第一章　集　合　论

- 集合的概念与运算
- 二元关系
- 关系的性质及闭包运算
- 序关系
- 等价关系
- 映射
- 集合的基数
- 模糊集

集合论是现代数学的基础，集合的有关概念是现代科学技术的基础概念之一。

集合的起源可以追溯到 16 世纪，当时主要对各种数集进行研究。但集合论的迅速发展是在 19 世纪 70 年代，当时德国数学家康托尔(G.Cantor)在对无穷集合的研究中，提出了关于对等、等势、基数、序数、超穷数和良序集等概念，并获得了一系列重要成果，奠定了集合论的基础。而后，随着集合论的发展，在本世纪初，由著名哲学家、数学家罗素提出的罗素悖论，动摇了集合论的基础，引起一场数学基础的危机。这场危机激发了数学家、哲学家为克服集合概念的缺陷而努力工作的热情，先后建立了各种公理化集合论的体系。20 世纪 60 年代，P.L.Cohen 得到了关于连续统与选择公理的独立性成果。同时，美国数学和控制论专家 L.A.Zadeh 提出了 Fuzzy 集理论。20 世纪 80 年代，波兰数学家 Z.Pawlak 发表了 Rough 集合论。这两种集合的理论区别于以往经

典集合论，被称为非经典集合论。它们的广泛应用及迅速发展，以及在理论与实践中所获得的丰硕成果，受到学术界及科技工作者的高度重视。

随着现代科学技术的发展，集合论的概念和理论发展得十分迅速，应用日趋广泛。以计算机为例，各种数字、符号、图像、语言、数据、信息等都可以作为集合的元素进行研究。可以肯定地说，集合论的原理与方法已经成为数学工作者、计算机工作者和科技工作者，甚至社会科学工作者的不可缺少的一种数学技术。

集合论分经典集合论与非经典集合论，经典集合论又分为朴素集合论与公理集合论，这里主要介绍朴素集合论。

1.1 集合的概念与运算

一、集合的概念

在研究问题时，通常把具有某种性质且彼此不同的确定的事物作为一个整体来研究，这个整体称为集合（Set），其中的事物称为集合的元素（Element）。常用英文大写字母 A,B,C 等表示集合，以英文小写字母 a,b,c 等表示集合的元素。$a \in A$ 表示 a 是 A 的元素，$a \notin A$ 表示 a 不是 A 的元素。

【定义 1.1.1】一个集合若由有限个元素组成，称为有限集（Finite set），否则称为无限集(Infinite Set)。特别，对元素个数为零的集合称为空集（Empty Set)，记为 $\varnothing$.

常见的集合表示法分为枚举法和特性描述法。枚举法是将集合的元素一一列出。如集合 A 由元素 a,b,c,d 组成，可记为 $A=\{a,b,c,d\}$。特性描述法是用集合的元素所具有的共同性质来刻画集合。如 $A=\{x \mid x是正偶数\}$。一般集合可用 $A=\{x \mid P(x)\}$表示，其中 P表示某性质,集合 A 由满足性质 P 的元素组成。

关于集合概念的说明：

（1）集合的元素是确定的，即 $a\in A$ 或 $a\notin A$，二者必居且仅居其一。

（2）集合的确定不应引起逻辑矛盾。如 $A=\{x|x\notin x\}$，不能定义集合。

（3）集合的元素彼此不同。如集合 $\{a,b\}$，不能写成 $\{a,a,b\}$.

（4）集合中的元素无次序之分。如集合 $\{a,b,c\}=\{b,a,c\}$。

二、集合之间的关系

【定义 1.1.2】集合间的关系有如下定义：

（1）$A\subset B$ 表示 A 是 B 的子集（Subset），即若 $a\in A$，则 $a\in B$

（2）$A\subset B$ 表示 A 是 B 的真子集（Proper Subset），即 $A\subset B$，且存在 $b\in B$，使 $b\notin A$.

（3）$A=B$ 表示 $A\subset B$ 且 $B\subseteq A$，即 A 与 B 元素相同，称做 A 与 B 相等。

（4）$P(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$，称做 X 的幂集（Power Set），即 X 的所有子集组成的集，有时也记为 2^X。

X 含有 n 个元素，则 X 有 2^n 个子集。事实上，从 X 中选出 $i\,(i=0,1,\cdots,n)$ 个元素构成子集，全部子集数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

【例 1.1.1】 $A=\{a\}$，求 $P(A),P(P(A)$。

【解】 $P(A)=\{\varnothing,\{a\}\},P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\},\{\varnothing,\{a\}\}\}$。

我们以 **N**、**Z**、**Q**、**R**、**C** 分别表示自然数集（Natural）、整数集（Integer）、有理数集（Quotient）、实数集（Real）、复数集（Complex），它们有关系 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$。约定 $0\in\mathbf{N}$。

根据讨论问题的需要，常设一个充分大的集合为全集(Universal Set)，也称为基本集，所讨论的集合均为这个集合的子集。

相等与包含关系具有以下性质：

（1）空集是任一集合的子集。

（2）任一集合是全集的子集。

（3）包含关系有：

① $A \subseteq A$　　　　（自反性）

② 若 $A \subseteq B, B \subseteq A$,则$A = B$　　　　（反对称性）

③ 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则$A \subset C$　　　　（传递性）

三、集合的运算

集合 A，B 有并、交、差、补、对称差等运算。

【定义 1.1.3】 A 与 B 的并集(Union),记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$$

【定义 1.1.4】 A 与 B 的交集（Intersection）,记为 $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

【定义 1.1.5】 A 与 B 的差集(Relative Complement)，记为 $A - B$,即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且} x \notin B\}$$

【定义 1.1.6】 X 为基本集,A 的补集(Supplementary Set)，记为 A^c，即

$$A^c = X - A = \{x \mid x \notin A \text{且} x \in X\}$$

【定义1.1.7】 A 与 B 的对称差(Symmetry Difference)，又称布尔和， 记为 $A \oplus B$，即

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

集合的运算可以用文氏图表示，简洁而意义清楚，请读者自绘。

四、集合的运算性质

X 为基本集，$(P(X),\cup,\cap,c)$为集合 X 的代数系统，有性质：

（1）$A\cup B, A\cap B, A^c \in P(X)$ （封闭性）

（2）$A\cup B = B\cup A, A\cap B = B\cap A$ （交换律）

（3）$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ （结合律）

（4）$A\cup\varnothing = A, A\cap X = A$ （单位元存在性）

（5）$A\cup A^c = X, A\cap A^c = \varnothing$ （互补律）

（6）$A\cup(A\cap B) = A, A\cap(A\cup B) = A$ （吸收律）

（7）$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ （分配律）

（8）$A\cup A = A, A\cap A = A$ （幂等律）

（9）$A\cup X = X, A\cap\varnothing = \varnothing$ （两极律）

（10）$(A^c)^c = A$ （对合律）

（11）$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c, (A\cap B)^c = A^c\cup B^c$ （笛摩根律）

如果 $B_t \in P(X), t\in T$，（7） 和（11）有下面更一般的形式：

$$(7')\quad A\cup\left(\bigcap_{t\in T} B_t\right) = \bigcap_{t\in T}(A\cup B_t),\quad A\cap\left(\bigcup_{t\in T} B_t\right) = \bigcup_{t\in T}(A\cap B_t)$$

$$(11')\quad \left[\bigcup_{t\in T} B_t\right]^c = \bigcap_{t\in T} B_t^c,\quad \left[\bigcap_{t\in T} B_t\right]^c = \bigcup_{t\in T} B_t^c$$

其中 $\bigcup_{t\in T} B_t = \{x \mid \exists t\in T, x\in B_t\}$，$\bigcap_{t\in T} B_t = \{x \mid \forall t\in T, x\in B_t\}$

我们仅证明 $(11')$ 的前式，其他由读者完成。

【证明】任取 $x\in\left[\bigcup_{t\in T}B_t\right]^c$，$x\notin\bigcup_{t\in T}B_t$，即 $\forall t\in T, x\notin B_t$，有 $\forall t\in T, x\in B_t^c$，即 $x\in\bigcap_{t\in T}B_t^c$，因此

$$\left[\bigcup_{t\in T}B_t\right]^c\subseteq\bigcap_{t\in T}B_t^c \tag{1}$$

任取 $x\in\bigcap_{t\in T}B_t^c$ 即 $\forall t\in T, x\in B_t^c$，于是 $\forall t\in T, x\notin B_t$，即 $x\notin\bigcup_{t\in T}B_t$，有 $x\in\left[\bigcup_{t\in T}B_t\right]^c$，因此

$$\bigcap_{t\in T}B_t^c\subseteq\left[\bigcup_{t\in T}B_t\right]^c \tag{2}$$

由式（1）、（2）证得等式成立。　　　　　　　　　　证　毕

由以上性质知，在任何集合运算的公式中，将 $\bigcup$ 与 $\bigcap$ 互换，公式仍然成立。这就是集合论的对偶原则。

五、序偶与笛卡尔积

现实生活中存在有序成对出现的事物，据此数学上抽象出序偶的概念。

【定义 1.1.8】 A、B 是两集合，$a\in A, b\in B$，二元序组 (a,b) 称为序偶(Ordered pair)。其中，称 a 为序偶的第一元素，b 为第二元素。

【定义 1.1.9】 n 个有序元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成一 n 元序组，记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。两个 n 元序组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 相等，当且仅当对应元素相等。

【定义 1.1.10】 集合 A、B 的笛卡尔积为 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$

【例 1.1.2】 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b\}$，求 $A\times B, B\times A$。

【解】 $A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

一般 $A\times B\neq B\times A$ 。

【定义 1.1.11 】 集 合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡尔积(Cartesian Product)为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}$$

当 $A_1=A_2=\cdots=A_n$ 时，记 $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个}$。

【例 1.1.3】 计算机内的字是由固定的 n 个有序二进位组成它的全体可以表示成 n 元序组

$$A^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A,i=1,2,\cdots,n\}$$

其中 $A=\{0,1\}$。

1.2 二 元 关 系

一、二元关系及其表示

关系理论最早出现在 Hausdorff 1914 年的著作中，它与集合论、组合数学、图论和数理逻辑等有着密切的联系。后来发现，关系理论与拓扑学甚至线性代数也有多方面的联系。关系的概念不仅在数学领域有重要作用，而且广泛应用于计算机科学技术中。如数据库的数据特性关系和计算机语言的字符关系等。它是数据结构、情报检索、算法分析、计算机理论等计算机科学不可缺少的数学工具。

【定义 1.2.1】 $R\subseteq A\times B$，称 R 为集合 A 到集合 B 的一个二元关系（Relation），若 A 和 B 相等，称 R 为 A 上的二元关系。

若 $(x,y)\in R$ ，记为 xRy，读作“x 对 y 有关系 R”。若 $(x,y)\notin R$，记为 $x\mathbf{R}y$，读作“ x 对 y 没有关系 R”。

令 $D(R)=\{x \mid (x,y)\in R\}$，称为 R 的定义域(Domain)，记为 $D(R)=\mathrm{dom}\,R$。

令 $C(R)=\{y \mid (x,y)\in R\}$，称为 R 的值域(Range)，记为 $C(R)=\mathrm{ran}\,R$。

令 $\mathrm{fld}(R)=D(R)\cup C(R)$，称为 R 的域。

由定义知二元关系 R 是 $A\times B$ 的子集，R 中的元素是有序对。

【定义 1.2.2】 对任何集合 A，空集 $\varnothing$ 是 $A\times A$ 的子集，称为空关系，$E_A=A\times A$ 称为全(Total)关系，$I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$ 称为恒等关系。

【例 1.2.1】 实数 $\mathbf{R}$ 上的"$\geq$"关系可定义为

$$\geq=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, \text{且} x\geq y\}$$

在平面 R^2 上可找到满足关系的点集，它是以 $x=y$ 为界的右半平面。

关系的表示法：

1. 集合表示法

关系是特殊的集合，用集合表示关系，如例 1.2.1。

2. 关系图表示法

当 A、B 为有限集时，用有向图表示 A 到 B 之间的关系 R，将 A、B 中的元素作为节点，若 $(a,b)\in R$，用从 a 到 b 的有向边表示。当 R 是 A 上的关系时，A 中每个元素分别用一个节点表示，若 $(a,a)\in R$，用从 a 到 a 带箭头的圆圈表示。这种图称为关系图(Graph of relation)。

【例 1.2.2】 设 $A=(P_1,P_2,\cdots,P_6)$ 是六个程序，它们之间有一种调用关系 R，若 P_i 可调用 P_j，用 $(P_i,P_j)\in R$ 表示。设

$$R=\{(P_1,P_2),(P_2,P_6),(P_5,P_2),(P_3,P_1),(P_3,P_4),(P_4,P_5)\}$$

R 的关系图如图 1.2.1 所示。

3. 关系的矩阵表示法

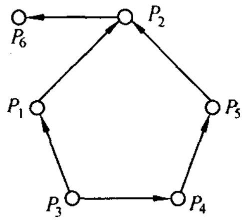

图 1.2.1

【定义 1.2.3】 设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$、$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$是两个有限集。

R 是从 A 到 B 的一个二元关系，则对应于 R 的关系矩阵(Matrix of relation)

$$M_R=(r_{ij})_{n\times m}$$

其中
$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}(a_i,b_j)\in R\\ 0 & \text{当}(a_i,b_j)\notin R\end{cases}$$

i=1，2，…，n　　j=1，2，…，m

【例 1.2.3】 例 1.2.2 中关系 R 的关系矩阵

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

用有向图表示关系比较直观，但复杂的图不便于表示，关系矩阵便于用计算机处理分析。

二、关系的运算

1. 关系的并、交、差、补运算

由于关系是特殊的集合，有关集合的并、交、差、补运算也适用于关系。设 R、S 都是集合 A 到 B 的关系，则

$$R\cup S=\{(x,y)\mid xRy\text{或}xSy\}$$
$$R\cap S=\{(x,y)\mid xRy\text{且}xSy\}$$

$$R-S=\{(x,y)\mid xRy \text{且} x\not S y\}$$
$$R^c=\{(x,y)\mid x\not R y\}$$

由于 $A\times B$ 是相对于 R 的全集，因此

$$R^c=A\times B-R,\ R^c\cup R=A\times B,\ R^c\cap R=\varnothing$$

2. 复合运算

【定义 1.2.4】 R是 A 到 B 的二元关系，S 是 B 到 C 的二元关系， $R\circ S$ 表示 R 和 S 的复合(Composition)，即 $R\circ S=\{(x,z)\mid x\in A,z\in C$,且$\exists y\in B$，使$(x,y)\in R,(y,z)\in S\}$ ，这个复合关系是 A 到 C 的关系。

【例 1.2.4】 设 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，$C=\{c_1,c_2,c_3\}$，从 A 到 B 的关系 $R=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_2)\}$；从 B 到 C的关系 $S=\{(b_1,c_2),(b_2,c_3),(b_3,c_3)\}$ ，由此得从 A 到 C 的关系 $R\circ S$ ，即

$$R\circ S=\{(a_1,c_2),(a_1,c_3),(a_2,c_3)\}$$

这个复合关系的关系图容易作出。将 a_i与 c_j通过 b_r 有边相连组成 $R\circ S$ （图 1.2.2）。

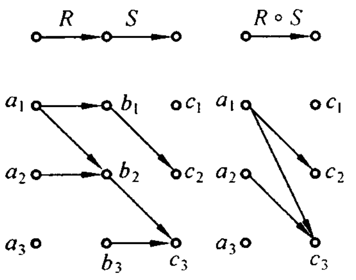

图 1.2.2

两个关系的复合可以用矩阵的运算来表示，这里举例说明 。

设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2\ldots b_m\}$，$C=\{c_1,c_2\ldots c_k\}$，R是从 A 到 B 的关系，S 是从 B到 C的关系，关系 R 的关系矩阵 M_R 为 n 行 m 列矩阵，关系 S 的关系矩阵 M_S为 m 行 k 列矩阵，关系 $R\circ S$ 的关系矩阵 $M_{R\circ S}$ 为 $n\times k$ 矩阵。

【例 1.2.5】 例 1.2.4 中的 $M_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$M_S=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则

$$M_{R\circ S}=M_R\times M_S=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

这里的矩阵乘法为布尔乘法。

复合关系是由复合运算所得，它满足结合律。

【定理 1.2.1】 设 R、S、T 分别为 A 到 B、B 到 C、C 到 D 的关系，则有

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$$

【证明】 设 $(a,d)\in(R\circ S)\circ T$，由定义 $\exists c\in C$，有 $(a,c)\in R\circ S$，$(c,d)\in T$，进而 $\exists b\in B$，有 $(a,b)\in R,(b,c)\in S$。因为 $(b,c)\in S,(c,d)\in T$，故必有 $(b,d)\in S\circ T$，进而 $(a,b)\in R$，$(b,d)\in S\circ T$，故有 $(a,d)\in R\circ(S\circ T)$。因此，$(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$。类似可证 $R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$。 证 毕

由于复合运算满足结合律，因此可以将复合运算中的括号省略，运算仍有意义。即

$$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)=R\circ S\circ T$$

【定义 1.2.5】 设 R 为 A 上的关系，$n\in N$，则 R 的 n 次幂定义为 $R^0=\{(x,x)\mid x\in A\}=I_A$，$R^{n+1}=R^n\circ R$

3. 逆关系——关系的逆运算

【定义 1.2.6】 R 是从 A 到 B 的关系，则有 B 到 A 的关系 $R^{-1}=\{(b,a)\mid(a,b)\in R\}$ 称 R^{-1} 为 R 的逆关系（Inverse relation）。

逆关系也可以用关系图与关系矩阵表示， R^{-1} 的图是将 R 图中的有向边的方向改变所得。 R^{-1} 的关系矩阵 $M_{R^{-1}}$ 是 M_R 的转置。

容易得到下面定理：

【定理 1.2.2】 设 R、S 分别是从 A 到 B、B 到 C 的关系，我们有：

（1） $(R^{-1})^{-1}=R$

（2） $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$。（证明由读者完成）

【定理 1.2.3】 设 A 为 n 元集合，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t，使得 $R^s=R^t$。

【证明】 R 为 A 上关系，$\forall k\in N$，$R^k\subseteq A\times A$ 。又 $A\times A$ 元素个数为 n^2，于是 $A\times A$ 的不同子集仅有 2^{n^2} 个。R 的各次幂为 $R^0,R^1,R^2,\cdots,R^{2^{n^2}},\cdots$ 时，必存在 s，$t\in N$，使 $R^s=R^t$ 。 证毕

【定理 1.2.4】 R 为 A 上的关系，m，$n\in N$，则：

（1） $R^m\circ R^n=R^{m+n}$ 。

（2） $(R^m)^n=R^{mn}$ 。

用归纳法不难证明。

【定理 1.2.5】 设 R 为 A 上的关系，若存在自然数 $s,t(s<t)$，使得 $R^s=R^t$，则：

（1） $\forall\ k\in N$，有 $R^{s+k}=R^{t+k}$ 。

（2） $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$，$i\in N$，$0\le i\le p-1$，$k\in N$ 。

（3） 令 $S=\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$，则 $\forall q\in N$，有 $R^q\in S$ 。

【证明】 （1） $R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$

（2） 对 k 归纳。若 $k=0$，有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，假设 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，

其中 $p=t-s$，则

$$R^{s+(k+1)p+i}=R^{s+kp+i+p}=R^{s+kp+i}\circ R^{p}=R^{s+i}\circ R^{p}=$$

$$R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}=R^{t+i}=R^{s+i}$$

归纳命题得证。

（3）任取 $q\in N$，若 $q<t$，显然有 $R^{q}\in S$；若 $q\geq t$，则存在自然数 k 和 i，有 $q=s+kp+i$（$p=t-s$），其中 $0\leq i\leq p-1$。于是 $R^{q}=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，而 $s+i\leq s+p-1=s+(t-s)-1=t-1$，因此 $R^{q}\in S$。 证 毕

应用定理 1.2.5 可以将关系的幂化简。

【例 1.2.6】 设 $R\subset A\times A$，化简 $R^{2\,002}$ 的指数。

（1）已知 $R^{3}=R^{5}$。

（2）已知 $R^{7}=R^{15}$。

【解】（1）$s=3$，$t=5$，$q=2\,002$，则

$$\frac{q-s}{t-s}=\frac{1\,999}{2}=\frac{999\times2+1}{2}$$

因此 $k=999$，$i=$

$$R^{2002}=R^{3+2\times999+1}=R^{3+1}=R^{4}\in\{R^{0},\ R^{1},\cdots,\ R^{4}\}$$

（2）$s=7$，$t=15$，$q=2\,002$，则

$$\frac{q-s}{t-s}=\frac{1995}{8}=\frac{249\times8+3}{8}$$

因此 $k=249$，$i=3$

$$R^{2002}=R^{7+8\times249+3}=R^{7+3}=R^{10}\in\{R^{0},\ R^{1},\cdots,\ R^{14}\}$$

1.3 关系的性质及闭包运算

一、关系的性质

关系的性质主要有五种：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

【定义 1.3.1】 R为 A上的关系。

（1）$\forall a \in A$，若$(a,a) \in R$，则称 R 为自反的(Reflexive)。

（2）$\forall a \in A$，若$(a,a) \notin R$，则称 R 为反自反的(Anreflexive)。

（3）$\forall a$，$b \in A$，若$(a,b) \in R$，有$(b,a) \in R$，则称 R 是对称的(Symmetric)。

（4）$\forall a$，$b \in A$，若$(a,b) \in R$且$a \neq b$，有$(b,a) \notin R$，则称 R 是反对称的(Antisymmetric)。

（5）$\forall a$，b，$c \in A$，若$(a,b) \in R$且$(b,c) \in R$，有$(a,c) \in R$ 则称 R 是传递的(Transitive)。

【例 1.3.1】

（1）整数集 Z 上的关系"$\leq$"是自反的，不是反自反的，是反对称的，是传递的。

（2）整数集上的"相等"关系是自反的、对称的、传递的。

（3）"父子"关系是反自反、反对称、反传递的。

（4）整数集 Z 上的"<"关系是反自反、反对称，然而是传递的。

将关系用关系图与矩阵表示，则上述性质容易判断。

（1）关系 R是自反的，当且仅当 M_R 的主对角线上的元素全为 1，或关系图中每个节点都有一自闭合的有向圈，或 $I_A \subseteq R$。

（2）R是反自反的，当且仅当 M_R 的主对角线上元素全为 0，或关系图中每个节点均无自闭的有向圈，或 $R \cap I_A = \varnothing$。

（3）R是对称的，当且仅当 M_R是对称矩阵，或关系图中不同两点若有有向边，必有两条方向相反的有向边。

（4）R是反对称的，当且仅当 M_R 中关于主对角线对称的两元素不会同时都为 1，或关系图中不同两点间不存在成对的方向相反的有向边，或 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

（5）R是传递的，当且仅当 R 的关系图中如果顶点 a_i到 a_j有边，a_j到a_k有边，则 a_i到 a_k有边，或 $R \circ R \subset R$ 。

以上性质证明略。

二、关系的闭包运算

关系的闭包运算是一种对关系扩充一些的二元序组，使它具有某种特殊性质的运算。

【定义 1.3.2】 设 R 是集合 A 上的一个关系，则 R 的自反（对 称、传 递）闭 包(Closure)是一个满足下列条件的关系 R'：

（1）R' 是自反的（对称的、传递的）.

（2） $R' \supset R$

（3）设 R''是自反的（对称的、传递的），且 $R'' \supseteq R$，则 $R'' \supset R'$.

用 r（R）表示 R的自反闭包，用 S（R）表示 R 的对称闭包，用 t（R）表示 R 的传递闭包。由定义知，自反（对称，传递）闭包，是具有相应性质的包含 R 的最小关系集合。

【例 1.3.2】 整 数 集 Z 上的“＜”关系的自反闭包是“ ＜”关系；它的对称闭包是“ $\neq$ ”关系；它的传递闭包是它本身。

【例 1.3.3】 设 $A=\{a,b,c\}$ ，$R=\{(a,a),(b,b),(a,c)\}$，求 R 的自反闭包 r（R）。

【解】 r（R）$=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$

如果在 r（R） 中再加上(a,b)，得 到 R''，虽然它仍是自反的，

但却不是最小的，因而不是它的自反闭包。

给定一个关系，是否总存在相应的关系闭包？为此有下面的定理。

【定理 1.3.1】 R 是集合 A 上的关系，则 $r(R)=R\cup I_A$，其中 $I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$。

【证明】令 $R'=R\cup I_A$，显然 R'是自反的，且 $R'\supset R$。设 R''是一个 A 上的具有自反性质的关系，且 $R''\supset R$，只需证 $R''\supset R'$。任取$(a,b)\in R'$，因为 $R'=R\cup I_A$，当 $a=b$ 时，有 $(a,b)\in I_A$，因为 R''是自反的，必有 $(a,b)\in R''$；当 $a\neq b$时，有 $(a,b)\in R$，因为 $R''\supset R$，必有 $(a,b)\in R''$。因此得 $R''\supset R'$。由自反闭包的定义知，$r(R)=R\cup I_A$。 证 毕

【定理 1.3.2】 设 R是集合 A 上的关系,则 $S(R)=R\cup R^{-1}$，R^{-1}是 R 的逆。

【证明】令$R'=R\cup R^{-1}$，显然，$R'\supset R$，且 R'是对称的。设 R''是 A 上的对称关系，且 $R''\supset R$，只需证 $R''\supset R'$。任取 $(a,b)\in R'$，当 $(a,b)\in R$ 时，必有$(a,b)\in R''$；当 $(a,b)\in R^{-1}$ 时，必有 $(b,a)\in R$。由此 $(b,a)\in R''$，因为 R''是对称的，所以 $(a,b)\in R''$。总之有 $R''\supset R'$。由对称闭包的定义知 $S(R)=R\cup R^{-1}$。 证 毕

【定理 1.3.3】 设 R是集合 A上的关系，则

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$$

【证明】 （1）证明 $\bigcup_{i=1}R^i\subseteq t(R)$。

首先证明对任意 $n>0$，有 $R^n\subseteq t(R)$。用数学归纳法。

由传递闭包的定义知 $R \subseteq t(R)$ 。假设 $R^n \subseteq t(R)$， $n \geq 1$，令 $(a,b) \in R^{n+1}$ 。因为 $R^{n+1} = R^n \circ R$ ，至少存在一个 $c \in A$， 有 $(a,c) \in R^n$， $(c,b) \in R$ ，由归纳假设 $R^n \subseteq t(R)$ ，$R \subseteq t(R)$，故有 $(a,c) \in t(R)$； $(c,b) \in t(R)$，由 t（R）的传递性， $(a,b) \in t(R)$ ，由此得 $R^{n+1} \subseteq t(R)$。

由于对每个 n 均有 $R^n \subseteq t(R)$，于是有 $\bigcup\limits_{n=1} R^i \subseteq t(R)$。

（2）证明 $t(R) \subseteq \bigcup\limits_{i=1} R^i$ 。

首先证 $\bigcup\limits_{i=1} R^i$ 是传递的，令 $(a,b),(b,c) \in \bigcup\limits_{i=1} R^i$ 是其中的任意两元素，必存在 $S \geq 1, t \geq 1$ ，有 $(a,b) \in R^s, (b,c) \in R^t$ ，这样必有 $(a,c) \in R^s \circ R^t$ ，因为 $R^s \circ R^t = R^{s+t}$，由此 $(a,c) \in \bigcup\limits_{i=1} R^i$，$\bigcup\limits_{i=1} R^i$ 是传递的。由传递闭包的定义知， $t(R) \subseteq \bigcup\limits_{i=1} R^i$ 。

由（1）、（2）结论成立。 证毕

当 A 是有限集时，有以下结果。

【定理 1.3.4】 设集合 A 有 n 个元素，R 是 A 上的关系，则 $t(R) = \bigcup\limits_{i=1} R^i$ 。

【证明】首先证明，当 $k > 0$ 时，有 $R^k \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$。事实上当 $k \leq n$ 时，显然有 $R^k \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} R^i$；当 $k > n$ 时，设(a，b)$\in R^k$ ，此时 A 中存在序列 c_0，c_1，c_2，$\cdots$，c_k ，其中 $c_0 = a$， $c_k = b$ ，且对 $0 \leq i \leq k$，$(c_i, c_{i+1}) \in R$ 。由于 $k > n$ ，A 有 n 个元素，故 c_0 至 c_k