绳长 l。

例2

第1章 **点的运动学**

设有一点M的轨迹是平面曲线，M点的向径为$\boldsymbol{r}$，速度为$\boldsymbol{v}$。直线OA垂直于过M点的切线，并且与切线交于A点。试求A点的**速率**。



设$|MA|=l$，$|OA|=q$。因向量从 M 指向 A 的向量沿 M 点的切向，可记为 $l\boldsymbol{\tau}$。由图中几何关系可以看出：$\boldsymbol{r}_{OA}=\boldsymbol{r}+l\boldsymbol{\tau}$，此式求导即得 $\boldsymbol{v}_A$。其中用到的关系式 $l=-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\tau}$ 和 $q=-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ 是根据投影关系得到的。$\dot{\boldsymbol{\tau}}=\dfrac{v}{\rho}\boldsymbol{n}$ 是前面的推导结果。

最后的速度大小是根据上一个向量速度表达式中两个分量的合成得到的。其中利用了直角三角形的几何关系 $r=\sqrt{q^2+l^2}$。

例2 **解**

第1章 **点的运动学**

$$l=-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\tau}\qquad q=-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{l}=-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}=-v-\frac{v}{\rho}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$=-v+\frac{q}{\rho}v$$

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}+l\boldsymbol{\tau}$$

$$\Downarrow$$

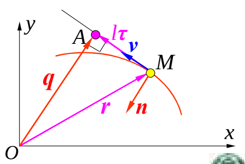
$$\boldsymbol{v}_A=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}+l\boldsymbol{\tau})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}+\dot{l}\boldsymbol{\tau}+\frac{lv}{\rho}\boldsymbol{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{v}_A=\frac{(q\boldsymbol{\tau}+l\boldsymbol{n})v}{\rho}$$

$$\Downarrow$$

$$v_A=\frac{rv}{\rho}$$



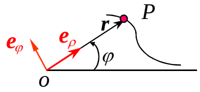
1.4 极坐标描述法

第1章 点的运动学

极坐标描述法

点P沿着**平面曲线**运动，其在任意时刻的位置可以用极坐标表示为：

$$\rho=\rho(t),\quad \varphi=\varphi(t)$$



P点的向径:

$$\boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{e}_\rho(t)$$

$\boldsymbol{e}_\rho$ — 径向单位向量　$\boldsymbol{e}_\varphi$ — 横向单位向量

由向量对时间的导数的物理意义可得：

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\rho=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$$

第1章 点的运动学

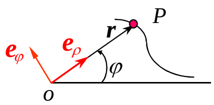
- P点的速度为

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)\Leftarrow \boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{e}_\rho(t)$$

$$=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\boldsymbol{e}}_\rho\Leftarrow \dot{\boldsymbol{e}}_\rho=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

径向速度　横向速度



$\boldsymbol{v}$的方向？

第1章 点的运动学

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\rho=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$$

- P点的加速度为

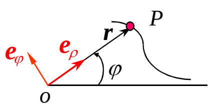
$$\boldsymbol{a}(t)=\dot{\boldsymbol{v}}(t)\Leftarrow \boldsymbol{v}(t)=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$=\ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\dot{\rho}\dot{\boldsymbol{e}}_\rho+\dot{\rho}\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\rho\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\rho\dot{\varphi}\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi$$

$$=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\rho+(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

径向加速度$\boldsymbol{a}_\rho$　横向加速度$\boldsymbol{a}_\varphi$

请注意径向和法向、横向和切向之间的差别！



径向和横向单位向量$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi$在直角坐标系中可以写作：

$$\boldsymbol{e}_\rho=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}$$

对t求导即可验证最后两个等式。

将向径表达式$\boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{e}(t)$对时间求 1 次和 2 次导数分别得到速度和加速度。每次求导后都作替换：

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\rho\Rightarrow\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi\Rightarrow-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho$$

即可。速度的方向一般既不沿径向也不沿横向，而是二者的合成结果。

加速度也可以类似地得到。

这里的径向和横向是相对向径方向而言，与原点O的选择位置有关。而法向和切向是相对运动轨迹而言，是运动自身的特性，与坐标系的选取无关。特别地，当点沿着圆周运动时，横向和切向平行，径向与法向平行。

极坐标系下的速度和加速度的表达式一般是以径向和横向分量形式给出的，当然也可以写成切向和法向分量的形式，但那要复杂得多。同学们可以试着推导一下。

第1章 点的运动学

例1

已知点的运动方程是 $\rho = e(1-\cos\omega t),\ \varphi = \omega t$，其中$e$、$\omega$均为常数，求当$t=\pi/2\omega$瞬时点的速度和加速度。

解：$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi = e\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\omega\boldsymbol{e}_\varphi$

$t = \pi/2\omega$

$$\boldsymbol{v} = e\omega(\boldsymbol{e}_\rho + \boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = (e\cos\omega t - \rho)\omega^2$$

$$a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 2e\omega^2\sin\omega t$$

$$\boldsymbol{a} = -e\omega^2\boldsymbol{e}_\rho + 2e\omega^2\boldsymbol{e}_\varphi$$

直接将已知条件中关于ρ，φ的表达式代入前面推出的速度和加速度表达式中做相应的求导运算，最后将确定的时间 t 代入即可。

第1章 点的运动学

例2　开普勒定律

- 行星沿着椭圆形轨道绕太阳运动，椭圆方程为$\rho = p/(1+e\cos\varphi),\ 0\le e\le 1,\ p>0$；
- 在行星运动过程中，从太阳到行星的向径所扫过的面积与时间成正比，或者说面积速度始终保持是常数，即$\rho^2\dot{\varphi} = C$
- 求行星的加速度。

将已知条件 $\rho^2\dot{\varphi} = C$ 代入横向加速度表达式得$a_\varphi = 0$，即加速度沿径向。

将椭圆方程 $p/\rho = 1 + e\cos\varphi$ 对时间求导得$-p\rho^{-2}\dot{\rho} = -e\dot{\varphi}\sin\varphi$，进一步改写成 $\dot{\rho} = e\rho^2\dot{\varphi}\sin\varphi/p$，将 $\rho^2\dot{\varphi} = C$ 代入得 $\dot{\rho} = Ce\sin\varphi/p$。再次对时间求导得 $\ddot{\rho} = Ce\dot{\varphi}\cos\varphi/p$。再将 $\rho^2\dot{\varphi} = C$ 代入得到

$$\ddot{\rho} = \frac{C^2e}{p}\frac{1}{\rho^2}\cos\varphi$$

将上面导出的 $\ddot{\rho}$和 $\rho^2\dot{\varphi} = C$ 代入径向加速度表达式中，即可得径向加速度。可见，行星的加速度大小与行星到太阳的距离平方成反比，方向指向太阳。

第1章 点的运动学

例2　解

$$a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$\rho^2\dot{\varphi} = C$$

$$\frac{p}{\rho} = 1 + e\cos\varphi$$

$$-\frac{p}{\rho^2}\dot{\rho} = -e\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{\rho} = \frac{Ce}{p}\sin\varphi$$

$$\ddot{\rho} = \frac{Ce}{p}\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{C^2e}{p}\frac{1}{\rho^2}\cos\varphi$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = \ddot{\rho} - C^2/\rho^3 = \frac{C^2}{p\rho^2}\left(e\cos\varphi - \frac{p}{\rho}\right)$$

$$a_\rho = -\frac{C^2}{p\rho^2}$$

行星的加速度始终指向太阳！

1.5 曲线坐标描述法

第1章 点的运动学

曲线坐标描述法

空间一点可以由三个独立变量$q_1(t), q_2(t), q_3(t)$(称为曲线坐标)来描述，该点的向径写成为

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

则该点的速度用曲线坐标表示为

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

利用复合函数求导公式可以得到速度表达式。这里$\dot{q}_i$是标量，$\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i$是向量，但不是单位向量。每个向量$\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i$除以其长度$H_i$（称为拉梅系数）得到单位向量。速度就可以写成：

$$\boldsymbol{v} = \sum (H_i \dot{q}_i)\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \sum v_i \boldsymbol{e}_i$$

第1章 点的运动学

若令 $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ $\quad H_i = \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| \quad (i = 1,2,3)$

则 $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_{q_i}\boldsymbol{e}_i \quad v_{q_i} = H_i \dot{q}_i$

同理，点加速度也可以用曲线坐标写出来。

容易证明：如果$\boldsymbol{e}_i$相互垂直，则点加速度为

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{3} a_{q_i}\boldsymbol{e}_i$$

其中

$$a_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] \qquad T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(H_i \dot{q}_i)^2$$

加速度公式的推导比较复杂，不在这里给出。推导过程与拉格朗日第二类方程的推导类似，同学们可以等学过第 8 章之后再来练习补充这里未给出的推导。

第1章 点的运动学

例1

试求柱坐标形式的速度和加速度公式。

解：令 $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$ ，则有：

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$$

$$H_\rho = 1, H_\varphi = \rho, H_z = 1$$

径向、横向和 z方向速度为

$$v_\rho = \dot{\rho}, v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, v_z = \dot{z}$$

由此得

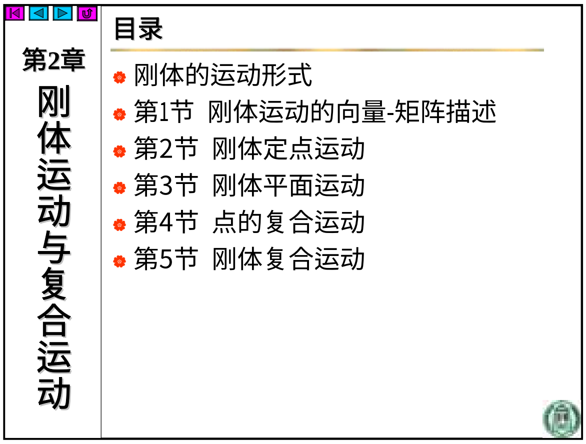
$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

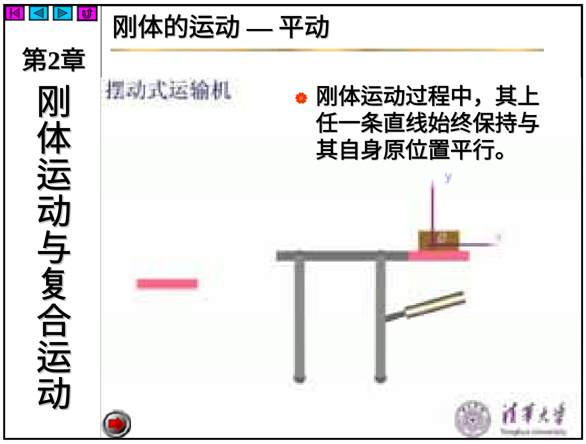
于是径向、横向和 z方向加速度为

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}, a_z = \ddot{z}$$

在柱坐标系下，三个坐标q_1，q_2，q_3分别取为ρ，φ，z。向直角坐标系投影可以得到与x，y，z的关系。根据定义得到H_i。再将H_i及三个坐标的导数$\dot{\rho}$，$\dot{\varphi}$，$\dot{z}$代入速度和T的计算公式得到速度分量$v_{q_i} = H_i\dot{q}_i$和T。将T和H_i代入加速度表达式得到加速度。

第 2 章　刚体运动与复合运动

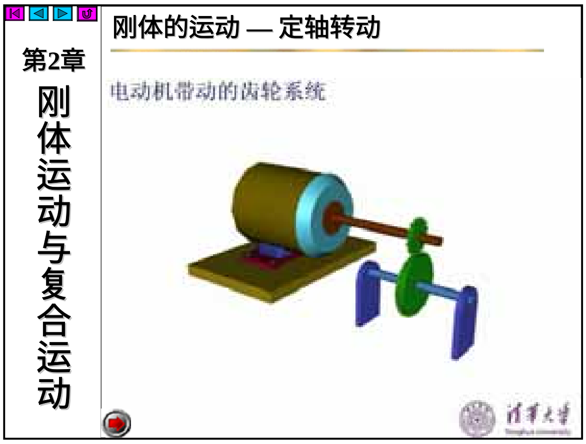




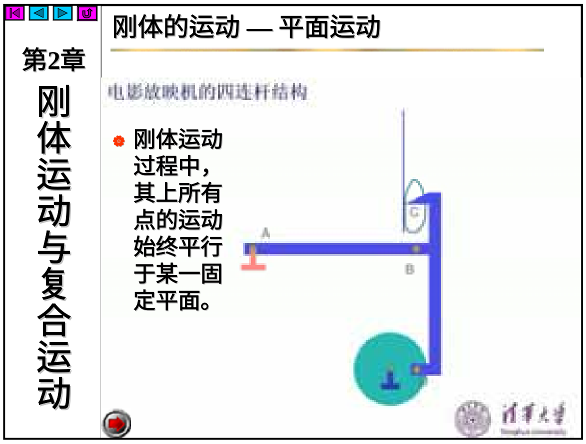
滑块随着摆动式运输机运动时，尽管其运动轨迹是曲线，但是滑块上下表面始终平行于水平面，因此，滑块作平动。

注：刚体是否平动与其运动轨迹无关。

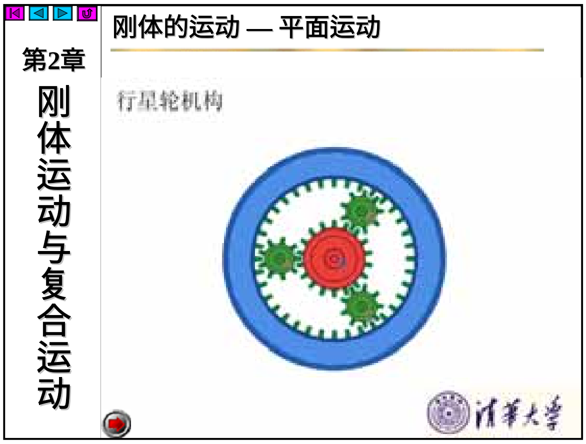
刚体绕竖直轴定轴转动。



电机的转轴及固结其上的齿轮绕电机的轴线定轴转动。与其啮合的另一齿轮绕自身的轴线也是定轴转动。

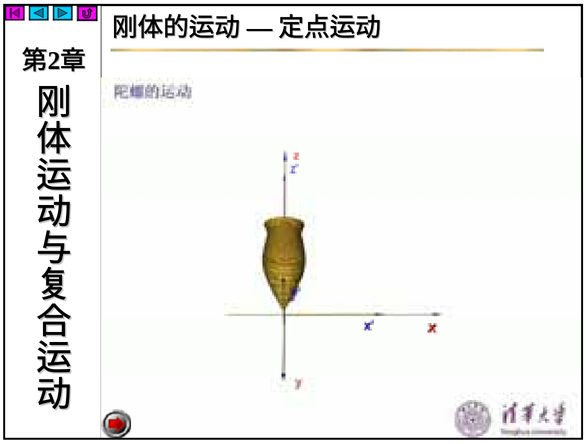


任取两个运动位置就可以发现：在运动过程中杆 *DBC* 并不与自身保持平行，所以不是平动；其上（及延拓部分）也不存在一点保持静止，所以也不是定轴转动。容易看出，杆 *DBC* 上所有点都在图示的平面内运动，运动轨迹都是图示平面内的曲线。因此，杆 *DBC* 是作平面运动。



三个行星轮绕各自的轮心转动，而轮心作圆周运动。

万向节的中心位置保持不动，是定点运动。



假设陀螺与水平面接触点静止不动，陀螺即为定点运动。陀螺绕其对称轴高速旋转，而对称轴又绕垂直轴转动。