

计算机专业考研系列教材

---

# 离散数学考研指导

胡新启 编著

清华大学出版社

# (京)新登字 158 号

## 内 容 简 介

离散数学是各大专院校计算机专业的核心课程,也是很多高校招收计算机专业硕士研究生的必考科目之一。

本书围绕考研大纲,有针对性地对学习过程中的重点、难点进行了解答,引导学生系统、科学地理解离散数学的理论,掌握解题方式和方法。书中每章的开头都给出了该章的核心考点,并用“ ”号数量来表示考试频度。此外,我们还在近几年各科研院所的考研试题前加上“ ”号,同时给出了详解或参考答案,使读者能够清晰地了解离散数学课程的主要内容和考试的重点,快速地把握解题的方法。

本书主要针对考研读者,但也适于作为计算机及相关专业的教学辅导材料,还可供参加计算机等级考试者使用。

版权所有,盗版必究。

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

### 图书在版编目(CIP)数据

离散数学考研指导 / 胡新启编著. - 北京 :

清华大学出版社, 2002

(计算机专业考研系列教材)

ISBN 7-302-06178-5

I. 离... . 胡... . 离散数学-研究生-入学考试

-自学参考资料 . 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 105908 号

出版者 : 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.com.cn>

印刷者 : 北京市耀华印刷有限公司

发行者 : 新华书店总店北京发行所

开 本 : 787 × 1092 1/16 印张 : 16.75 字数 : 407 千字

版 次 : 2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月第 1 次印刷

书 号 : ISBN 7-302-06178-5/TP · 3697

印 数 : 0001~6000

定 价 : 25.00 元

# 目 录

第1章 集合论 .....	1
1.1 集合及其表示 .....	1
1.1.1 集合的定义及常用记号 .....	1
1.1.2 集合的表示方法 .....	2
1.1.3 子集, 集合的相等 .....	2
1.1.4 集合的幂集 .....	3
1.2 集合的运算及其性质 .....	4
1.2.1 集合的基本运算 .....	4
1.2.2 文氏图 .....	5
1.2.3 运算的基本性质 .....	5
1.2.4 广义并和广义交 .....	7
1.2.5 幂集的运算性质 .....	8
1.3 笛卡尔积 .....	9
1.4 集合的覆盖与划分 .....	10
1.5 基本计数原理 .....	10
1.5.1 鸽巢原理(抽屉原理) .....	10
1.5.2 容斥原理 .....	11
1.6 习题 .....	13
1.7 参考答案 .....	15
第2章 二元关系 .....	20
2.1 关系的定义及表示 .....	20
2.1.1 关系的定义 .....	20
2.1.2 关系的表示 .....	21
2.2 关系的运算 .....	22
2.2.1 关系的并、交、差、补 .....	22
2.2.2 关系的逆运算 .....	23
2.2.3 关系的复合运算 .....	24
2.3 关系的基本类型 .....	25
2.4 关系的闭包 .....	29
2.5 等价关系与集合的划分 .....	32
2.6 相容关系与集合的覆盖 .....	35
2.7 偏序关系 .....	36
2.8 习题 .....	40

---

2.9 参考答案 .....	43
<b>第3章 函数 .....</b>	<b>52</b>
3.1 函数的基本概念 .....	52
3.2 函数的复合、反函数 .....	57
3.3 集合的基数 .....	59
3.4 习题 .....	62
3.5 参考答案 .....	64
<b>第4章 代数系统 .....</b>	<b>71</b>
4.1 代数运算与代数系统 .....	71
4.2 同态与同构 .....	73
4.3 半群和生成元 .....	74
4.4 群及其性质 .....	75
4.5 子群的定义与判定 .....	77
4.6 群的同态 .....	80
4.7 陪集、正规子群、基本同态 .....	82
4.8 环、域 .....	86
4.9 习题 .....	88
4.10 参考答案 .....	90
<b>第5章 格 .....</b>	<b>98</b>
5.1 格的定义与性质 .....	98
5.1.1 格的定义 .....	98
5.1.2 格的基本性质 .....	101
5.2 子格 格同态 .....	102
5.2.1 子格 .....	102
5.2.2 格同态 .....	103
5.3 分配格 有补格 .....	103
5.3.1 分配格 .....	103
5.3.2 有补格 .....	109
5.4 布尔代数 .....	110
5.5 有限布尔代数的表示定理 .....	113
5.6 习题 .....	117
5.7 参考答案 .....	118
<b>第6章 图论 .....</b>	<b>125</b>
6.1 图的基本概念 .....	125
6.1.1 无向图与有向图 .....	125
6.1.2 结点的度 .....	126
6.1.3 子图 .....	126

---

6.1.4	图的同构.....	127
6.1.5	图的运算.....	127
6.1.6	通路与回路.....	128
6.2	连通性.....	129
6.3	图的矩阵表示.....	130
6.4	最短路径问题.....	133
6.5	欧拉图与哈密尔顿图.....	136
6.5.1	欧拉图.....	136
6.5.2	哈密尔顿图.....	138
6.6	平面图.....	143
6.7	覆盖集、独立集和匹配.....	146
6.8	图的着色.....	148
6.8.1	点的着色.....	148
6.8.2	地图的着色.....	150
6.9	习题.....	151
6.10	参考答案.....	157
<b>第7章</b>	<b>树.....</b>	<b>172</b>
7.1	无向树.....	172
7.2	生成树.....	175
7.3	根树.....	177
7.4	带权树.....	179
7.5	应用举例.....	181
7.5.1	前缀码.....	181
7.5.2	波兰表示法.....	183
7.6	习题.....	184
7.6	参考答案.....	188
<b>第8章</b>	<b>命题逻辑.....</b>	<b>199</b>
8.1	命题及其符号化.....	199
8.1.1	命题与命题变量.....	199
8.1.2	命题联结词.....	200
8.1.3	命题符号化.....	201
8.2	命题公式及其真值.....	202
8.2.1	命题公式.....	202
8.2.2	命题公式的等值式.....	204
8.2.3	命题公式的逻辑蕴含式.....	207
8.2.4	全功能联结词集合.....	208
8.3	范式.....	208
8.4	命题演算的推理理论.....	213

---

8.5 习题 .....	216
8.6 参考答案 .....	221
<b>第9章 谓词逻辑.....</b>	<b>232</b>
9.1 谓词逻辑的基本概念及其符号化 .....	232
9.2 谓词公式及其真值 .....	234
9.3 谓词公式的前束式 .....	240
9.4 重言蕴含式与推理规则 .....	242
9.5 习题 .....	246
9.6 参考答案 .....	250

# 前 言

古人云：书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。作者从孩提时代开始到完成学士、硕士、博士学业至今，都是在书山之中漫游，深深体会到学习的快乐与苦涩，深感教材的重要，并常为能找到一本好教材而欣喜不已。面对当前的考研热潮，作者在自己多年教学和参加离散数学命题、阅卷的基础上，收集了部分重点高校（北京大学、南京大学、复旦大学、上海交通大学、东北大学、上海大学、西安交通大学、武汉大学、武汉水利电力大学、北京航空航天大学、北京理工大学、大连理工大学、重庆大学、华中科技大学等）以及中科院计算所、软件所等近几年的考研真题，掌握了大量的一手资料。作者对这些考研真题进行了全面、系统的分析整理，编著成册。

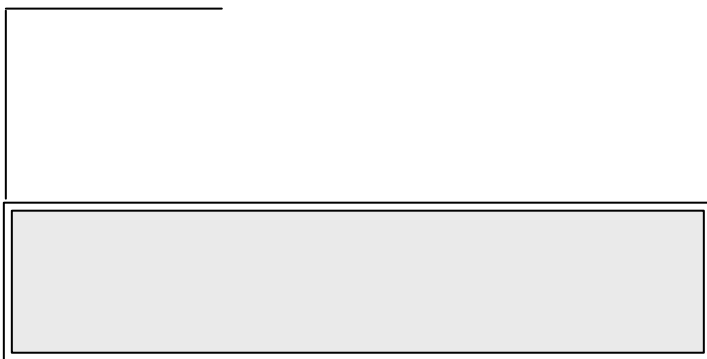
本书不能完全算一本教材，它要求读者已经学习过离散数学的基本内容，因为本书对大部分基本的离散数学知识仅作了概括性描述，并较少地使用例题来加以解释说明，而只是针对考研中经常出现的真题进行分析讲解。

本书围绕考研大纲，有针对性地对学习过程中的重点、难点进行了解答，引导学生系统、科学地理解离散数学的理论，掌握解题方式和方法。书中每章的开头都给出了该章的核心考点，并用“ ”号数量来表示考试频度。书中每章首先简要介绍了主要内容，列举了一些重要概念和主要结论，并在近几年各科研院所的考研试题前加上“ ”号，同时给出了详解或参考答案，使读者能够清晰地了解离散数学课程的主要内容和考试重点，快速地把握解题的方法。按教学大纲，本书共分9章：第1章集合论，讨论了集合的定义、运算及相关运算性质、幂集、笛卡尔积、基本计数原理等；第2章二元关系，讨论了关系的定义及表示、关系的运算（复合与求逆）、关系的基本类型、关系的闭包、等价关系、相容关系等；第3章函数，讨论了函数的定义、复合函数、反函数及集合的基数；第4章代数系统，主要给出了代数系统的定义和性质、半群、群及子群、陪集等的定义和性质及其判定等；第5章格，讨论了格的两种等价定义、几种特殊的格、布尔代数等；第6章图论，讨论了图的基本定义、图的连通性及图的矩阵表示、最短路径、欧拉图和哈密尔顿图、平面图、图的着色等；第7章树，讨论了树的几种等价定义、根树、最小生成树、最优二元树等；第8章命题逻辑，讨论了命题及其符号化、命题公式及其真值、范式、重言式与自然推理；第9章谓词逻辑，讨论了谓词逻辑命题的符号化、谓词公式及其真值、前束范式、重言蕴含式与推理规则等。

尽管本书是专为考研的读者编写的，但也适合作为计算机及相关专业本科生“离散数学”课程的提高教材。

付汉斌参与了本书部分章节的编写，赵迎媛女士承担了全书的文字录入，在此表示深深的感谢。由于水平所限，尽管编者不遗余力，书中仍可能存在错误和不足之处，敬请读者批评指正。读者若有问题或需要考研试题，请与作者联系，联系方式：[huxinqifox@163.com](mailto:huxinqifox@163.com)。

# 第1章 集合论



## 1.1.1 集合的定义及常用记号

集合是没有给出精确定义的基本的数学概念，通常用大写英文字母表示集合，如  $A, B, X$  等。组成一个集合的不再细分的个体，称为元素，用小写英文字母表示元素，如  $a, b, c$  等。若  $a$  是集合  $A$  中的元素（或成员、元），则称  $a$  属于集合  $A$ ，记作  $a \in A$ ；用  $x \notin X$  表示元素  $x$  不在集合  $X$  中。当  $a_1 \in A, a_2 \in A, \dots, a_n \in A$  时，常简写为  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ 。

集合由它的元素所决定，集合简称集。集合中的元素具有如下性质：

- 确定性。对一个具体的集合来说，其元素是确定的，一个元素或者在此集合中，或者不在此集合中，两者必居其一，这与模糊集合不同。不清晰的对象构成的集合不在本书讨论范围之内。
- 无重复性。集合中的元素彼此不同，没有重复的元素，这与后面图论中涉及的多重集合不同，那里因为特殊的原因允许有重复的元素。例如， $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\}$ 。
- 无序性。集合中的元素无顺序。例如， $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$ 。
- 抽象性。集合中的元素是抽象的，甚至可以是集合。例如， $A = \{1, a, \{1\}\}$ 。

经常用到的几个集合有：

$N$  自然数集

$Z$  整数集

$Q$  有理数集

$R$  实数集

$C$  复数集



不含任何元素的集合称为空集，用 $\emptyset$ （或 $\{\}$ ）表示。在所讨论的问题中，所涉及到的全体对象构成的集合称为全集（也称为论域），通常用 $U$ （或 $E$ ）表示。由于全集随着研讨问题的不同而不同，因此全集是相对惟一的，而非绝对惟一。

集合中元素的个数可以是有限的，也可以是无限的，前者所对应的集合称为有限集，后者所对应的集合称为无限集。若 $A$ 是有限集，用 $|A|$ 表示 $A$ 中元素的数目，也称为集合的基数，记为 $\text{card}(A)$ 。无限集的基数在第3章讨论。显然有： $|\emptyset|=0$ 。

### 1.1.2 集合的表示方法

集合的表示方法一般有两种，即列举法和描述法。

列举法是列出集合中的所有元素，其间用逗号相隔，放在花括号内，如 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{a, b, \text{春}, \text{夏}, \text{秋}, \text{冬}\}$ 。有限集都可用列举法表示。

对于某些有规律的无限集，如其元素与自然数可建立一一对应关系的集合，也可使用列举法表示，例如 $C = \{\Delta, -4, -2, 0, 2, 4, \Delta\}$ 。这种表示一定得让人能看出其元素间的规律。

描述法是把集合中的元素应当满足的条件描述出来的方法。如： $B = \{n^2 \mid n \in N\}$ ， $C = \{x \mid x \in R, \text{且} -1 < x < 1\}$ 等。

上面两种表示法中，列举法适用于元素不太多或元素的规律比较明显、简单的情况，而描述法则刻画了集合中元素的共同特征。

有时也提到表示集合的另一种方法：归纳定义的方法，如自然数集 $N$ 可定义为：

- (1)  $0 \in N$ ；
- (2) 若 $n \in N$ ，则 $n+1 \in N$ 。

实际上，第8章中的命题公式和第9章的谓词公式就是用归纳定义给出的。

虽然此处给出了几种集合的表示方法，但这一说明并不是十分准确的，并且我们也并不十分在意到底用的是何种表示方法，例如也可通过集合的运算 $X = A \cap (B - C)$ 来表示集合 $X$ ，或通过其他方式来表示等。

### 1.1.3 子集，集合的相等

集合的包含与相等是集合间的两种基本关系，也是集合论中的两个基本概念。

定义1.1 设有 $A, B$ 两集合，若 $B$ 中的每个元素都是 $A$ 中的元素，称 $B$ 是 $A$ 的子集，也称 $B$ 被 $A$ 包含，或 $A$ 包含 $B$ ，记为 $B \subseteq A$ 或 $A \supseteq B$ 。若 $B$ 是 $A$ 的子集，且 $A$ 中至少有一个元素不属于 $B$ ，则称 $B$ 为 $A$ 的真子集，记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$ ，称为 $B$ 真包含于 $A$ 。

由定义可知： $\emptyset \subseteq A$ ， $A \subseteq A$ ，特别地，有 $\emptyset \subseteq \emptyset$ 。

据定义有：


$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B, \text{有} x \in A. \quad (1.1)$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B, \text{有} x \in A; \text{且} \exists x_0 \in A, x_0 \notin B. \quad (1.2)$$

由此可得出： $B \subset A \Leftrightarrow \exists x_0 \in B, x_0 \notin A$ 。

若两个集合 $A$ 和 $B$ 没有公共元素，称 $A$ 和 $B$ 是不相交的。



 注意：要会区分  $\subseteq$  与  $\in$ 。 $A \in B$  表示集合  $A$  是集合  $B$  的一个元素； $A \subseteq B$  表示集合  $A$  中的每个元素都是集合  $B$  中的元素。 $\in$  是一个最基本的概念， $\subseteq$  由  $\in$  定义而得。例如

$$(1) \{a\} \not\subseteq \{a, b\}, \text{ 但 } \{a\} \in \{\{a\}, b\}.$$

$$(2) \{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a\}\}, \text{ 但 } \{a, b\} \notin \{a, b, \{a\}\}.$$


由集合间的包含关系可以定义两集合的相等。

定义 1.2 若两集合  $A$  与  $B$  包含的元素相同，称  $A$  与  $B$  相等，记作  $A = B$ 。也解释为：若  $A$  是  $B$  的子集且  $B$  是  $A$  的子集，称  $A$  与  $B$  相等，即

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A. \quad (1.3)$$

这一定义很重要。以后要证明两个集合相等，只需证明两集合互为子集或互相包含即可。这是证明集合相等的基本思路和依据。从这个定义可以推证，两集合相等当且仅当它们有完全相同的元素。在第 2 章“二元关系”中，很多地方涉及到证明两关系相等，因为关系实际上是一种特殊的集合，因此也可以用这种方法来证明。

若  $A$  与  $B$  不相等，则  $B \not\subseteq A$  和  $A \not\subseteq B$  至少有一个发生。

 注意： $\{a\} \neq \{\{a\}\}$ ，因为两个集合中元素不同，一个是  $a$ ，另一个是  $\{a\}$ 。

称集合  $A$  的子集  $\emptyset$  和  $A$  为  $A$  的平凡子集；任何集合是全集的子集。

由定义易得：空集是惟一的。

### 1.1.4 集合的幂集

定义 1.3 设  $A$  是一集合， $A$  的所有子集构成的集合称为  $A$  的幂集，记为  $P(A)$ （或  $r(A), 2^A$ ）。即  $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ 。

【例 1.1】 (1)  $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ；

(2)  $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ；

(3)  $P(\{a, \emptyset\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}, \{a, \emptyset\}\}$ ；

(4) 设  $A = \{\emptyset, a, \{a\}\}$ ，则  $A$  的幂集

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{\emptyset, a, \{a\}\}\}.$$

根据幂集的定义，因为  $\emptyset \subseteq A$ ， $A \subseteq A$ ，显然有以下事实：

(1)  $\emptyset \in P(A)$ ；

(2)  $A \in P(A)$ 。

定理 1.1 若  $A$  是有限集，则有  $|P(A)| = 2^{|A|}$ 。

证 设  $|A| = n$ ，则  $A$  的子集只能含有 0 个、1 个、...、 $n$  个元素。 $A$  的恰含  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) 个元素的子集个数为  $C_n^i$ ，即从  $n$  个不同的元素中取  $i$  个元素的不同组合数，所以  $A$  的所有子集数为： $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ ，从而  $|P(A)| = 2^{|A|}$ 。



为便于在计算机中表示有限集, 可对集合中的元素编定一种次序, 在集合与二进制数间建立对应关系: 设全集  $U = \{a_1, a_2, \Lambda, a_n\}$ , 则

- 对于任意  $S \subseteq U$ , 使  $S$  与一个  $n$  位二进制数  $b_1 b_2 \Lambda b_n$  对应, 其中  $b_i = 1$  当且仅当  $a_i \in S$ ;
- 对于一个  $n$  位二进制数  $b_1 b_2 \Lambda b_n$ , 使之对应一个集合  $S = \{a_i | b_i = 1\}$ 。

这样, 含  $n$  个元素的集合的子集个数与  $n$  位二进制数的个数相同, 这也说明了定理的正确性。

## 1.2 集合的运算及其性质

### 1.2.1 集合的基本运算

给定集合  $A$  和  $B$ , 可以通过集合的并  $\cup$ , 交  $\cap$ , 相对补  $-$ , 绝对补  $\bar{\phantom{A}}$ , 对称差  $\oplus$  等运算产生新的集合, 这也是表示集合的一种方法。

定义1.4 任意两集合  $A$  与  $B$  的并是一个集合, 它由所有至少属于  $A$  或  $B$  之一的元素所构成, 记为  $A \cup B$ 。

任意两集合  $A$  与  $B$  的交是一个集合, 它由所有属于  $A$  且属于  $B$  的元素所构成, 记为  $A \cap B$ 。

任意两集合  $A$  与  $B$  的差是一个集合, 它由所有属于  $A$  但不属于  $B$  的元素所构成, 记为  $A - B$  (或  $A \setminus B$ ), 也称为  $B$  相对  $A$  的补集。

任意两集合  $A$  与  $B$  的对称差 (也称为环和) 是一个集合, 它由所有属于  $A$  不属于  $B$  和属于  $B$  不属于  $A$  的元素所构成。记为  $A \oplus B$  (有教材记为  $A \Delta B$ )。

集合  $A$  的补集是一个集合, 它由所有不属于  $A$  的元素所构成, 记为  $\bar{A}$  (或  $\sim A$ 、 $A^c$ 、 $A'$  等), 也称为  $A$  的绝对补集。

对任意两集合  $A$  与  $B$ , 若  $A \cap B = \emptyset$ , 即  $A$  与  $B$  没有公共的元素, 则称  $A$  与  $B$  不相交。

由以上定义, 有

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}。$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}。$$

$$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}。$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)。$$

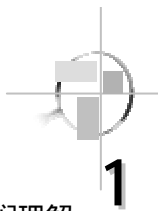
$$\bar{A} = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}。$$

【例1.2】 设  $A = \{\emptyset, \{0\}\}$ , 计算  $P(A) - \{0\}$ ,  $P(A) \oplus A$ 。

【解】 因  $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}$ , 故  $P(A) - \{0\} = \{\emptyset, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}$ 。

因  $P(A) - A = \{\emptyset, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}$ ,  $A - P(A) = \{0\}$ , 故

$$P(A) \oplus A = (P(A) - A) \cup (A - P(A)) = \{\emptyset, 0, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}。$$



### 1.2.2 文氏图

集合之间的相互关系和运算可以用文氏图 (John Venn) 形象描述, 它有助于我们理解相关问题, 有时对解题也很有帮助。它的优点是形象直观、易于理解, 缺点是理论基础不够严谨, 因此只能用于说明, 不能用于证明。

在文氏图中, 用矩形代表全集  $U$ , 矩形内部的点表示全集中的全体元素, 用 (椭) 圆或其他闭曲线代表  $U$  的子集, 其内部的点表示不同集合的元素, 并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。

### 1.2.3 运算的基本性质

集合的运算具有下面一些基本性质。

定理1.2 对于全集  $U$  的任意子集  $A, B, C$ , 有表1-1所示的算律 (这些算律在不同教材中可能名称、性质等会有所不同)。

表1-1

幂等律	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
结合律	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
交换律	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
分配律	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
同一律	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup U = A$
零律	$A \cap U = A$	$A \cup \emptyset = A$
双补律	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	$A \cup \bar{A} = U$
德摩根律	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
(De Morgan)	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
吸收律	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
对合律	$\overline{\bar{A}} = A$	

除了上面的性质外, 关于集合的差与对称差, 还有下面一些性质。

定理1.3 设  $A, B, C$  为任意集合, 有

$$(1) A - B = A \cap \bar{B}.$$

我们通常用此式将差运算转化为其他的集合运算。

$$(2) A - B = A - (A \cap B).$$

$$(3) A \cap (B - A) = \emptyset.$$

$$(4) A \cap (B - C) = (A \cap B) - C.$$

$$(5) (B - A) \cap A = \emptyset.$$

$$(6) A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

$$(7) A \oplus B = B \oplus A.$$

$$(8) A \oplus \emptyset = A; A \oplus A = \emptyset; A \oplus U = \bar{A}; A \oplus \bar{A} = U.$$



$$(9) (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

$$(10) A1(B \oplus C) = (A1B) \oplus (A1C).$$

下面给出(9), (10)的证明:

$$\begin{aligned} \text{证 对于(9), } A \oplus (B \oplus C) &= (A1 \overline{(B \oplus C)}) Y((B \oplus C)1 \bar{A}) \\ &= (A1 \overline{(B1 \bar{C}) Y(C1 \bar{B})}) Y(((B1 \bar{C}) Y(C1 \bar{B}))1 \bar{A}) \\ &= (A1 ((\bar{B} Y C)1 (\bar{C} Y B))) Y(B1 \bar{C}1 \bar{A}) Y(C1 \bar{B}1 \bar{A}) \\ &= (A1 ((\bar{B}1 \bar{C}) Y(B1 C))) Y(B1 \bar{C}1 \bar{A}) Y(C1 \bar{B}1 \bar{A}) \\ &= (A1 \bar{B}1 \bar{C}) Y(A1 B1 C) Y(B1 \bar{C}1 \bar{A}) Y(C1 \bar{B}1 \bar{A}). \end{aligned}$$

这是一个关于 $A, B, C$ 对称的式子, 同样可以证明:

$$(A \oplus B) \oplus C = (A1 \bar{B}1 \bar{C}) Y(A1 B1 C) Y(B1 \bar{C}1 \bar{A}) Y(C1 \bar{B}1 \bar{A}).$$

故结论得证。

对于(10), 可用集合相等的定义证明(请读者自己完成), 也可利用性质(6)证明, 下面不直接使用(6), 利用集合运算性质证明。

$$\begin{aligned} (A1B) \oplus (A1C) &= (A1 B1 \overline{A1 C}) Y(A1 C1 \overline{A1 B}) \\ &= (A1 B1 (\bar{A} Y \bar{C})) Y(A1 C1 (\bar{A}1 \bar{B})) \\ &= (A1 B1 \bar{A}) Y(A1 B1 \bar{C}) Y(A1 C1 \bar{A}) Y(A1 C1 \bar{B}) \\ &= (A1 B1 \bar{C}) Y(A1 C1 \bar{B}) \\ &= A1 ((B1 \bar{C}) Y(C1 \bar{B})) \\ &= A1 (B \oplus C). \end{aligned}$$

故结论得证。

 说明: 但  $A Y (B \oplus C) = (A Y B) \oplus (A Y C)$  不一定成立, 如  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{a\}$ ,  $C = \{b\}$ , 则右边为空集, 而左边为非空集。

**【例1.3】** 试证明: 如果  $A \oplus B = A \oplus C$ , 则  $B = C$ 。

此题可用定义证明, 但比较烦琐, 也可借助于对称差所满足的性质来证明。

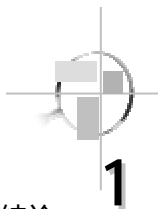
证法1: 用集合相等的定义证明。对任意的  $x \in B$ :

- (1) 若  $x \in A$ , 则  $x \in A1B$ , 从而  $x \notin A \oplus B = A \oplus C$ 。由  $x \in A$  和  $x \notin A \oplus C$ , 可得  $x \in A1C$ , 得  $x \in C$ ;
- (2) 若  $x \notin A$ , 则  $x \in B - A$ , 从而  $x \in A \oplus B = A \oplus C$ 。由  $x \notin A$  和  $x \in A \oplus C$ , 可得  $x \in C$ 。

即  $B \subseteq C$ 。

同理可证:  $C \subseteq B$ , 得证  $B = C$ 。

证法2: 由于对称差满足结合律, 由  $A \oplus B = A \oplus C$ , 有  $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$ ,



即  $(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$ ，由性质 (6)，得  $\emptyset \oplus C = \emptyset \oplus B$ ，故  $B = C$ 。

**【例1.4】**  $A, B$  是两个集合，给出  $A \oplus B = B$  成立的充分必要条件，并证明你的结论。

**【解】** 因  $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ ，从而由  $A \oplus B = B$ ，有  $A - B = \emptyset$  且  $B - A = B$ 。而  $A - B = \emptyset$  等价于  $A \subseteq B$ ，从而有  $A = \emptyset$ ，并且显然当  $A = \emptyset$  时有  $A \oplus B = B$ ，故  $A = \emptyset$  为  $A \oplus B = B$  的充分必要条件。

说明一个集合为另一集合的子集是我们经常遇到的问题。借助于已知的结论，可以证明下面结论等价，我们有时可以直接使用这些结论：

$$\begin{aligned} (1) A \subseteq B; & \quad (2) A \cup B = B; & \quad (3) A \cap B = A; & \quad (4) \bar{B} \subseteq \bar{A}; \\ (5) A - B = \emptyset; & \quad (6) A \cap \bar{B} = \emptyset; & \quad (7) \bar{A} \cup B = U. \end{aligned}$$

### 1.2.4 广义并和广义交

两个集合的并和交可以推广到  $n$  个集合的并和交：

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n; \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

上面定义中若  $n=1$ ，规定  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1$ ， $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1$ 。

并和交的运算还可推广到无穷集合的情形，设  $J$  为一非空指标集，有

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \mid \exists j_0 \in J, x \in A_{j_0}\}; \quad \bigcap_{j \in J} A_j = \{x \mid \forall j \in J, x \in A_j\}.$$

上面的运算也满足德摩根律：

$$\begin{aligned} (1) \overline{\bigcup_{j \in J} A_j} &= \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j; \\ (2) \overline{\bigcap_{j \in J} A_j} &= \bigcup_{j \in J} \bar{A}_j. \end{aligned}$$

**定义1.5** 若集合  $A$  的元素都是集合，则把  $A$  的所有元素的元素组成的集合称为  $A$  的广义并，记作  $\bigcup A$ ；把  $A$  的所有元素的公共元素组成的集合称为  $A$  的广义交，记作  $\bigcap A$ 。

取广义交时，要求  $A \neq \emptyset$ ，否则  $\bigcap A = U$ 。

**【例1.5】**  $A$  是集合  $\mathcal{A}$  的元素也是集合  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$  是  $\mathcal{A}$  的幂集，定义  $\bigcup A = \{x \mid \exists y \in A, x \in y\}$ 。

- (1) 计算  $\bigcup \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$ 。
- (2) 证明： $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$ 。
- (3) 请问： $\mathcal{P}(\bigcup A) = A$ ？

**【解】**

(1) 依定义，有：



$$Y\{\{a,b,c\},\{a,d,e\},\{a,f\}\}=\{a,b,c\} \quad Y\{a,d,e\} \quad Y\{a,f\}=\{a,b,c,d,e,f\}$$

(2) 下面证明  $YP(A) = A$ 。

$\forall X \in YP(A)$  ,  $\exists Y \in P(A)$  ,  $X \in Y \subseteq A$  , 从而有  $X \in A$  。有  $YP(A) \subseteq A$  。

另一方面,  $\forall X \in A$  ,  $\{X\} \in P(A)$  , 从而  $X \in YP(A)$  。有  $YP(A) \supseteq A$  。

综合可得  $YP(A) = A$  。证明成立。

事实上,  $YA = \{x \mid \exists y \in A, x \in y\}$  等价定义为  $YA = Y\{B \mid B \in A\}$  , 从而

$$YP(A) = Y\{B \mid B \in P(A)\} = Y\{B \mid B \subseteq A\} = A。$$

(3)  $P(YA) = A$  不一定成立。例如:  $A = \{\{a\}, \{b\}\}$  , 则

$$P(YA) = P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}。$$

两者不相等。

下面给出广义并和广义交的性质。

对集合的集合  $A$  和  $B$  , 有

(1) 若  $A \subseteq B$  , 则  $(YA) \subseteq (YB)$  。

(2) 若  $A \subseteq B$  , 则  $(I B) \subseteq (I A)$  , 其中  $A$  和  $B$  非空。

(3)  $Y(A Y B) = (YA) Y (YB)$  。

(4)  $I(A Y B) = (I A) I (I B)$  , 其中  $A$  和  $B$  非空。

### 1.2.5 幂集的运算性质

定理1.4 对任意集合  $A, B$  , 有

(1) 若  $A \subseteq B$  , 则  $P(A) \subseteq P(B)$  ; 反之, 若  $P(A) \subseteq P(B)$  , 则  $A \subseteq B$  。

(2) 若  $A = B$  , 则  $P(A) = P(B)$  ; 反之, 若  $P(A) = P(B)$  , 则  $A = B$  。

(3)  $P(A) Y P(B) \subseteq P(A Y B)$  。

(4)  $P(A) I P(B) = P(A I B)$  。

(5)  $P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) Y \{\emptyset\}$  。

(6)  $Y(P(A)) = A$  。


证 下面给出部分证明, 其他的请读者自证。

对于 (3) ,  $\forall X \in P(A) Y P(B)$  ,  $X \in P(A)$  或  $X \in P(B)$  , 有  $X \subseteq A$  或  $X \subseteq B$  , 从而  $X \subseteq A Y B$  ,  $X \in P(A Y B)$  。得证  $P(A) Y P(B) \subseteq P(A Y B)$  。

对于 (4) ,  $\forall X \in P(A) I P(B)$  ,  $X \in P(A)$  且  $X \in P(B)$  , 有  $X \subseteq A$  且  $X \subseteq B$  , 从而  $X \subseteq A I B$  ,  $X \in P(A I B)$  , 由于上述过程可逆, 故  $P(A) I P(B) = P(A I B)$  。

对于 (5) , 对任意  $X \in P(A - B)$  , 若  $X \neq \emptyset$  , 则有  $X \subseteq A - B$  , 从而  $X \subseteq A$  且  $X \subseteq \bar{B}$  , 有  $X \in P(A)$  且  $X \notin P(B)$  , 即  $X \in P(A) - P(B)$  , 得

$$P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) Y \{\emptyset\}。$$

 说明: 可举例说明  $P(A) Y P(B) \neq P(A Y B)$  。例如,  $A = \{1\}$  ,  $B = \{2\}$  ,



$A \cup B = \{1, 2\}$  ,  $P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$  , 但  $P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  。也可从元素数目的角度说明两者不等。

(3) 式等号成立的条件为： $A \subseteq B$  或  $B \subseteq A$ 。

事实上，若存在有  $x \in A, x \notin B$ ，且存在有  $y \in B, y \notin A$ ，则  $\{x, y\} \in P(A \cup B)$ ，但  $\{x, y\} \notin P(A) \cup P(B)$ 。

### 1.3 笛卡尔积

称  $\langle a, b \rangle$  为由元素  $a$  和  $b$  组成的有序对（或序偶），其中  $a$  为第一元素， $b$  为第二元素， $a, b$  可以相同。有教材也将此有序对表示为  $(a, b)$ 。

有序对具有这样的性质：

$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u, y = v。$$

定义 1.6 设  $A, B$  为两集合，取  $A$  中元素为第一元素， $B$  中元素为第二元素，构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称为  $A$  与  $B$  的笛卡尔积（也称为直积或叉积），记作  $A \times B$ ，即  $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$ 。

据上面定义可知：若  $A$  或  $B$  中有一个空集，则  $A \times B = \emptyset$ 。且一般来说， $A \times B \neq B \times A$ 。

推广上面概念，可以用  $n$  元组定义  $n$  阶笛卡尔积。

若  $n > 1$  为自然数，而  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个集合，它们的  $n$  阶笛卡尔积记作  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，并定义为  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 。



**注意：**根据定义，一般情况下，有  $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ 。

下面给出笛卡尔积的几条性质。

定理 1.5 对任意集合  $A, B, C$ ，有

$$(1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)。$$

$$(2) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)。$$

$$(3) (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)。$$

$$(4) (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)。$$

$$(5) A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)。$$

$$(6) (B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)。$$

$$(7) \text{若 } C \neq \emptyset, \text{ 则 } A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C \Leftrightarrow C \times A \subseteq C \times B。$$

$$(8) \text{若 } A, B, C, D \text{ 非空, 则 } A \times B \subseteq C \times D \text{ 的充要条件是 } A \subseteq C \text{ 且 } B \subseteq D。$$



**注意：**上面结论 (7) 在条件  $C \neq \emptyset$  不满足时，结论不一定成立。

关于有限集合的基数，有下面一些结论（假定下面出现的集合均为有限集合）：



- (1)  $|A_1 \times A_2 \times \Lambda A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \Lambda \times |A_n|$ 。  
 (2)  $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ 。  
 (3)  $|A \cap B| \leq \min\{|A|, |B|\}$ 。  
 (4)  $|A - B| \geq |A| - |B|$ 。  
 (5)  $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ 。

## 1.4 集合的覆盖与划分

定义1.7 设 $A$ 是非空集,称 $\Pi$ 是集合 $A$ 的划分(也称为分划),若 $\Pi$ 是 $A$ 的非空子集的集合,即 $\Pi = \{A_a \mid A_a \subseteq A, A_a \neq \emptyset\}$ ,则满足:

- (1)  $A_a \cap A_b = \emptyset, a \neq b$ 。  
 (2)  $\bigcup_a A_a = A$ 。

定义1.8 非空集 $A$ 的一个覆盖 $C$ 是 $A$ 的非空子集的集合,即 $C = \{A_a \mid A_a \subseteq A, A_a \neq \emptyset\}$ ,满足 $\bigcup_a A_a = A$ 。

若 $C = \{A_a \mid A_a \subseteq A, A_a \neq \emptyset\}$ 是集合 $A$ 的一个覆盖,且 $C$ 中任意元素不是其他元素的子集,则称 $C$ 是 $A$ 的完全覆盖。

集合的覆盖与划分的区别在于前者不要求各个子集两两之交为空。

## 1.5 基本计数原理

### 1.5.1 鸽巢原理(抽屉原理)

定理1.6 把 $n+1$ 个物体放入 $n$ 个盒子里,则至少有一个盒子里有两个或两个以上的物体。

【例1.6】从1到 $2n$ 的正整数中任取 $n+1$ 个数,则这 $n+1$ 个数中至少有一对数,其中一个数是另一个数的倍数。

证 把1到 $2n$ 共 $2n$ 个正整数放入 $n$ 个盒子,其中每个盒子放 $(i, 2i)$ ,现从 $2n$ 个数中取 $n+1$ 个数,相当于从 $n$ 个盒子中取 $n+1$ 个数。由鸽巢原理知,必有两个数出自同一盒,故这 $n+1$ 个数中至少有一对数,其中一个数是另一个数的倍数。

【例1.7】设 $n$ 和 $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ 都是正整数,则总可以找到一对数 $a_i$ 和 $a_j$ (其中: $1 \leq i < j \leq n+1$ ),使得它们的差能够被 $n$ 整除。

证 对 $a_i - a_1$ 取被 $n$ 除后的余数, $i = 2, 3, \Lambda, n+1$ ,则有余数 $n$ 个。若 $n$ 个数互不相同,则其中必有一个数为0,不妨设为 $a_{i_0} - a_1$ ,则 $a_{i_0} - a_1$ 能够被 $n$ 整除。否则,由鸽巢原理,必有两个数相同,不妨设 $a_i - a_1$ 与 $a_j - a_1$ 的余数相同,则 $a_i - a_j$ 能被 $n$ 整除。