离 散 数 学

焦占亚　张正玺　编著

陕西科学技术出版社

内 容 简 介

本书包括离散数学中的四部分内容：数理逻辑(包含命题逻辑与谓词逻辑的基本概念)，集合论(包含集合代数、二元关系、函数和基数)，代数结构(包含代数系统、群、环、域、格和布尔代数)，图论(包含图的基本概念、欧拉图与哈密尔顿图、树、二部图和平面图).

本书可作为普通高等学校，职业技术学院，继续教育学院计算机、信息科学或其它相关专业本专科生的离散数学课程教材，亦可供相关专业的工作人员阅读参考.

图书在版编目（C I P）数据

离散数学/焦占亚，张正玺编．---西安：陕西科学技术出版社，2003．3
ISBN 7-5369-3602-8

Ⅰ．离…　Ⅱ．①焦…②张…　Ⅲ．离散数学—高等学校—教材　Ⅳ．0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003) 第 001027 号

出 版 者 陕西科学技术出版社
西安北大街 131 号　邮遍 710003
电话(029)7211894　传真 (029)7218236
http://www.snstp.com

发 行 者 陕西科学技术出版社
电话(029)7212206　7260001

印　　刷 陕西科技大学印刷厂
规　　格 787mm×1092mm　1/16 开本
印　　张 14.5
字　　数 330 千字
印　　数 1～2000
版　　次 2003 年 3 月第 1 版
2003 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 24.00 元

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，它研究的对象是离散量的结构及相互关系. 它是计算机和信息科学各专业的重要专业基础课，也是主干课程之一. 它在可计算性与计算复杂性理论、算法与数据结构、数值与符号计算、程序设计语言、操作系统、数据库技术、编译原理、计算机图形学、人工智能与机器人等领域都有广泛的应用. 这门课程不但要为学习专业课打下坚实的数学基础,还要培养学生抽象思维和严格推理的能力，以便为将来软、硬件应用与开发奠定基础. 陕西科技大学计算机与信息工程学院为了提高教学质量，在教材建设中希望能有一套自己的质量较高的教材，组织编写了这本教材.

我们从事离散数学教学已经 20 多年，经过长期的教学实践，积累了丰富的教学经验，逐步形成了一本比较成熟的讲义. 在此基础上，按照国家教育委员会颁布的计算机专业教学基本要求，认真编著成现在的教材. 离散数学应包括四大部分，各部分内容都十分丰富，均可独立成书. 我们将最基本、最重要的内容选入，并且努力做到简明扼要、深入浅出. 本书例题较多. 离散数学有许多抽象概念学生难以理解，我们通过大量例题从不同的角度对这些概念进行说明，帮助学生理解. 另外，全书各章节都涉及到要求学生掌握求解问题的一些具体方法，我们也是通过典型范例使学生牢固掌握. 这些例题起到了示范、引导和开拓的作用. 对全书各部分内容的先后顺序我们也进行了认真地研究和精心地安排. 使教材的结构更合理,内容更充实,语言更通俗易懂,学生更容易理解. 离散数学的许多重要定理的证明梯度太大，学生难以接受. 对这些定理的证明也作了特别处理，有的增加了引理，有的分成几个小定理分步证明.

本书包含了数理逻辑、集合论、代数结构与图论四部分内容. 其中数理逻辑包含命题逻辑和谓词逻辑两章；集合论包含集合、二元关系和函数三章；代数结构包含代数系统和几个典型的代数系统两章；图论是第 8 章. 全书各节都配有大量的习题，供学生选做. 本书可作为普通高等学校计算机、信息科学或其它相关专业的本专科教材. 根据我们的经验，使用本书可在 120 学时内完成全部教学任务. 如果采用 80 或 100 学时的教学计划，可以删去第 2 章的 2.4 节，第 5 章的 5.3 节，第 7 章的 7.5 节，7.7 节和 7.8 节，第 8 章的 8.7 节.

本书的第 4 章、第 6 章、第 7 章和第 8 章由焦占亚编写，第 1 章、第 2 章、第 3 章和第 5 章由张正玺编写. 刘炜绘制了全书的所有图片，张洲平和李勇对全书的文字进行了校对. 在本书编写过程中，得到了陕西科技大学计算机与信息工程学院的领导和全体教职工的大力支持，在此表示深深的谢意.

最后，我们诚恳地期待读者对本书的批评指正.

编　者

2002 年 9 月于陕西科技大学

目　　录

第 1 章 命题逻辑

1.1 命题及联结词……1
1.1.1 命题的基本概念……1
1.1.2 命题联结词……2
1.2 命题公式与翻译……5
1.3 真值表和等价公式……7
1.3.1 命题公式的真值表……7
1.3.2 命题公式的等价……8
1.4 重言式……11
1.5 范式……13
1.5.1 析取范式和合取范式……13
1.5.2 主析取范式……15
1.5.3 主合取范式……18
1.6 全功能联结词集……21
1.7 对偶式与蕴含式……24
1.7.1 对偶式……24
1.7.2 蕴含式……25
1.8 命题逻辑的推理理论……28

第 2 章 谓词逻辑

2.1 个体、谓词与量词……34
2.1.1 个体……34
2.1.2 谓词……35
2.1.3 量词……36
2.2 谓词公式……39
2.2.1 谓词公式……39
2.2.2 约束变元与自由变元……40
2.3 谓词演算的等价式与蕴含式……42
2.4 前束范式……46
2.5 谓词逻辑的推理理论……48

第 3 章 集　合

3.1 集合的基本概念……52
3.2 集合的运算……56
3.3 集合恒等式……58
3.4 集合的覆盖和划分……62
3.5 笛卡尔积……64

第 4 章 二元关系

4.1 二元关系及其表示……67
4.2 关系的运算……69
4.3 关系的性质……75
4.4 关系的闭包运算……79
4.5 等价关系……83
4.6 相容关系……87
4.7 序关系……89

第 5 章 函 数

5.1 函数基本概念……94
5.2 反函数和复合函数……98
5.3 集合的基数……102
5.3.1 集合的等势……102
5.3.2 有限集和无限集……103
5.3.3 集合的基数……104
5.3.4 集合基数的比较……106

第 6 章 代数系统

6.1 代数系统的基本概念……109
6.2 二元运算的性质……111
6.3 子代数和积代数……115

第 7 章 几个典型的代数系统

7.1 半群和独异点……118
7.1.1 广群和半群……118
7.1.2 独异点……119
7.2 群与阿贝尔群……121
7.2.1 群的定义和性质……121
7.2.2 阿贝尔群……124
7.3 子群……126
7.3.1 子群的概念……126
7.3.2 子群的判定……127
7.3.3 元素的阶及其性质……130
7.4 陪集和拉格朗日定理……131
7.5 正规子群……135
7.6 同态和同构……138
7.6.1 代数系统的同态和同构……138
7.6.2 群的同态和同构……141
7.7 循环群……144
7.8 置换群……149

7.9 环与域……152
7.9.1 环的定义及基本性质……152
7.9.2 几个常见的特殊环……154
7.9.3 子环 ……155
7.9.4 域 ……156
7.9.5 环和域的同态……157
7.10 格 ……158
7.10.1 格的概念和性质……158
7.10.2 子格和格的同态……162
7.10.3 分配格 ……163
7.10.4 有补格 ……165
7.11 布尔代数……167
7.11.1 布尔代数的概念和性质……167
7.11.2 布尔代数的子代数和同态 ……169
7.11.3 有限布尔代数的结构……170

第8章 图 论

8.1 图的基本概念……175
8.1.1 图 ……175
8.1.2 结点的度及其性质 ……177
8.1.3 多重图、简单图、完全图和正则图……178
8.1.4 图的同构……178
8.1.5 补图、子图和生成子图……180
8.2 路和回路 ……180
8.3 图的连通性……182
8.3.1 无向图的连通性 ……182
8.3.2 有向图的连通性 ……185
8.4 图的

第 1 章 命题逻辑

1.1 命题及联结词

1.1.1 命题的基本概念

数理逻辑是研究推理的数学分支，而推理必须包含前提和结论，前提和结论又是由陈述句组成的，因而陈述句就成了推理的基本要素. 在数理逻辑中把能判断真假的陈述句称为命题. 一个命题表达的判断结果称为命题的真值. 命题的真值有“真”和“假”两种，分别用 True,T,1(真)和 False,F,0(假)来表示. 真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题. 任何命题的真值是惟一的. 命题是数理逻辑中最小的研究单位.

判断一个句子是否为命题，先判断它是否为陈述句. 只有陈述句才可能成为命题，其他句子都不是命题. 如感叹句、疑问句、祈使句都不是命题；再判断它是否有惟一的真值,有惟一真值的陈述句才是命题. 是陈述句但不能判断真假就不是命题(例如悖论)；只要有惟一真值就可以，而不要求现在就可以确定其真假.

例 1.1.1 下列语句不是陈述句，故不是命题.

⑴ 全体立正！ （ 祈使句 ）

⑵ 明天是否开大会？ （ 疑问句 ）

⑶ 天气多好啊！ （ 感叹句 ）

例 1.1.2 下列陈述句是命题.

⑴ 中国人民是伟大的.

⑵ 雪是黑的.

⑶ 小王学英语或学日语.

⑷ 如果天气好，那么我去散步.

例 1.1.3 下列陈述句虽现在不能确定真假，但将来总可以确定其真假，故也是命题.

别的星球上有生物.

例 1.1.4 下列语句是悖论，故不是命题.

我正在说慌.

设该句子是真命题，我说的话是对的，则我正在说慌，因而我说的是慌话，慌话是不正确的，故是假命题；设我说的话是不对的，我没有说慌，因而我说的话是真话，正确的话，故是真命题. 因此无法判断该语句的真假，因而不是命题.

例 1.1.5 下列语句要根据上下文确定其真值，故也不是命题.

1+101=110 （ 对二进制是对的，对 10 进制是错的 ）

一个命题如果不能分解成更简单的命题，称这样的命题为原子命题，例 1.1.2 中的⑴、⑵是原子命题；一个命题如果它不是原子命题，称为复合命题. 例 1.1.2 中的⑶、

⑷是复合命题.

在本书中，用小写英文字母或小写英文字母带下标来表示命题，例如，例 1.1.2 中⑴、⑵、⑶、⑷可以分别表示为 p、q、r、s.

p：中国人民是伟大的.

q：雪是黑的.

r：小王学英语或学日语.

s：如果天气好，那么我去散步.

像 p、q、r、s 这些表示命题的符号称为命题标识符，它是指定命题的代表. 在数理逻辑中常用命题标识符对命题进行符号化.

例 1.1.6 下面的命题由哪些原子命题组成？对这些原子命题符号化.

⑴$\sqrt{2}$ 不是有理数.

⑵如果明天下雨，我就不去春游.

⑶老王或老李是工人.

解 ⑴有一个原子命题.　　p：$\sqrt{2}$ 是有理数.

⑵有两个原子命题. q：明天下雨. r：我就去春游.

⑶有两个原子命题. s：老王是工人. t：老李是工人.

如果一个命题标识符表示的是一个确定的具体的命题，则称这个命题标识符为命题常量，也叫命题常元；一个命题标识符表示的是任意命题，则称为命题变量，也叫命题变元. 如果一个命题变元表示的是一个原子命题，该变元称为原子变元.

因为命题变元可以表示任意命题，所以它没有确定真值，故命题变元不是命题.

1.1.2 命题联结词

在数理逻辑中，复合命题是由原子命题与联结词组合而成. 下面介绍各个联结词.

表 1.1.1

p	$\neg p$
F	T
T	F

1. 否定联结词

定义 1.1.1 设 p 为命题，p 的否定是一个新命题，记作$\neg p$.定义为：若 p 为 F，则$\neg p$ 为 T，若 p 为 T，则$\neg p$ 为 F. 联结词“$\neg$”称为否定联结词，它也可记为“▮”. 例如，$\neg p$ 也可记为 $\overline{p}$.

p 和$\neg p$ 的关系可以用表 1.1.1 来表示，表 1.1.1 叫做否定联结词“$\neg$“的真值表.

例 1.1.7 设 p：2 是素数.

$\neg p$：2 不是素数.

或　$\neg p$：2 是素数是不对的.

“$\neg$“也可以看作逻辑运算，它是一元运算.

2. 合取联结词

表 1.1.2

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

定义 1.1.2 两个命题 p 和 q 的合取是一个复合命题，记作 $p \wedge q$，读作 p 与 q，p 并且 q，p 合取 q，定义为：$p \wedge q$ 为 T 当且仅当 p 与 q 同时为 T，联结词“$\wedge$”称为合取联结词. 联结词“$\wedge$”的真值表见表 1.1.2.

例 1.1.8　p：今天下雨. q：明天下雨.

$p\wedge q$：今天下雨且明天下雨．也可描述为：今天与明天都下雨或这两天都下雨．

合取联结词和自然语言中的“与”、“且”意义相似，但并不完全相同．

例 1.1.9 p：我们去植树．

q：3 加 3 等于 6．

$p\wedge q$：我们去植树与 3 加 3 等于 6．

在日常语言中，常把“与”用于具有某种关系的两个命题之间；但是，在逻辑学中则不然，完全允许将两个相互无关的命题用“与”连接起来，生成新命题．例如，可以将原子命题“我们去植树”和“3 加 3 等于 6”用“与”连接起来：

我们去植树与 3 加 3 等于 6．

不难看出，所生成的命题在日常语言中是没有意义的，但在逻辑学中却是允许的．

虽然可把合取联结词∧看成是现代汉语中联结词“与”、“和”、“且”等词的翻译．然而，在现代汉语中，有时却又在各种不同的意义上使用这些联结词．因此，不能一概用符号∧去翻译它们．为了说明这种区别，考察命题：张小明与张小华是堂兄弟．此命题中的字词“与”不是一个合取“与”，它表示张小明和张小华的关系，这是一个原子命题，而不是一个复合命题．

“∧”也可以看成逻辑运算，它是二元逻辑运算．

3．析取联结词

定义 1.1.3 两个命题 p 和 q 的析取是一个复合命题，记为 $p\vee q$，读作 p 或 q，p 析取 q，定义为：$p\vee q$ 为 F 当且仅当 p 与 q 都为 F，联结词“∨”称为析取联结词．联结词“∨”的真值表见表 1.1.3．

表 1.1.3

p	q	$p\vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

“∨”与汉语中的“或”相似，但又不相同．汉语中的或有可兼或与不可兼或（排斥或）的区分．

例 1.1.10 下列两个命题中的“或”，哪个是可兼或？哪个是不可兼或？

⑴在电视上看这场杂技或在剧场里看这场杂技．

⑵灯泡有故障或开关有故障．

解 命题⑴中的联结词“或”，是在排斥意义上使用的．也就是说，或者在家里通过电视看杂技，或者是在剧场里看同一场杂技，但是，同一个人是不可能既在家里同时又在剧场看杂技．这里的联结词“或”是不可兼或．不可兼或也叫异或，它将在后面介绍．

在命题⑵中，或者灯泡有故障，或者开关有故障，或者二者都有故障．这里的“或”，显然是指可兼或．

析取是可兼或．“∨”也可以看成逻辑运算，它是二元逻辑运算．

表 1.1.4

p	q	$p\to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

4．条件联结词

定义 1.1.4 给定两个命题 p 和 q，其条件命题是个复合命题，记为 $p\to q$.读作，如果 p，那么 q.或若 p，则 q.定义为：$p\to q$ 为 F 当且仅当 p 为 T, q 为 F．联结词“→”称为条件联结词．p 叫做条件命题 $p\to q$ 的前件, q 叫做后件．联结词“→”的真值表见表 1.1.4．

例 1.1.11　p：小王努力学习. q：小王学习成绩优秀.

$p \to q$：如果小王努力学习，那么他的学习成绩就优秀.

联结词"→"与汉语中的"如果…，那么…"或"若…，则…"相似，但又是不相同的.

⑴在自然语言中，"如果…，那么…"，常常是有因果关系,否则无意义. 但在条件命题 $p \to q$ 中，只要 p、q 有确定的真值，$p \to q$ 就成为命题.

⑵在自然语言中，"如果…，那么…"，当前提为假时，结论不管真假，这个句子都无法判断真假. 在条件命题 $p \to q$ 中，当 p 为 F 时，不管 q 是真还是假，$p \to q$ 总是真的.

联结词"→"也可记为"⊃".

联结词"→"也可以看成逻辑运算，它是二元逻辑运算.

5. 双条件联结词

定义 1.1.5 给定两个命题 p 和 q，其复合命题 $p \leftrightarrow q$ 称为双条件命题，读作 p 当且仅当 q，定义为：$p \leftrightarrow q$ 为 T 当且仅当 p 与 q 的真值相同. 联结词"↔"称为双条件联结词. 它的真值表见表 1.1.5.

例 1.1.12 设

p：两个三角形全等.

q：两个三角形的三组对应边相等.

则

$p \leftrightarrow q$：两个三角形全等当且仅当它们的三组对应边相等.

表 1.1.5

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

在双条件命题 $p \leftrightarrow q$ 中，也可以不顾 p 和 q 是否有必然的因果关系，只根据定义确定命题的真值. 例如命题逻辑中认为"2+2=4 当且仅当雪是白的"是命题.

联结词"↔"，也可记为"iff".

联结词"↔"也可以理解成逻辑运算，它是二元运算.

习　题　1.1

1. 下列句子中，哪些是命题？哪些不是命题？如果是命题，指出它的真值.

(1) 中国有四大发明.

(2) 计算机有空吗?

(3) 不存在最大质数.

(4) $21+3<5$.

(5) 老王是山东人或河北人.

(6) 2 与 3 都是偶数.

(7) 小李在宿舍里.

(8) 这朵玫瑰花多美丽呀!

(9) 请勿随地吐痰!

(10) 圆的面积等于半径的平方乘以π.

(11) 只有 6 是偶数，3 才能是 2 的倍数.

(12) 雪是黑色的当且仅当太阳从东方升起.

(13) 如果天下大雨，他就乘班车上班.

2. 将下列复合命题分成若干个原子命题.

(1) 李辛与李末是兄弟.

(2) 因为天气冷，所以我穿了羽绒服.

(3) 天正在下雨或湿度很高.

(4) 刘英与李进上山.

(5) 王强与刘威都学过法语.

(6) 如果你不看电影，那么我也不看电影.

(7) 我既不看电视也不外出，我在睡觉.

(8) 除非天下大雨，否则他不乘班车上班.

3. 将下列命题符号化.

(1) 他一面吃饭，一面听音乐.

(2) 3 是素数或 4 是素数.

(3) 若地球上没有树木，则人类不能生存.

(4) 8 是偶数的充分必要条件是 8 能被 3 整除.

(5) 停机的原因在于语法错误或程序错误.

(6) 四边形 *ABCD* 是平行四边形当且仅当它的对边平行.

(7) 如果 a 和 b 是偶数，则 $a+b$ 是偶数.

4. 将下列命题符号化，并指出各复合命题的真值.

(1) 如果 3+3=6，则雪是白的.

(2) 如果 $3+3\neq 6$，则雪是白的.

(3) 如果 3+3=6，则雪不是白的.

(4) 如果 $3+3\neq 6$，则雪不是白的.

(5) $\sqrt{3}$ 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲.

(6) 2+3=5 的充要条件是 $\sqrt{3}$ 是无理数.（假定是 10 进制)

(7) 若两圆 O_1，O_2 的面积相等，则它们的半径相等，反之亦然.

(8) 当王小红心情愉快时，她就唱歌，反之，当她唱歌时，一定心情愉快.

1.2 命题公式与翻译

上一节讨论了命题常量，命题变量和命题联结词. 把命题常量，命题变量按照一定的逻辑顺序用命题联结词连接起来就构成了合式公式，也叫命题公式. 当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 时，合式公式定义如下：

定义 1.2.1

⑴单个的命题变元和常元是合式公式.

⑵如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 是合式公式.

⑶如果 A 和 B 是合式公式，那么 $(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$ 和 $(A\leftrightarrow B)$ 也是合式公式.

(4)当且仅当有限次地应用了(1)、(2)、(3)所得到的符号串是合式公式，也称为命题公式，简称公式.

命题公式一般的用大写的英文字母 A，B，C，⋯表示.

依照这个定义，下列符号串是合式公式：

$\neg(p\wedge q)$，$\neg(p\vee q)$，$(p\rightarrow(p\vee\neg q))$, $(((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\leftrightarrow(s\leftrightarrow t))$

下列符号串不是合式公式:

$(p\rightarrow q)\rightarrow(\wedge q)$,（$p\rightarrow q$,（$p\wedge q$）$\rightarrow q$）

定义 1.2.1 给出合式公式定义的方法称为归纳定义，它包括三部分：基础，归纳和界限. 定义 1.2.1 中的(1)是基础，(2)和(3)是归纳，(4)是界限. 下文中还将多次出现这种定义方法.

为方便起见，对命题公式约定如下：

(1)最外层括号可以省略.

(2)规定联结词的优先级由高到低依次为¬，∧，∨，→，↔. 按此优先级别，如果去掉括号，不改变原公式运算次序，也可以省掉这些括号.

一般地说，因为合式公式中有命题变元，无法计算其真值，所以不是命题.

合式公式中的命题变元，也叫合式公式的分量.

有了命题公式的概念，我们就可以将自然语言中某些陈述句用符号表示. 这个过程称之为符号化或形式化. 在命题符号化中，用标识符表示原子命题.

例 1.2.1 符号化下列各命题.

(1)他既聪明又用功.

(2)他虽聪明但不用功.

(3)除非你努力，否则你将失败.

解 (1) 设 p：他聪明.　　q：他用功.

$p\wedge q$：他既聪明又用功.

(2) 设 p：他聪明.　　q：他用功.

$p\wedge\neg q$: 他虽聪明但不用功.

(3)设 p：你努力.　　q：你失败.

此命题理解为：如果你不努力，则你将失败. 按此理解

$\neg p\rightarrow q$：除非你努力，否则你将失败.

习　题　1.2

1. 判别下列公式哪些是合式公式，哪些不是合式公式.

(1)　$(p\wedge q\rightarrow r)$

(2)　$(p\wedge(q\rightarrow r)$

(3)　$((\neg p\rightarrow q)\leftrightarrow(r\vee s))$

(4)　$(p\wedge q\rightarrow rs)$

(5)　$((p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((q\rightarrow p)\leftrightarrow q\vee r))$.

2. 设 p：天下雪.

q：我将进城.

r：我有时间.

将下列命题形式化：

(1) 天没有下雪，我也没有进城.

(2) 如果我有时间，我将进城.

(3) 如果天不下雪而我又有时间的话，我将进城.

3. 设 p、q、r 所表示的命题与上题相同，试把下列公式译成自然语言.

(1) $r \wedge q$

(2) $\neg(r \vee q)$

(3) $q \leftrightarrow (r \wedge \neg p)$

(4) $(q \to r) \wedge (r \to q)$

4. 试把原子命题表示为 p、q、r 等，用符号译出下列各句子.

(1) 或者你没有给我写信，或者它在途中丢失了.

(2) 如果张三和李四都不去，他就去.

(3) 我们不能既划船又跑步.

(4) 如果你来了，那末他唱不唱歌将看你是否伴奏而定.

5. 用符号形式写出下列命题.

(1) 假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报.

(2) 我今天进城，除非下雨.

(3) 仅当你走，我将留下.

1.3 真值表和等价公式

1.3.1 命题公式的真值表

定义 1.3.1 设 p_1，p_2，…，p_n 是出现在公式 A 中的全部命题变元，给 p_1，p_2，…，p_n 各指定一个真值，称为对公式 A 的一个赋值或解释. 若指定的赋值使 A 的真值为 T，则称这个赋值为 A 的成真赋值，若使 A 的真值为 F，则称这个赋值为 A 的成假赋值.

在本书中，若公式 A 中出现的命题变元为 p_1，p_2，…，p_n，给定 A 的赋值 a_1，a_2，…，a_n 是指 $p_1=a_1$，$p_2=a_2$，…，$p_n=a_n$. 若 A 中出现的命题变元为 p，q，r，…，给定 A 的赋值 a_1，a_2，…，a_n 是指 $p=a_1$，$q=a_2$，$r=a_3$…，最后字母赋值 a_n.

例如，在公式 $(p \vee q \to r)$ 中，赋值 011 是指 $p=0$，$q=1$，$r=1$，它是该公式的成真赋值，赋值 110 是指 $p=1$，$q=1$，$r=0$，它是该公式的成假赋值.

表 1.3.1

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

定义 1.3.2 在命题公式 A 中，对 A 的每一个赋值，就确定了 A 的一个真值，把它们汇列成表，称该表为命题公式 A 的真值表.

依据定义 1.3.2 可以构造任何公式的真值表. 在构造真值表时，先找出公式中所含的全体命题变元 p_1，p_2，…，p_n(若有下标按下标由小到大的顺序排列，若无下标按字典

顺序排列)，本书规定，赋值从 00⋯0 开始，依次递增，直到 11⋯1 为止．对应各个赋值，计算出公式各部分的真值，直到最后计算出公式的真值.

例 1.3.1 做出公式$\neg p\vee q$ 的真值表，并求成真赋值和成假赋值.

解 表 1.3.1 是公式$\neg p\vee q$ 的真值表．00，01，11 是成真赋值，10 是成假赋值.

例 1.3.2 做出公式$(p\wedge q)\wedge\neg q$ 的真值表，并求成真赋值和成假赋值.

解 表 1.3.2 是公式$(p\wedge q)\wedge\neg q$ 的真值表，公式的所有赋值都是成假赋值．下面会看到，这样的公式叫作矛盾式或永假式.

表 1.3.2

p	q	$p\wedge q$	$\neg q$	$(p\wedge q)\wedge\neg q$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

例 1.3.3 做出公式$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$的真值表，并求成真赋值和成假赋值.

解 表 1.3.3 是公式 $(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$的真值表，01,10 是成真赋值，00,11 是成假赋值.

表 1.3.3

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg p\wedge q$	$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

例 1.3.4 求公式 $p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$ 的真值表，并求成真赋值和成假赋值.

解 表 1.3.4 是公式 $p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$ 的真值表，公式的所有赋值都是成真赋值．下面会看到，这样的公式叫作重言式或永真式.

表 1.3.4

p	q	$p\vee q$	$p\wedge(p\vee q)$	$p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

从以上的例子看出，公式真值表的行数与公式中变元的个数有关，含 2 个变元的命题公式有 $4(=2^2)$行，含 3 个变元的命题公式有 $8(=2^3)$行，⋯．含 n 个变元的命题公式的真值表是 2^n 行.

下文中所谈公式 A 与 B 具有相同的或不同的真值表，是指真值表的最后一列是否相同，而不考虑构造真值表的中间过程.

1.3.2 命题公式的等价

定义 1.3.3 设 A 和 B 是两个命题公式，对 A 和 B 的任一赋值，A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是等价的或逻辑相等的，记为 $A\Leftrightarrow B$

可以证明，命题公式等价有下面的三条性质：

⑴ 自反性，即对任意命题公式 A， $A\Leftrightarrow A$

⑵ 对称性，即对任意命题公式 A 和 B，若 $A\Leftrightarrow B$，则 $B\Leftrightarrow A$

⑶ 传递性，即对任意命题公式 A，B 和 C，若 $A\Leftrightarrow B$，$B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$

例 1.3.5 根据等价的定义，用真值表证明 $p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(p\to q)\wedge(q\to p)$

解 做出 $p\leftrightarrow q$ 和$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$的真值表，如表 1.3.5 所示．在表中 $p\leftrightarrow q$ 和$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$具有相同的真值．它们等价．

虽然用真值表可以判断任何两个命题公式是否等价，但当命题变元较多时，工作量是很大的，证明起来就比较困难．为此引入另外一种证明方法，这种方法叫做等价演算法．其基本思想是：先用真值表证明一组基本的，但又是重要的等价式，以它们为基础进行公式之间的演算，来判断公式是否等价．在数理逻辑中，把基本的等价式常叫命题定律．下面是常用的一些命题定律．

表 1. 3. 5

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.双重否定律 $A\Leftrightarrow\neg\neg A$

2.交换律 $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$, $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$

3.结合律 $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

4.分配律 $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

5.德摩根律 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$，$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

6.幂等律 $A\wedge A\Leftrightarrow A$， $A\vee A\Leftrightarrow A$

7.吸收律 $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$， $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

8.零律 $A\vee 1\Leftrightarrow 1$， $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

9.同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A$， $A\wedge 1\Leftrightarrow A$

10.排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

11.矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

12.条件等价式 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

13.双条件等价式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

14.假言易位式 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$

15.双条件否定等价式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$

以上共 23 个等价式，原则上说，这些公式都可以用真值表证明．下面仅验证德摩根律．

例 1.3.6 用真值表证明德摩根律 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

解 做出的真值表为表 1.3.6，从表中可以看出德摩根律成立．

表 1. 3. 6

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A\wedge\neg B$	$A\vee B$	$\neg(A\vee B)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

定义 1.3.4 如果 X 是合式公式 A 的一部分且 X 本身也是合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式．

例如，设 $A\Leftrightarrow q\rightarrow(p\vee(p\wedge q))$，$X\Leftrightarrow p\wedge q$，则 X 是 A 的子公式.

定理 1.3.1 设 X 是合式公式 A 的子公式，若 $X\Leftrightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 来置换，得到的公式记为 B，则 B 与 A 等价，即 $A\Leftrightarrow B$

证明 对 A、B 的任一赋值，X 与 Y 的真值相同，而 A、B 的其它部分完全相同，所以公式 B 与公式 A 的真值必相同．$A\Leftrightarrow B$

满足此定理的置换叫做等价置换.

例 1.3.7 利用定理 1.3.1 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow p\rightarrow(\neg q\vee r)$

证明 设 $A\Leftrightarrow p\rightarrow(q\rightarrow r)$，$X\Leftrightarrow q\rightarrow r$，$Y\Leftrightarrow\neg q\vee r$，由条件等价式知：$X\Leftrightarrow Y$，$A$ 中的 X 用 Y 来置换，得到的公式 $B\Leftrightarrow p\rightarrow(\neg q\vee r)$．根据定理 1.3.1，$A\Leftrightarrow B$，即 $p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow p\rightarrow(\neg q\vee r)$

例 1.3.8 用等价演算法证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$

解 $p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$　(条件等价式)

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$　(结合律)

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$　(德摩根律)

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$　(条件等价式)

$p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$　(等价的传递性)

例 1.3.9 用等价演算法证明 $(p\wedge\neg(\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r)))\vee\neg p\Leftrightarrow \mathrm{T}$

解 $(p\wedge\neg(\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r)))\vee\neg p$

$\Leftrightarrow(p\wedge(p\vee(q\wedge r)))\vee\neg p$　(德摩根律)

$\Leftrightarrow p\vee\neg p$　(吸收律)

$\Leftrightarrow \mathrm{T}$　(排中律)

$(p\wedge\neg(\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r)))\vee\neg p\Leftrightarrow \mathrm{T}$　（等价的传递性）

例 1.3.10 用等价演算法证明 $p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

解 $p\leftrightarrow q$

$\Leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$　(双条件等价式)

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$　(条件等价式)

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge p)\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge p)$　(分配律)

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee 0\vee 0\vee(q\wedge p)$　(矛盾律)

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(q\wedge p)$　(同一律)

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$　(交换律)

$p\leftrightarrow q\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$　（等价的传递性）

习　题　1.3

1．设 A、B、C 是任意命题公式，证明：

(1) $A\Leftrightarrow A$.

(2) 若 $A\Leftrightarrow B$，则 $B\Leftrightarrow A$.

(3) 若 $A\Leftrightarrow B$，$B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$.

2．设 A、B、C 是任意命题公式.

(1) 若 $A\vee C\Leftrightarrow B\vee C$，$A\Leftrightarrow B$ 一定成立吗？

(2) 若 $A\wedge C\Leftrightarrow B\wedge C$，$A\Leftrightarrow B$ 一定成立吗？

(3) 若 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，$A\Leftrightarrow B$ 一定成立吗？

3. 构造下列命题公式的真值表，并求成真赋值和成假赋值.

(1) $q\wedge(p\to q)\to p$

(2) $p\to(q\vee r)$

(3) $(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$

(4) $(p\wedge\neg q)\vee(r\wedge q)\to r$

(5) $((\neg p\to(p\wedge\neg q))\to r)\vee(q\wedge\neg r)$

4. 用真值表证明下列等价式.

(1) $\neg(p\to q)\Leftrightarrow p\wedge\neg q$

(2) $p\to q\Leftrightarrow\neg q\to\neg p$

(3) $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow p\leftrightarrow\neg q$

(4) $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

(5) $p\to(q\to p)\Leftrightarrow\neg p\to(p\to\neg q)$

(6) $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

(7) $\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\wedge q)$

(8) $p\to(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\to r$

5. 用等价演算证明 4 中的等价式.

6. 试用真值表证明下列命题定律.

(1) 结合律.

(2) 分配律.

(3) 假言易位式.

(4) 双条件否定等价式.

1.4 重言式

定义 1.4.1 设 A 是任一命题公式.

⑴若对 A 的任意赋值，其对应真值永为真，则称命题公式 A 为重言式或永真式.

⑵若对 A 的任意赋值，其对应真值永为假，则称命题公式 A 为矛盾式或永假式.

⑶若 A 不是矛盾式，则称命题公式 A 为可满足的.

由定义 1.4.1 可以看出，任何重言式都是可满足的.

例 1.3.4 中的公式 $p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$ 是重言式，例 1.3.2 中的公式$(p\wedge q)\wedge\neg q$ 是矛盾式，例 1.3.1 中的公式 $\neg p\vee q$ 和例 1.3.3 中的公式$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$是可满足的.

显然，重言式的真值表的最后一列全为 1，矛盾式的真值表的最后一列全为 0，可满足的公式真值表的最后一列至少有一个 1. 用这个结论可以判断一个公式是否为重言式，矛盾式或可满足的. 当然也可以用等价演算法判断公式的类型.

例 1.4.1 用等价演算法判断下列公式的类型.

(1) $q\vee\neg((\neg p\vee q)\wedge p)$