21世纪计算机专业大专系列教材

离散数学习题与解答

邵学才 等　编著

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是与《21 世纪计算机专业大专系列教材》中《离散数学》(李大友主编,邵学才等编著,清华大学出版社 2001 年 7 月出版)配套的辅导教材。它不仅解答了《离散数学》中的全部习题,并精选了大量的和具有典型意义的例题,以加深对基本概念和基本理论的认识和运用。

书中的例题分析和习题解答叙述详尽,层次分明,有很强的可读性。适合于高等院校计算机专科的学生使用,也适合于函授大学、职工大学、高职高专和成人教育的计算机专业的学生使用。

书 名: 离散数学习题与解答
作 者: 邵学才 等 编著
出版者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者: 北京市人民文学印刷厂
发行者: 新华书店总店北京发行所
开 本: 787×1092 1/16 印张: 12.5 字数: 281 千字
版 次: 2002 年 1 月第 1 版 2002 年 6 月第 2 次印刷
书 号: ISBN 7-302-04996-3/TP·2816
印 数: 6001～10000
定 价: 15.00 元

《21 世纪计算机专业大专系列教材》

编 辑 委 员 会 名 单

序

这套教材为 21 世纪高等学校计算机专业大专系列教材。

我们从 1995 年开始组织《计算机专业大专系列教材》。当时根据中国计算机学会教育委员会与全国高等学校计算机教育研究会联合推荐的《计算机学科教学计划 1993》的要求,组织了《计算机组成原理》等 13 本教材,并由清华大学出版社出版。这套教材出版后,受到了高等学校师生的广泛欢迎和好评。

在组织上述教材的时候,主要是按《计算机学科教学计划 1993》的要求进行的。而 1993 教学计划主要是参照美国 IEEE 和 ACM《计算机学科教学计划 1991》并结合我国高等教育当时的实际情况制定的,反映的是 20 世纪 80 年代末计算机学科的发展状况。

计算机学科是一个飞速发展的新兴学科,发展速度之快可谓一日千里。近 10 年来,计算机学科已发展成为一个独立学科,计算机本身向高度集成化、网络化和多媒体化迅速发展。但从另一个方面来看,高等学校的计算机教育一直滞后于计算机学科的发展,特别是教材建设,由于受时间和软硬条件的限制,更是落后于现实需要,而大专层次的教材建设问题尤其严重。为了改变这种状况,高等学校的教育工作者和专家教授们应当仁不让地投入必要的时间和精力来完成这一历史使命。

为适应 21 世纪计算机教育形势的需要,在课程设置和教材建设上,必须及时进行重新调整。

为组织好这套教材,我们认真地研究了全国高等学校计算机专业教学指导委员会和中国计算机学会教育委员会联合推荐的《计算机学科教学计划 2000》和美国 IEEE 和 ACM 两个学会最新公布的《计算机学科教学计划 2001》。这两个教学计划都是在总结了从《计算机学科教学计划 1991》到现在计算机学科十年来发展的主要成果的基础上诞生的。它们所提供的指导思想和学科所涵盖的内容,不仅适合于大学本科,也适合大学专科的需求,关键在于要对其内容的取舍进行认真的研究。

在我国的《计算机学科教学计划 1993》和美国 IEEE 和 ACM 两个学会提出的《计算机学科教学计划 1991》中,根据当时的情况,只提出了 9 个主科目。而在《计算机学科教学计划 2001》中,根据学科的最新发展状况,提出了 14 个主科目,其中 13 个主科目又为核心主科目。这 14 个主科目是:算法与分析(AL)、体系结构(AR)、离散结构(DS)、计算科学(CN)、图形学与可视化计算(GV)、网络计算(NC)、人机交互(HC)、信息管理(IM)、智能系统(IS)、操作系统(OS)、程序设计基础(PF)、程序设计语言(PL)、软件工程(SE)、社会、道德、法律和专业问题(SP),其中除 CN 为非核心主科目外,其他 13 个主科目均为核心主科目。

将美国 IEEE 和 ACM 的教学计划 2001 与 1991 计划进行比较可看出:在 1991 计划

中,离散结构只是作为数学基础提出,未被列为主科目;而在 2001 计划中,不但列为主科目、而且为核心主科目。可见,已将离散结构提升为本学科的基础。

在 1991 计划中,未提及网络计算,而在 2001 计划中,不但提出,而且被列为核心主科目,以适应网络技术飞速发展的需求。

图形学与可视化计算也是为适应发展需求新增的内容,并且列为主科目。

除此之外,2001 计划在下述 5 个方面做了增加或调整:

· 将程序设计语言引论调整为程序设计基础和程序设计语言两个核心主科目,显然,加强了对程序设计的要求。

· 将人-机通信调整为人机交互,反映了人-机通信的实质是人机交互。在图形界面迅速发展的今天,人机交互理论和方法的研究和应用变得十分重要。

· 将人工智能与机器人学调整为智能系统,拓宽了对智能系统的要求。

· 将数据库与信息检索调整为信息管理,因为后者不仅概括了前者,而且反映了数据库与信息检索的实质是信息管理。

· 将数值与符号计算调整为计算科学,更具有概况性。

总之,上述变化不仅更好地反映了计算机学科的发展现状,而且使 2001 教学计划具有更强的科学性和实用性。

由于这套系列教材主要面向的对象是计算机专业三年制大专(高职)学生,其培养目标也属于高级技术人才的层次。他们既要有一定的理论基础(较本科弱),又要更强调实用性,要有明确的应用方向。我们将应用方向定位在信息管理和计算机网络两个方向。这两个应用方向占计算机应用总计的 90%以上。

在系列教材的内容取舍上,2001 教学计划的 14 门主科目中,我们概括了除智能系统、计算科学和社会、道德、法律和专业问题之外的其他 11 个主科目。在每个主科目中,我们以其中的基本概念、基本理论和基本方法作为主线组织教材,使学生既能掌握基本的基础理论和方法,又能为他们进一步深造打下必要的基础;在信息管理和计算机网络技术两个应用方向上,他们的应用能力将得到加强。

根据上述指导思想,初步确定组织 20 本左右的教材供各高校选用。这些教材包括:《离散数学》、《计算机应用基础》、《计算机组织与结构》、《微机系统与接口技术》、《计算机网络与通信》、《网络管理技术基础》、《计算机网络系统集成技术》、《数据结构》、《操作系统原理》、《实用软件工程基础》、《数据库原理与应用》、《管理信息系统原理与应用》、《办公自动化实用技术》、《多媒体技术及其应用》、《Internet 技术及其应用》、《计算机维护技术》、《C 语言程序设计》、《Java 语言程序设计》、《C++ 语言程序设计》、《VB 语言程序设计》、《计算机英语》等。

系列教材并不是教学计划,各高校情况不同,培养方向的侧重面也不一样,因此教学计划也不会雷同。教材按系列组织,力图能够反映计算机学科大专层次的总体要求,同时采用大拼盘结构,各校可根据自身情况选择使用。例如,语言类教材,我们就准备了多本,各校可选择其中的一本或两本,其他依此类推。

这套教材均由高等学校具有丰富教学实践经验的老师编写。所编教材体系结构严谨、层次清晰、概念准确、理论联系实际、深入浅出、通俗易懂，相信一定能够得到专科院校计算机专业师生的欢迎。

全国高等学校计算机教育研究会副理事长
课 程 与 教 材 建 设 委 员 会 主 任
李大友
2001 年 6 月

前　　言

本书是与《离散数学》(李大友主编,邵学才等编著,清华大学出版社 2001 年 7 月出版)配套的辅导教材。

“离散数学”是一门理论抽象、内容广泛、结构严谨的计算机专业基础课程。它不仅与后续课程,如:数据结构、数据库原理、操作系统、人工智能等有紧密联系,而且在培养学生的创新能力,提高学生的科研素质方面都有着重要作用。为了学好“离散数学”课程,首先要对基本概念和基本理论有较好的把握,它不仅需要深入地思考,反复领会,更需要做大量的习题,在解题过程中,一方面提高自己的解题技巧;另一方面,也是更重要的方面,是深化对基本概念和基本理论的认识。因为有些习题往往是基本概念和基本理论的一种具体描述,而有些习题则是基本概念和基本理论的一种实际运用。所以解题过程就是进一步领悟的过程,深入理解的过程。因此,做大量的习题是学好“离散数学”课的关键之一。但由于“离散数学”课中的习题有一定的难度,它的解题方法与“高等数学”等课程的解题方法有较大的差异,初学者面对习题经常会感到无从入手,难以适应。为了帮助初学者能顺利地学好“离散数学”课,我们专门编写了这本以解题为主要内容的辅导教材。

在辅导教材中,每一章都由三部分组成。

第一部分是内容提要。它只是把这一章的主要内容作简明的阐述,其作用是便于在解题时查阅所需要的定义、定理、公式和有关概念;第二部分是例题分析。这部分内容有较强的针对性,前几个例题通常和《离散数学》教材中的习题有某些相似之处,其目的是给初学者提供解题的思路,具有一定的启示作用。后几个例题中,有些有较大的难度,以提高解题技巧。有些构思精巧,可以提高对基本概念和基本理论的认识和运用,并能进一步激发学习“离散数学”课的兴趣;第三部分是习题与解答。它把《离散数学》教材中所有习题做了详尽的解答。

最后,还是要说句老话:当你刚开始做题时,不要忙于去翻阅解答,更不要抄些解答去应付你的老师,解题是自我提高的过程,思考,思考,再思考;当你经过长时间的思考后,再去参阅习题解答,就会有所领悟,就会感到受益匪浅。

这本辅导教材是由北京工业大学计算机学院邵学才教授主持编写的,北京语言文化大学石嘉明副教授,北京工业大学计算机学院蒋强荣副教授,邓米克副教授,沈彤英副教授参与了编写工作。在编写过程中,得到全国高等学校计算机教育研究会副理事长李大友教授的关切和支持,北京工业大学计算机学院刘建丽副教授细心地阅读了书稿并提出很多有益的建议,对此作者深表谢意。在繁忙的教学和编写工作中,得到张锡恩先生,张绍昆先生和张静小姐的悉心帮助,作者表示诚挚的感谢。

邵学才

2001 年 9 月

目　录

第 1 章　集　　合

1.1　内容提要

1.1.1　集合的基本概念

集合是具有某种特点的研究对象的聚合,其中每一个对象称为这个集合的元素。通常用大写的英文字母 $A,B,\cdots$表示集合,用小写的英文字母 $a,b,\cdots$表示集合中的元素。当 a是集合 A 中的元素时,称 a属于 A,并记作 $a\in A$,否则记作 $a|\ \ A$。

1. 集合的表示方法

(1) 列举法。这种表示方法是把集合中的所有元素一一列举出来,元素间用逗号分开,并用花括号把它们括起来。如:

$$A = \{2,3,5,7,11,13\}$$

(2) 特征法。特征法是以某个小写的英文字母统一表示该集合的元素,并指出这类元素的共同特征。如:

$$B = \{x \mid x\text{是小于 15 的素数}\}$$

当两个集合 P 和 Q 有同样的元素时,称这两个集合相等,记作 $P = Q$。

易见,上面提到的集合 A 和 B 是相等的,即有 $A = B$。

2. 子集、全集与补集

如果集合 A 中每一个元素又都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,并记作

$$B\qquad A\ \text{或}\ A\qquad B$$

如果 A 是 B 的子集,且 B 中总有一些元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集,并记作

$$B\qquad A\ \text{或}\ A\qquad B$$

由子集的定义易得:

定理 1.1.1　集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是 $A\quad B$ 且 $B\quad A$。

不含有任何元素的集合称为空集,记作ě 或$\{\}$。

由空集的定义可知,空集是任何集合的子集。

当研究对象总是限制在某个集合时,这个集合称为全集,记作 U。

由属于全集 U,但不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为 A 的补集,记作 $\overline{A}$ 或$\sim A$。

3. 幂集

由集合 A 中所有子集作为元素构成的集合称为 A 的幂集,记作 $P(A)$。

例如
$$A=\{1,2\}$$
则
$$P(A) = \{ě\ ,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

定理 1.1.2　设 A 是有限集,且 A 中含有 n 个元素,则幂集 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

有限集 A 中元素个数称为 A 的基,记作 $|A|$,所以当 $|A| = n$ 时,$|P(A)| = 2^n$。

1.1.2　集合的基本运算

1. 并运算

定义 1.1.1　集合 A 和 B 的并记作 $A \cup B$,它也是一个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素合并在一起构成的,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

2. 交运算

定义 1.1.2　两个集合 A 和 B 的交记作 $A \cap B$,它也是一个集合,由属于 A, B 两集合的所有共同元素构成,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

3. 减运算

定义 1.1.3　由属于集合 A 但不属于集合 B 的那些元素构成的集合称为 A 减 B 的差,记作 $A - B$,即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

4. 对称差

定义 1.1.4　集合 A 和 B 的对称差记作 $A \quad B$,它是个集合,其元素或属于 A,或属于 B,但不能既属于 A 又属于 B,即

$$\begin{aligned} A \quad B &= \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B, \text{但 } x \notin A \cap B\} \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

5. 集合运算的常用公式

(1) $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

(2) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

(3) $A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(4) $A \cup U = U$

$A \cap U = A$

(5) $A \cup \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

(6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(7) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(8) $A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

(9) $A - B = A \cap \overline{B}$

(10) $A \quad B = B \quad A$

(11) $(A \quad B) \quad C = A \quad (B \quad C)$

(12) $A \quad A =$ ě

(13) A ě $= A$

(14) $A \quad U = \overline{A}$

(15) $A \quad B = (A - B) \cup (B - A)$

1.1.3 包含排斥原理

设 A 和 B 是有限集，则

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

上式就是关于两个集合的包含排斥原理。对于 3 个集合，则有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

一般情况下有

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

本章的重点：熟练掌握集合的基本运算，熟记集合运算中的常用公式，并能熟练地运用常用公式证明，求解和分析问题；能求出给定集合的幂集；并能利用包含排斥原理求解一些简单的组合计数问题。

本章的难点是集合的对称差运算，包含排斥原理的运用。

1.2 例题分析

例 1.1　设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，**求其幂集** $P(A)$。

解　这里将给出一种与《离散数学》教材不同的求解方法。

易知，当集合 A 中含有 4 个元素时，其幂集 $P(A)$ 含有 2^4 个元素。因此可以把幂集 $P(A)$ 中的元素与 4 位二进制序列（0000～1111）建立一一对应关系，从而方便地求得幂集。

具体的做法是：先把集合 A 中的元素确定一种排列顺序，在本例中，集合 A 中元素的排列顺序为：1，2，3，4。其幂集 $P(A)$ 中的元素与 4 位二进制序列的一一对应关系如下：

1 2 3 4	$P(A)$中的元素
0 0 0 0	ě
0 0 0 1	$\{4\}$
0 0 1 0	$\{3\}$

$$
\begin{array}{ll}
0\ 0\ 1\ 1 & \{3,4\} \\
 & \cdots\cdots \\
1\ 1\ 1\ 0 & \{1,2,3\} \\
1\ 1\ 1\ 1 & \{1,2,3,4\}
\end{array}
$$

如果把 $P(A)$**中与 4 位二进制序列** k**所对应的元素记作** A_k,**则**

$P(A)=\{A_{0000}, A_{0001}, A_{0010}, A_{0011}, A_{0100}, A_{0101}, A_{0110}, A_{0111}, A_{1000}, A_{1001}, A_{1010}, A_{1011}, A_{1100}, A_{1101}, A_{1110}, A_{1111}\}$,**即有**

$P(A)=\{\varnothing,\{4\},\{3\},\{3,4\},\{2\},\{2,4\},\{2,3\},\{2,3,4\},\{1\},\{1,4\},\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,2\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$。

例 1.2　设 $\mathbf{I}_+$ **是正整数集合,集合** A, B, C **分别为:**

$$A=\left\{x \mid x=k\pi, k\in \mathbf{I}_+\right\}$$

$$B=\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{I}_+\right\}$$

$$C=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+2\pi, k\in \mathbf{I}_+\right\}$$

求下列运算结果:

(1) $A\cap B\cap C$

(2) $(A\cup B)-C$

(3) $A-(B\cup C)$

(4) $C-(A\oplus B)$

解　为了便于运算,把集合 A, B, C **用列举法表出**

$$A=\{\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots\}$$

$$B=\left\{2\pi+\frac{\pi}{2}, 4\pi+\frac{\pi}{2}, 6\pi+\frac{\pi}{2}, \cdots\right\}$$

$$C=\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi, 3\pi, \frac{\pi}{2}+3\pi, \cdots\right\}$$

由此可知

(1) $A\cap B\cap C=\varnothing$

(2) $(A\cup B)-C=\{\pi, 2\pi\}$

(3) $A-(B\cup C)=\{\pi, 2\pi\}$

(4) **易见**, $A\cap B=\varnothing$,**所以**

$$
\begin{aligned}
A\oplus B &= (A\cup B)-(A\cap B) \\
&= A\cup B \\
&= \left\{\pi, 2\pi, 2\pi+\frac{\pi}{2}, 3\pi, 4\pi, 4\pi+\frac{\pi}{2}, \cdots\right\}
\end{aligned}
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
C-(A\oplus B) &= \left\{3\pi+\frac{\pi}{2}, 5\pi+\frac{\pi}{2}, 7\pi+\frac{\pi}{2}, \cdots\right\} \\
&= \left\{x \mid x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{I}_+\right\}
\end{aligned}
$$

例 1.3　证明下列等式:

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

(3) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

(4) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A)$

(5) $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)=A\cup B$

证明　(1) $(A-B)-C=(A\cap\overline{B})-C$

$$=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}$$

$$=A\cap(\overline{B\cup C})$$

$$=A-(B\cup C)$$

(2) $A-(B-C)=A-(B\cap\overline{C})$

$$=A\cap(\overline{B\cap\overline{C}})$$

$$=A\cap(\overline{B}\cup C)$$

$$=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)$$

$$=(A-B)\cup(A\cap C)$$

(3) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\overline{C}$

$$=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})$$

$$=(A-C)\cup(B-C)$$

(4) $A\cup(B-C)=A\cup(B\cap\overline{C})$

$$=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})$$

$$=(A\cup B)\cap(\overline{\overline{A\cup\overline{C}}})$$

$$=(A\cup B)\cap(\overline{\overline{A}\cap C})$$

$$=(A\cup B)-(\overline{A}\cap C)$$

$$=(A\cup B)-(C-A)$$

(5) **左式** $=(A-B)\cup((B-A)\cup(A\cap B))$

$$=(A-B)\cup((B\cap\overline{A})\cup(A\cap B))$$

$$=(A-B)\cup(B\cap(\overline{A}\cup A))$$

$$=(A-B)\cup B$$

$$=(A\cap\overline{B})\cup B$$

$$=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)$$

$$=A\cup B$$

注意:下面给出例 1.4 和例 1.5 有一定难度的证明题,在证明过程中是如何运用公式,特别是分配律的使用。

例 1.4　证明下列等式

(1) $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C$

(2) $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)=(A\cup B\cup C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})$

证明　(1) **利用并运算的可交换性可知**

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= ((A-B)\cup(A\cap B\cap C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= ((A\cap\overline{B})\cup(A\cap B\cap C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap(\overline{B}\cup(B\cap C)))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap((\overline{B}\cup B)\cap(\overline{B}\cup C)))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap(\overline{B}\cup C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)\cup(B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{A})\\
&= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C})\cup(C\cap(A\cup\overline{A}))\\
&= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C})\cup C\\
&= (A\cap\overline{B})\cup((B\cup C)\cap(\overline{C}\cup C))\\
&= (A\cap\overline{B})\cup B\cup C\\
&= ((A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B))\cup C\\
&= A\cup B\cup C
\end{aligned}
$$

(2) **利用减法公式和分配律可知**

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C})\cup(C-A)\\
&= (((A\cap\overline{B})\cup B)\cap((A\cap\overline{B})\cup\overline{C}))\cup(C-A)\\
&= (((A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B))\cap((A\cup\overline{C})\cap(\overline{B}\cup\overline{C})))\cup(C-A)\\
&= ((A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})\cap(\overline{B}\cup\overline{C}))\cup(C\cap\overline{A})\\
&= ((A\cup B)\cup(C\cap\overline{A}))\cap((A\cup\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}))\cap((\overline{B}\cup\overline{C})\cup(C\cap\overline{A}))\\
&= (A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\overline{A})\cap(A\cup\overline{C}\cup C)\cap(A\cup\overline{C}\cup\overline{A})\\
&\quad\cap(\overline{B}\cup\overline{C}\cup C)\cap(\overline{B}\cup\overline{C}\cup\overline{A})\\
&= (A\cup B\cup C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})
\end{aligned}
$$

例 1.5　证明下列等式

(1) $A\quad B=(A-B)\cup(B-A)$

(2) $\overline{A\quad B}=\overline{A}\quad B$

(3) $A\cap(B\quad C)=(A\cap B)\quad(A\cap C)$

(4) $(A\quad B)\cap(A\quad C)=((B\cap C)-A)\cup(A-(B\cup C))$

证明　(1) **由对称差定义可知**

$$
\begin{aligned}
A\quad B &= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\\
&= ((A\cup B)\cap\overline{A})\cup((A\cup B)\cap\overline{B})\\
&= (A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{B})\\
&= (A-B)\cup(B-A)
\end{aligned}
$$

(2) **由于** $A\quad B=(A-B)\cup(B-A)$**,所以**

$$
\overline{A\quad B}=\overline{(A-B)\cup(B-A)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{(A - B)} \cap \overline{(B - A)} \\
&= \overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(B \cap \overline{A})} \\
&= (\overline{A} \cup B) - (B \cap \overline{A}) \\
&= \overline{A} \quad B
\end{aligned}
$$

(3) 右式 $= (A \cap B) \quad (A \cap C)$

$$
\begin{aligned}
&= ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B)) \\
&= (A \cap B \cap \overline{(A \cap C)}) \cup (A \cap C \cap \overline{(A \cap B)}) \\
&= (A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \\
&= (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \\
&= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \\
&= A \cap ((B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})) \\
&= A \cap ((B - C) \cup (C - B)) \\
&= A \cap (B \quad C) = \text{左式}
\end{aligned}
$$

(4) 左式 $= (A \quad B) \cap (A \quad C)$

$$
\begin{aligned}
&= ((A \cup B) - (A \cap B)) \cap ((A \cup C) - (A \cap C)) \\
&= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \cap (A \cup C) \cap \overline{(A \cap C)} \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \\
&= (A \cup (B \cap C)) \cap (\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})) \\
&= ((A \cup (B \cap C)) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup (B \cap C)) \cap (\overline{B} \cap \overline{C})) \\
&= ((B \cap C) \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \\
&= ((B \cap C) \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{(B \cup C)}) \\
&= ((B \cap C) - A) \cup (A - (B \cup C))
\end{aligned}
$$

集合的对称差运算是学习本章的难点之一。由对称差运算的定义可知

$$A \quad B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

或可写成

$$A \quad B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

由例 1.5 中(1)等式可知

$$A \quad B = (A - B) \cup (B - A)$$

或可写成

$$A \quad B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

由此得到对称差运算的 4 种表示方式。针对不同的问题,采用合适的表示方式,往往能使证明过程得到简化。

例 1.6 证明$(A \quad B) \cup (A \quad C) = (A - (B \cap C)) \cup ((B \cup C) - A)$。

证明 由于题中的左式为对称差的"并",所以对称差也采用"并"的表示方式。即

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A - B) \cup (B - A) \cup (A - C) \cup (C - A) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A}) \\
&= (A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \cup ((B \cup C) \cap \overline{A})
\end{aligned}
$$