离散数学导引

马振华

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是离散数学的精练导引。除介绍基本内容外，特别着重于阐述离散数学的方法。全书共分四讲十一章计有集合论技术，数理逻辑基础，代数系统与图论方法。在讲述各部分内容时，着重强调其间的联系，把离散数学看作是一个整体。内容不企求全面，但求重点突出。

本书可作为理工科大学学生的选修课教材，也可供广大科技工作者自学参考。各章后均附有习题，并有部分提示与解答。

(京)新登字 158 号

离 散 数 学 导 引
马振华
☆
清华大学出版社出版
北京　清华园
顺义振华印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
☆
开本：850×1168 1/32　印张：10.25　字数：263 千字
1993 年 6 月第 1 版　1993 年 6 月第 1 次印刷
印数：0001—5000
ISBN 7-302-00873-6/O·134
定价：5.65 元

序

我的书是一首小诗，
　　奉献给奋发的大学生，
　　　　勤勉的工程师，以及
　　　　　　孜孜不倦的好学青年。

宏伟的乐队里缺少不了乐器之王—钢琴，
高耸入云的数学大厦里也缺少不了"离散"(数学)，
　　"连续"和"离散"象两支翅膀，
　　　　它把人类从地上带向天堂！
　　"有限"与"无穷"象一把锋利的宝剑，
　　　　它无往不胜，
　　　　　无坚不摧！

学习数学吧！
　　即便你还是一个孩童，
　　　　学习它能培养你的耐性，
　　　　　　更能发挥你的思考力及创造力！

"数学能使人精细"
"知识就是力量"
——这是伟大培根不朽的名言！

作者把钢琴奏出的音乐比喻作"离散"音乐。

致　读　者

本书是作者在清华大学多次讲授"离散数学"课程的基础上编写的，目的在于给出离散数学的一个精炼的导引，带领读者进入离散数学的殿堂，侧重于就若干重要的内容介绍它的概念与独特的方法，内容不苛求全面，但求重点突出。

—— 对于定理的证明，本书的作法是只给出比较典型的、有方法论意义的证明，目的在于启发思想，对于平凡的证明，或较难的含有特殊技巧，但并不带有普遍意义的证明一概略去。

　不带证明的定理中有一部分可作为读者的习题，读者可试着加以解决，以提高解题的能力。

—— 无论带有证明或不带证明的定理，作者都尽力地提供它的背景，以及它的适用范围。使读者对这些定理的内涵有更深的理解。

—— 要学会给数学概念下定义，离散数学的特点之一就在于解决问题的多样性，不但同一个问题有各种不同的解法，同一个概念有各种不同的描述方法，有各种不同的定义方法。本书在适当的地方给出种种不同的定义供读者参考。希望能起到举一反三的作用。

—— 学数学就要做数学，时间不富裕的读者可只做书中的习题，如果有时间，读者应把书中未完成的例题，未证明的定理以及习题全部做完，这样就有了坚固的基础。

—— 学习数学不仅限于学习数学知识，更重要的还在于学习数学思维方法，为了学习思维方法，就必须对数学内容有一定的看法。为此，作者在正文适当的地方相应地插入若干"格言"借

以阐发某些观点，藉以引起读者的深思。读者不论是赞成或是反对，只要能让读者对所学的内容加深理解，作者的愿望就达到了。

作者认为：

——一本好书不仅仅传授科学知识，还能在思想方法上给人们以启迪，促人心智，发人深思！

——一本好书应当把知识性与趣味性融为一体，使人们阅读时兴趣盎然，留连忘返！

——一本好书不是让人们牢记许多教条，它应能推动人们思想航行的风帆，催人出征，助人远航！

在书稿的修改、整理过程中感谢我的学生们给了我很大的帮助，提出许多好的意见，马连荣同志仔细地阅读了我的手稿，提出不少好的意见，并提供了部分习题的参考答案，向她深表谢意。

作者于清华园

1992 年 10 月

符　号　表

C	复数集
N	自然数集(包括 0 在内)
N^+	正自然数集
$N^{(n)}$	自然数 n 次方的全体
P	素数集/ 规则 P(见数理逻辑)
Q	有理数集
Q^+	正有理数集
Q^-	负有理数集
R	实数集
T	规则 T(见数理逻辑)
Z	整数集
Z_m	$\{[1], [2], \cdots, [m]\}$
CP	演绎定理
EG	存在推广规则
ES	存在特指规则
UG	全称推广规则
US	全称特指规则
$\underbrace{R\times R\times\cdots\times R}_{n}$, ^nR	笛卡儿积/ n 维实空间
CA	集合 A 的补集
$A\times B$	集 A 与集 B 的笛卡儿积
$\underbrace{A\times\cdots\times A}_{n}$, ^nA	集 A 的 n 重笛卡儿积
I_A, R^0	恒等关系
A, A′	集 A 的补集
X^X	所有 X 到自身的映射

M, $\lvert M \rvert$	集合 M 的势(基数)
R	关系
$\not R$	否关系
R	补关系
R^{-1}	逆关系
R^{+}, $t(R)$	关系 R 的传递闭包
R^{*}, $rt(R)$	关系 R 的自反传递闭包
$R \quad S$	关系 R 与关系 S 的复合
$\underbrace{R \cdots R}_{n}$, R^{n}	关系 R 的 n 次幂
$r(R)$	关系 R 的自反闭包
$s(R)$	关系 R 的对称闭包
$t(R)$	关系 R 的传递闭包
$rs(R)$	关系 R 的自反、对称闭包
$rt(R)$	关系 R 的自反、传递闭包
$ts(R)$	关系 R 的传递、对称闭包
B_2^r	$\underbrace{B_2 \times \cdots \times B_2}_{r}$
B_{2^r}	含有 2^r 个元素的布尔代数
A, B, C	合适公式
$A^{A_1 \cdots A_n}_{x_1 \cdots x_n}$	置换公式
A/R	A 上由关系 R 所产生的划分
G/E, G/π_ε	G 上由 π_ε 所产生的划分
$H \quad g$, Hg	H 的右陪集
$g \quad H$, gH	H 的左陪集
$[a]$	生成子, 集$\{\cdots, a^{-1}, a^{0}, a^{1}, \cdots\}$
$[x]_R$	集 $\{y \mid y \in A$ 且 $\langle x, y \rangle \in R\}$
xRy	x 与 y 有关系 R
$x \sim y$	x 与 y 等价
$\langle a, b \rangle$	元素 a, b 构成的"序对"
$[x, y]$	偏序集上的区间

瞴$_0$	阿列夫零
瞴$_1$, 瞴	阿列夫
$\mathcal{A}$	数学结构
E_π	由 π产生的等价关系
ɑ	歧义名称
N	正规子群
π_E	由 E 产生的划分
Σ	字母符号集
Σ^*	字母串集合(含空字)
Σ^+	字母串集合(不含空字)
Γ	前提集合
Λ	空字
∈	属于
	包含
	真包含
∪	集合的并运算
∩	集合的交运算
S	限制
$+_m$	m 同余加
ǖ	同构
	空集
$P(A)$	集 A 的幂集
π(A)	集 A 的划分
~, , NOT	命题的“非”运算
∧, &, AND	命题的“合取”运算
∨, OR	命题的“析取”运算
→, IF…THEN	命题的“蕴含”运算
\ , ≡, Iff	命题的“等值”运算
$\bar{\vee}$	不可兼或
↑	谢弗“竖”/sheffer“竖”

↓	**皮尔斯“箭”/pierce“箭”**
"	**全称量词**
v	**存在量词**
	断定符

目　录

第一讲

集合论技术

连续的形象:

"剪不断,理还乱,是离愁,恰似一江春水向东流。"

南唐·李后主词

离散的形象:

"枯藤老树昏鸦,小桥流水人家,古道西风瘦马,夕阳西下,断肠人在天涯。"

元·马致远

自从 G. Cantor 创立集合论,迄今已有三百年的历史,集合的概念已深入到现代科学的各个方面,成为表达各种严格科学概念的必不可少的"数学语言"。

然而从最早的集合论文献 W. H. Young & G. C. young "The Theory of sets of Points", (1906) 以及著名的 Hausdorff 的 "Mengenlehre"(1935) 来看,那时所研究的集合多半是分析数学中的"数集"或几何学中的"点集";虽说在各种文献与著作中叙述集合的元素可以是抽象的,其实都是在数集合与点集合的背景下进行研究的。集合的元素真正成为包罗万象的对象,应当说是从"计算机革命"开始。数字、符号、图象、语音;以及光、电、热各种信息,它们都可以作为"数据"(Data),这些"数据"就构成集合。因

此，集合的理论在编译原理，开关理论，信息检索，形式语言，数据库与知识库，CAD，CAI，CADE 以及人工智能的各个领域中，得到广泛的应用。集合论的原理与方法成为名符其实的数学技术。

本讲以朴素的观点讲解集合的理论、方法及其应用，而对公理集合论，只略作介绍。

第一章　集合概念

“人类的一切知识皆始于直观，其次是概念，最后发展为理念。”

I. Kant

“没有任何人能将我们从 Cantor 所创造的这个乐园(集合论)中驱赶出去！”

D. Hilbert

§1　集合及其表示法

什么是集合

在 1879—1918 年间，G. Cantor 从证明“函数展开为三角级数的唯一性”的研究开始，要求从某一个区间的所有点的全体中，分离出另一个无穷的点集合，为了要把这无穷多个点的全体弄清楚，他感到不能仅仅研究单独的或个别的“点”，必须将具有某种特性的“对象物”看成一个“整体”来进行研究。用他自己的话来说：“凡是在我们的感觉或思维中可以明确区分的对象物，把它们看成是一个整体，这个整体，我们就称它是集合(Set)，其中的“物”就称为这个集合的“成员”或“元素”(Element)。

从朴素集合论的立场，我们沿用这个描述，把它看作是一种直观的定义，下面用一些实例加以说明：

例 1.1

(1) 1973 年在大兴安岭工作的所有伐木工人。

(2) 英文字母表中的所有字母。

(3) 鲁迅“狂人日记”中所有的汉字。

(4) 自然数的全体(包含数字“0”在内)。(N)

(5) 非零自然数的全体。(N^+)

(6) 所有的整数。(Z)

(7) 所有的有理数。(Q)

(8) 所有的正有理数。(Q^+)

(9) 所有的负有理数。(Q^-)

(10) 所有的实数。(R)

(11) 所有的复数。(C)

(12) 所有的素数。(P)

(13) 小于 10 的素数的集合。

(14) 方程式: $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的所有“根”的集合。

(15) 平面上两条平行线的“交点”的集合。

(16) 所有正整数的平方数构成的集合。

(17) 所有 Fortran 语言中的标识符构成的集合。

上面所举的种种例子都是集合,有了集合的概念,就可以不仅仅研究单个的“数”与“数据”,而且研究由全体数据所表达的性质,以及更加广泛的问题。

在例 1.1 中,我们列举了许多集合。组成集合的“成员”,称之为集合的元素。将元素 a 在集合 S 中表示为:

$$a \in S,$$

读作,a 属于 S。如果 a 不在集合 S 中,记作:

$$a \notin S, \qquad (\text{或 } a \text{ ú } S),$$

其中“$\in$”表示属于关系(记号$\in$由意大利数学家 Peano 引入,是希腊文 εστι(esti)的首字母,相当于汉语中的“是”)。

通常我们用大写的拉丁字母: A, B, C, …(或带有下标的字母 $A_1, B_1, C_1, \cdots$) 来命名集合。有些特殊的集合, 采用特殊的标记。

属于关系是集合论中最重要的关系。元素, 集合等概念是集合论中最重要的概念, 当我们应用集合论的方法去解决实际问题时, 这是首先必须明确的事情。

例 1.2　下面是正确的命题吗?

$2 \in N$; $-24 \notin N$; $4 \in Z$; $\frac{1}{2} \notin R$; $\sqrt{2} \notin Q$;

$i+1 \notin R$; $1+i \in C$。

必须注意, 首先我们这里所谈的“元素”都是“确定的”, 能够明确加以“区分的”对象, 如例 1.1 中所说的鲁迅“狂人日记”中所有的汉字全体构成一集, 其中“汉字”是它的元素, 凡是相同的汉字, 认为是同一个汉字不作区分。因此, 我们认为集合中的元素都是不同的(相同的元素看作是一个)。

其次, 元素与集合之间的“属于关系”也是“非常明确”的, 对于某个元素 a 与某个特定的集合 S, 要么

$$a \in S,$$

要么

$$a \notin S,$$

二者必居其一。绝对不容许有含糊不清, 界限不分明的情况产生。因此, 我们所研究的集合论是古典集合论。由控制论的研究所引起的当代数学的一个新领域模糊集合论(Fuzzy Set Theory) 是研究不清晰的对象构成的集合, 我们不研究。

“一个设计合理的表示法, 总要不含糊, 不混乱地表达数学的本质。”

R. Bellman